ALGÈBRE et analyse

C. LEBOSSÉ
C. HÉMERY

CLASSES TERMINALES CDT



FERNAND NATHAN

ALGÈBRE

ET ANALYSE

C. LEBOSSÉ
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Cl. Bernard

C. HÉMERY
Agrégé de Mathématiques
Professeur au Lycée Lavoisier

ALGÈBRE ET ANALYSE

Classes Terminales C, D et T

PROGRAMME 1966

FERNAND NATHAN
18, rue Monsieur-le-Prince, Paris VIe

178 379

COLLECTION COMPLÈTE LEBOSSÉ-HÉMERY

Avec la collaboration de M. FAURE

6e	Arithmétique et Travaux Pratiques
5e	Arithmétique et Géométrie
4e	Arithmétique, Algèbre et Géométrie
3e	Algèbre, Arithmétique et Géométrie

Nouveaux programmes 1966

2e A	Algèbre et Géométrie
2e C	Algèbre
2e C	Géométrie
1re A	Algèbre et notions de Statistique
1re B	Algèbre et Statistique
1re C et D	Algèbre et Notions d'Analyse
1re C	Géométrie et Géométrie analytique
1re D	Géométrie et Statistique
Terminale A	Notions d'Analyse et de Probabilités
Terminale B	Algèbre et Probabilités
Terminale C, D et T	Algèbre et Analyse
Terminale C	Géométrie et Géométrie analytique
Terminale D	Géométrie et éléments de Probabilités

Enseignement technique

LEBOSSÉ - HÉMERY - FAURE

Nouveaux programmes 1964

2e Techn. industrielle	Algèbre
2e Techn. industrielle	Géométrie
1re Techn. industrielle	Algèbre, Trigonométrie, Géométrie
Classes Terminales	Algèbre, Géométrie, Calcul numérique

EXTRAITS DES PROGRAMMES DU 8 JUIN 1966

(B. O. nº 26 du 30-6-66)

CLASSE TERMINALE C

NOTIONS GÉNÉRALES

Il n'est pas nécessaire de rassembler dans un chapitre introductif les études proposées ci-dessous, elles pourront occuper dans le cours les places qui seront jugées les meilleures; un certain nombre d'entre elles auront d'ailleurs été dégagées au cours des années précédentes.

Application d'un ensemble dans un ensemble; application injective, surjective; application bijective, application réciproque; composition des applications, fonction composée.

Transformation ponctuelle dans le plan et dans l'espace; composition des transformations (produit) : associativité; transformation réciproque d'une transformation, transformation involutive; groupe de transformations.

Loi de composition; loi interne, loi externe. Étude particulière des lois internes, associativité, commutativité, élément neutre; structure de groupe. Distributivité d'une loi interne par rapport à une autre; structure d'anneau et de corps commutatif.

Étude d'une loi externe : structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

Isomorphisme entre deux ensembles munis de lois internes en correspondance bijective, définition; isomorphisme entre deux groupes.

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. Les nombres : extensions successives de la notion de nombre.

Note préliminaire.

a. Quels que soient l'ordre et le mode d'exposition choisis, il importe de ne pas s'attarder sur les théories, dont les résultats sont déjà connus des élèves; en particulier, on supposera connues les propriétés fondamentales de l'ensemble N des entiers naturels et on attirera l'attention des élèves sur l'importance du raisonnement par récurrence.

b. Aucune question d'ordre théorique ne devra être posée aux épreuves écrites et orales du baccalauréat, sur les diverses notions qui font l'objet de ce chapitre I. Les résultats généraux concernant les nombres, les propriétés des opérations, leurs conséquences essentielles, sont du reste mis en œuvre dans les autres chapitres du programme.

1º *Les entiers relatifs.* — Construction de l'ensemble Z des entiers relatifs. Pour les lois d'addition et de multiplication, Z a une structure d'anneau commutatif ordonné.

2º *Les nombres rationnels.* — Construction de l'ensemble Q des nombres rationnels. Pour les lois d'addition et de multiplication, Q a une structure de corps commutatif ordonné.

3º *Notions sur les nombres réels.* — Nécessité d'une extension de Q. Exposé sans démonstration, des propriétés des réels. Les réels forment un corps commutatif ordonné R.
Valeurs absolues, propriétés relatives aux sommes, produits, quotients.

4º *Les nombres complexes.* — Définition; représentation géométrique; module; argument. Égalité.
Nombres complexes opposés; nombres complexes conjugués; nombre complexe nul.
Addition, soustraction, multiplication, division. Corps C des nombres complexes.
Forme trigonométrique d'un nombre complexe, d'un produit; formule de Moivre.
Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe (on se bornera à la démonstration d'existence et à la représentation géométrique des n racines).
Applications de la formule de Moivre, dans le cas des exposants 2, 3, 4 aux formules de multiplication des arcs et à la linéarisation des polynômes trigonométriques.
Résolution dans C de l'équation du second degré à coefficients complexes, à coefficients réels.

II. Arithmétique.

1° *Analyse combinatoire.* — Permutations, arrangements, combinaisons sans répétition. Formule du binôme.

2° *Les entiers.* — Multiples dans Z d'un entier relatif; problème de la division d'un entier relatif par un autre; divisibilité.
Congruences modulo n dans Z; opérations élémentaires.
La division euclidienne dans N, quotient entier, reste.
Diviseurs communs à plusieurs nombres, plus grand diviseur commun, nombres premiers entre eux. Multiples communs à plusieurs nombres, plus petit multiple commun.
Étude dans N des nombres premiers; propriétés élémentaires. Décomposition d'un entier en un produit de nombres premiers. Applications : diviseurs d'un nombre; diviseurs communs et multiples communs à plusieurs nombres; conditions pour qu'un entier soit égal au carré, à la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un entier.

3° *Application aux fractions.* — Simplification des fractions; fractions irréductibles.
Condition pour qu'un rationnel soit le carré, la puissance $n^{\text{ièmes}}$ d'un rationnel.

4° *Numération.* — Principe des systèmes de numération; notion de base. Numération décimale.

5° *Nombres décimaux.* — Définition; condition pour qu'un nombre rationnel soit un nombre décimal.
Les nombres décimaux forment un anneau commutatif.
Valeurs approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel. Représentation d'un nombre réel par une suite décimale illimitée; dans le cas des nombres rationnels, ce développement admet une périodicité (l'étude générale des nombres décimaux périodiques est en dehors du programme).

III. Fonctions numériques d'une variable réelle.

1° *Sens de variation sur un intervalle.* — Propriétés élémentaires de fonctions monotones sur un intervalle. Définition d'un maximum ou d'un minimum d'une fonction en un point.

2° *Notions sur les limites.* — Définition concernant les limites (finies ou infinies) : limite d'une suite u_n lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini. Énoncé (sans démonstration) des propriétés élémentaires des limites : unicité, opérations élémentaires (somme, produit, quotient, racine $n^{\text{ième}}$), cas d'indétermination.

3° *Continuité d'une fonction.* — Définition d'une fonction continue pour une valeur de la variable, sur un intervalle (la continuité uniforme est en dehors du programme). Opérations élémentaires. Continuité d'une fonction composée (fonction de fonction), formée à partir de deux fonctions continues (sans démonstration).
On admettra sans démonstration la propriété suivante : si une fonction f est continue sur un intervalle fermé (a, b) et si les valeurs numériques $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, la fonction s'annule au moins pour une valeur de la variable comprise entre a et b. Application au cas d'une fonction continue et monotone sur un intervalle (a, b) fermé.
Existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé (on admettra la continuité de cette fonction réciproque); représentation graphique dans un repère cartésien normé. Application à $\sqrt[n]{x}$ (n entier naturel).

4° *Dérivées.* — Révision du programme de Première C : définition de la dérivée pour une valeur de la variable; fonction dérivée, opérations élémentaires (dérivées d'une constante, d'une somme, d'un produit, d'un quotient); interprétation géométrique en coordonnées cartésiennes, équation de la tangente en un point de la courbe représentative. L'existence de la dérivée entraîne la continuité de la fonction.
Dérivée d'une fonction composée (formée à partir de deux fonctions, dérivables). Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction monotone dérivable, interprétation géométrique.
Définition des dérivées successives.
Différentielle première d'une fonction d'une variable, interprétation géométrique, usages.

5° *Dérivées de quelques fonctions (révision et compléments).* — Dérivée par rapport à x de x^n, de x^{-n}, de $\sqrt[n]{x}$ (n entier naturel). Dérivées de la puissance $n^{\text{ième}}$, de la racine $n^{\text{ième}}$ d'une fonction dérivable.

Dérivées des fonctions circulaires sin, cos, tg, cotg (révision). Dérivée de fonctions composées formées à partir des fonctions circulaires. Dérivées successives de sin $(ax + b)$ et de cos $(ax + b)$.

6° *Application des dérivées.* — Énoncé, sans démonstration, du théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis; interprétation géométrique.
Comparaison de deux fonctions ayant la même fonction dérivée sur un intervalle. Étude du sens de variation d'une fonction au moyen du signe de la fonction dérivée.

7° *Fonctions primitives.* — Définition d'une fonction primitive d'une fonction (on admettra l'existence d'au moins une primitive pour toute fonction continue). Relation entre deux primitives d'une fonction sur un même intervalle; existence d'une primitive unique prenant, en un point donné de l'intervalle de définition, une valeur fixée.
Exemples de primitives déduites de la connaissance des dérivées de quelques fonctions usuelles; en particulier : primitives d'un polynôme, de $\frac{1}{x^n}$ (n entier naturel supérieur à 1), de sin $(ax + b)$ et cos $(ax + b)$. Notation $\int f(x)\, dx$.

8° *Application des primitives au calcul d'aires et de volumes* (aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume. On admettra l'existence et les propriétés des aires et des volumes dont le calcul est demandé ici).
Aire d'un domaine plan défini dans un repère orthonormé par les relations : $a \leqslant x \leqslant X, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$, f étant une fonction continue positive : cette aire est la valeur F (X) d'une fonction primitive de f (on pourra se borner, pour la démonstration, au cas où f est monotone); extension à $X < a$ et à une fonction f négative. Application à des calculs d'aires planes. Notation $\int_a^b f(t)\, dt$.
Application (à partir des formules, admises sans démonstration, donnant le volume d'un prisme ou d'un cylindre) des primitives au calcul de quelques volumes : pyramide à base triangulaire, tronc de pyramide à bases triangulaires parallèles (extension des formules trouvées au cas de bases polygonales quelconques); cône à base circulaire, tronc de cône à bases circulaires parallèles, segment sphérique, sphère.

IV. Étude de quelques fonctions numériques.

1° *Suites.* — Suite arithmétique, définie par la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + r$; expression de u_n en fonction de n; calcul de la somme des n premiers termes.
Suite géométrique, définie par la relation de récurrence $u_n = qu_{n-1}$: expression de u_n en fonction de n; calcul de la somme des n premiers termes, étude de cette somme quand n tend vers l'infini.

2° *La fonction logarithme népérien.* — Définition de la fonction logarithme népérien (notation Log), caractérisée par $x > 0$, $(\text{Log } x)' = \frac{1}{x}$ et Log 1 = 0. Représentation par l'aire d'un trapèze mixtiligne. Propriété fondamentale : Log (ab) = Log a + Log b et ses conséquences.
Limite de Log x lorsque la variable x positive tend vers l'infini ou vers zéro : limite de $\frac{\text{Log } x}{x}$ lorsque x tend vers l'infini. Base des logarithmes népériens, définition du nombre e.
Courbe représentative de la fonction logarithme népérien (repère orthonormé).

3° *La fonction exponentielle de base* e. — Définition de la fonction exponentielle de base e comme fonction réciproque de la fonction logarithme népérien; existence, domaine de définition, dérivée. Propriété : exp u.exp v = exp $(u + v)$.
Notation e^x. Limite de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Courbe représentative de la fonction exponentielle de base e.

4° *Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.* — Fonction logarithme et fonction exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$); relations avec les fonctions correspondantes de base e; courbes représentatives. Notation a^x ; cas particulier des exposants rationnels.
Logarithmes décimaux : usage des tables de conversion des logarithmes népériens en logarithmes décimaux et vice versa.

Remarque : L'étude d'exemples de fonctions composées de type logarithmique ou exponentiel est strictement limitée au cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la fonction est définie, les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant, et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

V. Fonctions vectorielles d'une variable réelle.

Détermination d'une fonction vectorielle par trois fonctions numériques d'une variable, une base étant choisie. Limite (notion de vecteur tendant vers zéro); continuité. Dérivation dans une base donnée d'un vecteur; coordonnées du vecteur dérivé. Dérivées successives.
Dérivée d'une somme vectorielle, du produit d'un vecteur par un scalaire variable.
Dérivée du produit scalaire de deux vecteurs.
Application à la recherche de tangentes; exemples des coniques et de l'hélice circulaire.

VI. Équations différentielles.

Recherche des fonctions, une ou deux fois dérivables, y de la variable x vérifiant les équations :
$y' = P(x)$, $y'' = P(x)$, $P(x)$ étant un polynome en x;
$y' = ay$, a constante réelle non nulle;
$y'' + \omega y = 0$, ω constante réelle non nulle (on admettra, après avoir découvert les solutions de la forme $A \cos \omega x + B \sin \omega x$, que l'équation n'en admet pas d'autres).

VII. Calcul numérique.

1° *Valeurs approchées.* — Valeurs approchées d'un nombre réel, encadrement, marge d'incertitude (erreur absolue, erreur relative). Valeurs approchées d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient de nombres dont on connaît des valeurs approchées.
Approximation par les nombres décimaux.

2° *Tables numériques.* Usage des tables numériques de fonctions usuelles; usage des tables de logarithmes. Notions pratiques sur l'interpolation linéaire.
Usage de la règle à calcul.
De nombreux exercices de calcul numérique seront faits, à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application les notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une erreur.

NOTE DES AUTEURS

Le programme développé dans cet ouvrage est le programme ci-dessus d'Algèbre et Analyse de la Classe Terminale C.

Le programme de la Classe Terminale D ne comporte pas le titre II : **Arithmétique**, ni les paragraphes signalés en marge par un trait ondulé ∿∿∿∿ (Leçons 3, 4, 5, 10, 11, 12 et 15).

Le programme de la Classe Terminale T, compte tenu de la Géométrie vectorielle et du calcul numérique, est identique à celui de la Terminale C diminué des paragraphes d'Arithmétique signalés en marge par un filet continu ——— (Leçons 10, 11 et fin de la 12).

LIVRE I : ENSEMBLES FONDAMENTAUX

Première Leçon

ENSEMBLES *(Rappel)*

1. Appartenance. — Lorsque a désigne l'un quelconque des éléments d'un ensemble donné E, on écrit :

$$\boxed{a \in E}$$

ce qui se lit : " *a appartient à* E " ou " *a est un élément de* E ".

Si b n'est pas un élément de l'ensemble E, on écrit de même :

$\boxed{b \notin E}$ lire " *b n'appartient pas à* E "

Le symbole $\varnothing$ désigne l'*ensemble vide* qui ne contient aucun élément.

Lorsque a et b désignent un même élément d'un ensemble E, on dit que a et b *coïncident* et on écrit : $a = b$ (a égale b).

Dans le cas contraire on écrit : $a \neq b$ (a différent de b).

Si deux ensembles A et B sont formés des mêmes éléments, c'est-à-dire, si tout élément de chacun d'eux appartient à l'autre, ces deux ensembles sont dits *identiques*.

On écrit : $A = B$

2. Inclusion. — ***Tout ensemble*** A, ***composé d'éléments d'un ensemble donné*** E, ***est dit inclus dans*** E ***et constitue un sous-ensemble ou une partie de*** E.

Si A est distinct de E (fig. 1), il est strictement inclus dans E et on écrit :

$$\boxed{A \subset E}$$

Si A peut coïncider avec E, on écrit : $A \subseteq E$.

Notons que : $A \subseteq B$ et $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

$A \subset B$ et $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

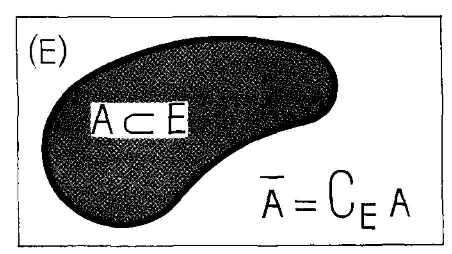


Fig. 1.

L'ensemble $\overline{A}$ des éléments de E n'appartenant pas au sous-ensemble A de E, est le complément de A dans E. On écrit (fig. 1) :

$$A = \complement_E A \quad \text{ou} \quad \overline{A} = E - A.$$

Il est clair que $\complement_E E = E - E = \varnothing$ et $\complement_E \varnothing = E - \varnothing = E$.

Les sous-ensembles de E (y compris $\varnothing$ et E) forment un ensemble $\mathcal{P}_E$ ou $\mathcal{P}_{(E)}$ appelé ensemble des parties de E.

3. Intersection. Réunion. — ***L'intersection de deux ensembles*** A ***et*** B ***est l'ensemble*** I ***des éléments communs à*** A ***et*** B (fig. 2).

On écrit : $\boxed{I = A \cap B}$ lire « A *inter* B ».



Fig. 2. Fig. 3.

De même l'ensemble des éléments communs aux ensembles A, B, C est leur intersection qui se note $A \cap B \cap C$ (fig. 3). Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$. Ainsi les sous-ensembles A et $\overline{A} = E - A$ de E sont disjoints.

La réunion de deux ensembles A ***et*** B ***est l'ensemble*** R ***formé par les éléments appartenant à l'un au moins des ensembles*** A ***et*** B (fig. 4).

On écrit: $\boxed{R = A \cup B}$ lire « A *union* B ».

De même l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A, B, C est leur réunion qui se note $A \cup B \cup C$ (fig. 5).

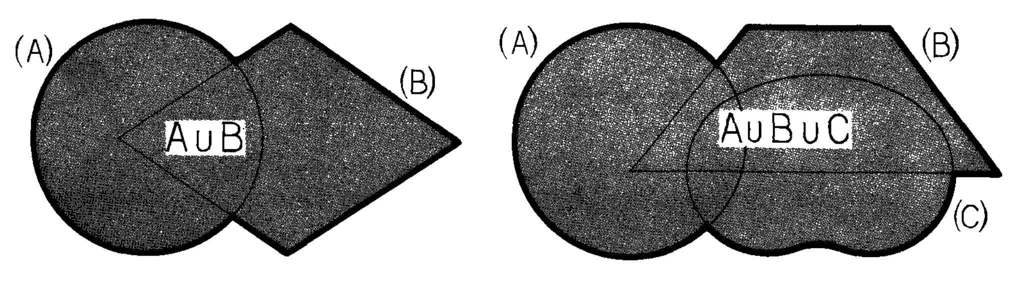


Fig. 4. Fig. 5.

On effectue une partition d'un ensemble E, ***lorsqu'on répartit les éléments de*** E ***en plusieurs sous-ensembles disjoints deux à deux*** A, B, C ***dont la réunion est l'ensemble*** E.

Ainsi les quatre symboles : trèfle, carreau, cœur, pique déterminent une partition de l'ensemble des cartes d'un jeu en quatre sous-ensembles disjoints (appelés couleurs).

4. Ensemble produit. — ***Le produit cartésien de deux ensembles*** A ***et*** B ***est l'ensemble de tous les couples ordonnés*** (x, y) ***résultant de l'association d'un élément*** x ***de*** A ***et d'un élément*** y ***de*** B.

Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{x, y\}$. Le produit $P = A \times B$ ou AB de ces deux ensembles admet pour éléments les 6 couples suivants :

$$(a\,;x),\ (a\,;y),\ (b\,;x),\ (b\,;y),\ (c\,;x)\ \text{ et }\ (c\,;y).$$

Donc : $x \in A$ et $y \in B \iff (x, y) \in A \times B$ ou AB.

De même plus généralement :

$$x \in A,\quad y \in B,\quad z \in C \iff (x, y, z) \in ABC.$$

Le carré A^2 d'un ensemble A est le produit $A \times A$ de cet ensemble par lui-même. Ainsi pour $A = \{ a, b, c \}$, on obtient :

$$A^2 = \{ (a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c) \}$$

On définit de même : $A^3 = A^2 \times A$, $A^4 = A^3 \times A$ etc.

5. Relations binaires. — Toute propriété $\mathfrak{R}$ susceptible d'être vérifiée par deux éléments a et b d'un ensemble E définit une relation binaire dans cet ensemble.

Si a et b vérifient la propriété $\mathfrak{R}$, on écrit : $\boxed{a \,\mathfrak{R}\, b}$

Le symbole $\mathfrak{R}$ désigne le plus souvent un des symboles connus tels que : $=$; $<$; $\geqslant$; $\parallel$; $\perp$; $\subset$, etc. Ainsi l'égalité de deux vecteurs libres de l'espace est une relation binaire dans l'ensemble de ces vecteurs. Il en est de même de leur parallélisme ou de leur orthogonalité :

On écrit : $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$; $\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$ ou $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

Une relation binaire $\mathfrak{R}$ ***dans un ensemble*** E ***est dite :***

1° ***Réflexive*** si : $a \in E \Longrightarrow a \,\mathfrak{R}\, a.$

2° ***Symétrique*** si : $a \,\mathfrak{R}\, b \Longrightarrow b \,\mathfrak{R}\, a.$

3° ***Antisymétrique*** si : $a \,\mathfrak{R}\, b$ et $b \,\mathfrak{R}\, a \Longrightarrow a = b.$

4° ***Transitive*** si : $a \,\mathfrak{R}\, b$ et $b \,\mathfrak{R}\, c \Longrightarrow a \,\mathfrak{R}\, c.$

L'égalité de deux vecteurs est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. L'orthogonalité de deux vecteurs est une relation symétrique mais non réflexive et non transitive.

La relation d'inclusion au sens large $\subseteq$ entre deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive dans l'ensemble des parties de E.

6. Relation d'équivalence. — ***Une relation*** $\mathfrak{R}$ ***définie dans un ensemble*** E ***est dite relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.***

Donc :

$$\forall a \in E \Longrightarrow a \,\mathfrak{R}\, a \qquad (\textit{réflexivité})$$

$$a \neq b \text{ et } a \,\mathfrak{R}\, b \Longrightarrow b \,\mathfrak{R}\, a \qquad (\textit{symétrie})$$

$$a, b, c \text{ distincts : } a \,\mathfrak{R}\, b \text{ et } b \,\mathfrak{R}\, c \Longrightarrow a \,\mathfrak{R}\, c \qquad (\textit{transitivité}).$$

EXEMPLES. — 1° Il en est ainsi des égalités définies en Algèbre ou en Géométrie :

$$x = x \;;\quad x = y \Longrightarrow y = x \quad \text{et} \quad x = y \;;\; y = z \Longrightarrow x = z.$$

$$F_1 = F_1;\quad F_1 = F_2 \Longrightarrow F_2 = F_1 \quad \text{et} \quad F_1 = F_2; F_2 = F_3 \Longrightarrow F_1 = F_3.$$

2° La relation $\mathfrak{R}$ exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (parallèles ou confondues) est une relation d'équivalence car :

D_1 a même direction que D_1; $D_1 \parallel D_2 \Longrightarrow D_2 \parallel D_1$ et $D_1 \parallel D_2$, $D_2 \parallel D_3 \Longrightarrow D_1 \parallel D_3$.

3° Par contre, la relation d'orthogonalité entre deux droites de l'espace n'est pas une relation d'équivalence car une droite n'est pas orthogonale à elle-même, et les relations $D_1 \perp D_2$, $D_2 \perp D_3$ n'entraînent pas obligatoirement $D_1 \perp D_3$.

Deux éléments a et b de l'ensemble E *liés par la relation d'équivalence* $\mathfrak{R}$ *sont dits équivalents, modulo* $\mathfrak{R}$.

7. Classes d'équivalence. — ***L'ensemble*** E ***étant muni d'une relation d'équivalence*** $\mathfrak{R}$, ***on appelle classe d'équivalence de l'élément*** a, ***l'ensemble*** C_a ***de tous les éléments de*** E ***équivalents à*** a ***modulo*** $\mathfrak{R}$.

1° Tout élément x de E appartient à une classe d'équivalence C_x car $x \mathfrak{R} x$.

2° Deux classes d'équivalence qui ont un élément commun sont confondues.

En effet, si $x \in C_a$ et $x \in C_b$ les relations $x \mathfrak{R} a$ et $x \mathfrak{R} b$ entraînent par symétrie et transivité : $a \mathfrak{R} b$, soit $C_a = C_b$.

3° Si a et b ne sont pas équivalents modulo $\mathfrak{R}$, les classes d'équivalence C_a et C_b ne peuvent posséder d'élément commun x, sinon elles seraient confondues, ce qui entraînerait $a \mathfrak{R} b$, contraire à l'hypothèse.

La relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ permet donc d'effectuer une partition de E en sous-ensembles disjoints C_a, C_b, C_c ... dont la réunion est l'ensemble E.

L'ensemble des classes d'équivalence de E ***modulo*** $\mathfrak{R}$ ***est appelé l'ensemble quotient de*** E ***par*** $\mathfrak{R}$ ***et s'écrit*** $\frac{E}{\mathfrak{R}}$.

Exemple. — Soit E l'ensemble des droites de l'espace et soit $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence exprimant que deux droites de l'espace ont même direction (n° 6, exemple 2).

Toutes les droites de même direction qu'une droite donnée D_1 constituent la classe d'équivalence C_1 définie par D_1 (ou par l'une de ses parallèles).

Si D_1 et D_2 n'ont pas même direction, elles définissent deux classes disjointes, C_1 et C_2 ne possédant aucun élément commun.

L'ensemble des classes d'équivalence C_1, C_2, C_3 ... est l'ensemble quotient $\frac{E}{\mathfrak{R}}$ qui n'est autre que l'ensemble des directions de l'espace.

8. Relations d'ordre. — 1° ***Une relation binaire*** $\mathfrak{R}$ ***dans un ensemble*** E ***est une relation d'ordre au sens strict si elle est transitive, mais non réflexive, et non symétrique.***

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $<$ définit une relation d'ordre strict : car $a < b$ et $b < c \Longrightarrow a < c$: la relation est transitive.

Mais on n'a pas $a < a$ et $a < b$ exclut $b < a$ ou $b = a$: la relation n'est ni réflexive, ni symétrique.

De même parmi les sous-ensembles d'un ensemble E la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre strict.

2° ***Une relation binaire*** $\mathfrak{R}$ ***dans un ensemble donné*** E ***est une relation d'ordre au sens large si elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.***

Dans l'ensemble des nombres relatifs, le symbole $\leqslant$ définit une relation d'ordre large.

En effet : $a \leqslant a$ (reflexivité)
$a \leqslant b$ et $b \leqslant a \Longrightarrow a = b$ (antisymétrie)
$a \leqslant b$ et $b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$ (transitivité).

De même le symbole $\subseteq$ définit une relation d'ordre au sens large (n° 2).

9. Ensemble ordonné. — ***Un ensemble* E *dans lequel est définie une relation d'ordre* $\mathfrak{R}$ *est dit ordonné.***

On peut en effet classer dans un ordre déterminé tous les éléments d'un sous-ensemble de E lorsque ces éléments sont deux à deux comparables par $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire vérifient soit $a \mathfrak{R} b$ soit $b \mathfrak{R} a$.

Ainsi les relations $a \mathfrak{R} c$, $d \mathfrak{R} b$ et $c \mathfrak{R} d$ permettent d'écrire : $a \mathfrak{R} c \mathfrak{R} d \mathfrak{R} b$ d'où le classement ou l'ordre : a, c, d, b.

1° Lorsque deux éléments distincts quelconques d'un ensemble E sont comparables par une relation d'ordre (strict ou large), cette relation $\mathfrak{R}$ est dite d'*ordre total* et l'ensemble E est dit *totalement ordonné*.

Il en est ainsi de l'ensemble des nombres relatifs par la relation $<$ (ou $\leqslant$), d'un ensemble d'événements historiques par l'ordre chronologique, de l'ensemble des mots du dictionnaire par l'ordre alphabétique. Ce dernier exemple permet de voir qu'une modification de la relation d'ordre $\mathfrak{R}$ (ici l'ordre des lettres de l'alphabet) entraînerait un bouleversement complet de l'ordre des mots dans le dictionnaire.

2° Lorsque deux éléments distincts de E ne sont pas nécessairement comparables par $\mathfrak{R}$, cette relation est dite d'*ordre partiel* et l'ensemble E est dit *partiellement ordonné*.

Ainsi dans l'ensemble N des entiers naturels la relation $\mathfrak{R}$ qui exprime que a est *un diviseur de* b, est une relation d'ordre large qui permet de classer 3, 6, 24, 120, 240 ou 1, 7, 21, 42, 126 mais qui ne permet pas de comparer 3 et 7 ou 11 et 25. Ce n'est qu'une relation d'ordre partiel.

APPLICATIONS ET FONCTIONS

10. Notion d'application. — ***On appelle application d'un ensemble* A *dans un ensemble* B, *toute correspondance qui, à tout élément de* A, *associe un élément unique de* B.**

Cette correspondance est symbolisée par une lettre T, f ... et :

$$\forall a \in A, \quad \exists b \in B \quad \text{tel que} \quad b = T(a) \quad \text{ou} \quad b = f(a).$$

On écrit : $a \multimap b = f(a)$ ou $a \underset{\rightarrow}{f} b$ et on lit : « a s'applique sur b ».

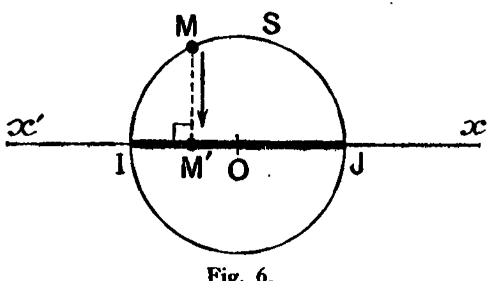


Fig. 6.

(Éviter d'écrire $a \longrightarrow b$ s'il peut y avoir confusion avec « a tend vers b »).

L'ensemble A est l'*ensemble initial* et l'ensemble B *l'ensemble final* de l'application.

Lorsque l'ensemble B est confondu avec A on a affaire à une application de A sur lui-même.

L'élément a est l'*antécédent* de b et l'élément b est l'*image de* a dans B.

EXEMPLE — Soit A l'ensemble des points M du cercle de diamètre IJ (fig. 6) et B l'ensemble des points M' de la droite $x'x$ définie par IJ. La projection orthogonale T de M en M' sur $x'x$ est une application de A dans B et : $M \multimap M' = T(M)$.

11. Injection. — Surjection.

1° ***Une application «f» de* A *dans* B *est dite injective lorsque deux éléments distincts de* A *ont des images distinctes dans* B** (fig. 7).

$$\forall a_1, a_2 \in A : \quad a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Tout élément b de B est au plus l'image d'un élément a de A.

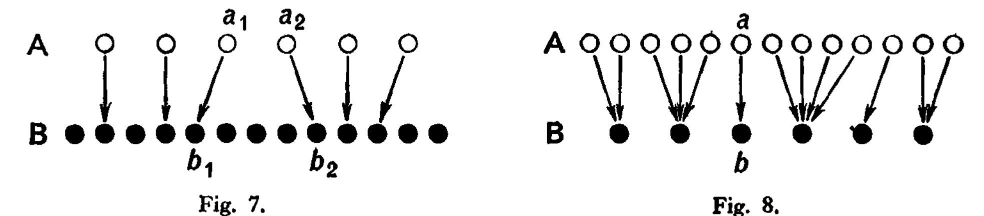


Fig. 7. Fig. 8.

2° ***Elle est dite surjective lorsque tout élément de* B *est l'image d'au moins un élément de* A. *On dit alors que* A *s'applique sur* B** (fig. 8).

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tel que : } \quad b = f(a).$$

Ainsi la projection orthogonale sur la droite $x'x$ (fig. 6) réalise une application injective, non surjective, du demi-cercle ISJ sur la droite $x'x$. Par contre elle réalise une application surjective, non injective, du cercle entier de diamètre IJ sur le segment de droite IJ.

12. Bijection. — ***Une application «f» de* A *dans* B *est dite bijective (ou biunivoque) si tout élément de* B *est l'image d'un élément unique de* A** (fig. 9).

$$\forall b \in B, \exists a \in A \quad \text{tel que} \quad b = f(a)$$

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Longleftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

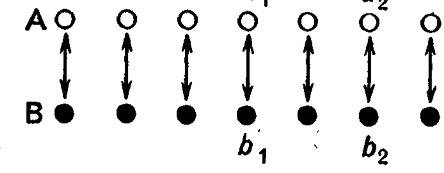


Fig. 9.

Une application bijective ou *bijection* de A sur B est donc une application à la fois surjective et injective de A dans B.

Ainsi (fig. 6) la projection orthogonale sur $x'x$ réalise une bijection du demi-cercle ISJ sur le segment IJ.

13. Bijections réciproques. — ***Toute bijection «f» d'un ensemble* A *sur un ensemble* B *définit une bijection «φ» de* B *sur* A. *Les deux bijections associées «f» et «φ» sont dites inverses ou réciproques.***

L'application «f» étant bijective, tout élément b de B admet un antécédent unique a dans A. La correspondance $b \multimap a$ ainsi réalisée définit une application «φ» de B dans A (n° 10). Comme tout élément a de A est ainsi l'image de l'élément unique $f(a)$ de B, cette application «φ» est bijective (n° 12). Donc :

$$a \multimap b = f(a) \Longleftrightarrow b \multimap a = \varphi(b).$$

On dit qu'il y a une *correspondance bijective* entre les éléments de l'ensemble A et ceux de l'ensemble B, ce qui s'écrit : $a \leftrightarrow b$.

Notons qu'on appelle *application identique* $\mathfrak{I}_A$ l'application bijective de tout ensemble A sur lui-même dans laquelle chaque élément a coïncide avec son image.

14. Composition des applications. — Considérons une application « f » de A dans B et une application « g » de B dans C.

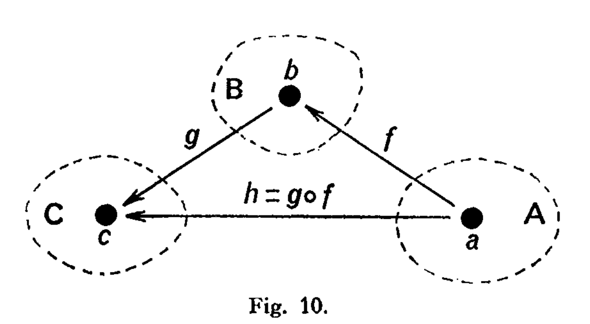


Fig. 10.

A tout élément a de A, on peut successivement associer l'élément $b = f(a)$ de B puis l'élément $c = g(b) = g[f(a)]$ de C. La correspondance a -⊖• c ainsi réalisée définit une application « h » de A dans C. On écrit :

$$c = h(a) = g[f(a)]$$

ou

$$\boxed{h(a) = g_{\circ}f(a)}$$

ce qui revient à poser (fig. 10) :

$$h = g_{\circ}f.$$

L'application $h = g_{\circ}f$ est le produit des applications « f » et « g » effectuées dans cet ordre.

Exemple. — Soient deux plans rectangulaires P et Q issus de la droite Δ (fig. 11). Désignons par f, g et h les projections orthogonales d'un point M de l'espace, respectivement en H sur P, en K sur Q et en N sur Δ. On voit que :

M -⊖• H $= f$(M) -⊖• N $= g$(H) $= g_{\circ}f$(M) $= h$(M)
M -⊖• K $= g$(M) -⊖• N $= f$(K) $= f_{\circ}g$(M) $= h$(M).

Il en résulte que : $h = f_{\circ}g = g_{\circ}f$. Le produit des deux applications f et g de l'ensemble E des points de l'espace sur P et Q est donc commutatif.

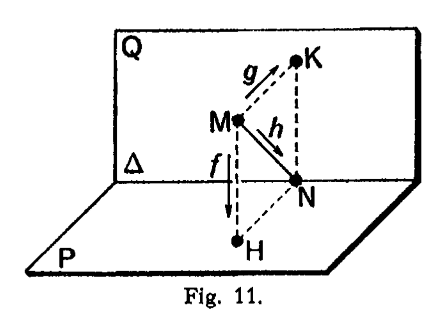


Fig. 11.

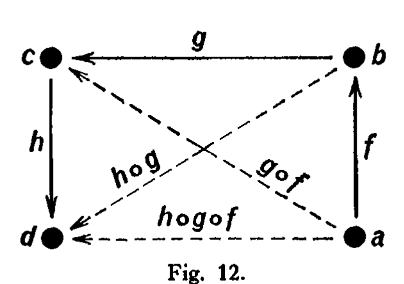


Fig. 12.

Lorsque les applications « f » et « g » sont deux bijections réciproques de A sur A, leur produit est l'application identique : $f_{\circ}g = g_{\circ}f = \mathfrak{I}_A$.

C'est pourquoi l'application réciproque de « f » est symbolisée par « f^{-1} »

$$f^{-1}{}_{\circ}f = f_{\circ}f^{-1} = \mathfrak{I}_A.$$

Un produit de plusieurs applications est toujours associatif. Ainsi (fig. 12) :

$$a \text{ -⊖• } b = f(a) \text{ -⊖• } c = g\,[f(a)] \text{ -⊖• } d = h\ \{g\,[f(a)]\}$$

On peut d'autre part écrire : $d = h(c) = h\,[g_{\circ}f(a)]$ ou $d = h_{\circ}g(b) = h_{\circ}g\,[f(a)]$.

Ce qui conduit à écrire : $h_{\circ}g_{\circ}f = h_{\circ}(g_{\circ}f) = (h_{\circ}g)_{\circ}f$.

15. Notion de fonction d'une variable. — ***On appelle fonction définie dans un ensemble* A *et à valeurs dans un ensemble* B, *toute relation* f *qui, à tout élément* x *de* A *fait correspondre au plus un élément* y *de* B.**

L'ensemble A′ des éléments x de A qui ont effectivement un correspondant y dans B est le *domaine de définition de la fonction f*. L'élément x est la *variable* et $f(x)$ la valeur correspondante de la fonction. Donc :

$$\forall x \in A' \subseteq A, \ \exists y \in B \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$

***La fonction « f » définit donc une application de son domaine de définition* A′ *dans l'ensemble* B.**

Si A′ = A on dit que la *fonction f est définie sur* A.

Exemples. — 1° Les relations $y = x^2$, $y = \sin x$ caractérisent des fonctions de x, définies sur l'ensemble R des nombres réels et à valeurs dans R.

2° L'égalité $y = \sqrt{x} - 1$ caractérise une fonction définie sur R^+ et à valeurs dans R.

3° La relation $\overrightarrow{OM} = M(t)$ définit un vecteur fonction du temps t et par suite le mouvement du point M dans l'espace.

16. Fonctions inverses ou réciproques. — Si la fonction $y = f(x)$ traduit une correspondance bijective entre les éléments x de A et les éléments y de B, cette correspondance détermine également une fonction « φ » telle que $x = \varphi(y)$, définie dans B et à valeurs dans A, appelée *fonction inverse* ou *fonction réciproque* de la fonction « f ».

$$x \leftrightarrow y \iff y = f(x) \iff x = \varphi(y) \quad \text{ou} \quad x = f^{-1}(y).$$

Exemple. — La fonction $y = \sin x$ définie sur le segment $A = \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ et à valeurs dans $B = [-1; +1]$ réalise une application bijective de A sur B. A toute valeur y de B correspond une valeur x de A symbolisée par Arc sin y.

La fonction « Arc sinus » est la fonction inverse ou réciproque de la fonction « sinus ».

Le problème qui consiste à définir et étudier la fonction réciproque d'une fonction f donnée est appelé *inversion de la fonction* « f ». Notons que :

Si $y = f(x) \iff x = \varphi(y)$, on étudie alors la fonction : $y = \varphi(x)$.

17. Fonction composée d'une variable. — Soit $u = \varphi(x)$ une fonction définie sur A et à valeurs dans B, $y = f(u)$ une fonction définie sur B et à valeurs dans C. Le produit des applications φ et f est une application $f_0\varphi$ de A dans C, qui détermine une fonction F définie sur A et à valeurs dans C. Donc :

$$\forall x \in A, \ \exists u = \varphi(x) \in B \quad \text{et} \quad y \in C \quad \text{tels que} \quad y = f(u) = f[\varphi(x)] = F(x).$$

***La fonction* $F(x) = f[\varphi(x)]$ *est appelée fonction composée ou fonction de fonction de la variable* x.**

Exemple. — La fonction $u = x^2$ applique l'ensemble des réels R sur R^+ et la fonction, $y = \sin u$ applique R^+ sur le segment $A = [-1; +1]$. La fonction composée : $y = \sin(x^2)$ applique R sur A.

Notons que si « f » et « φ » sont deux fonctions réciproques, on a les identités : $f[\varphi(x)] \equiv x$ et $\varphi[f(x)] \equiv x$. Ainsi pour x et y éléments de l'ensemble R^+ des réels positifs et un entier naturel donné n, supérieur à 1 :

$$y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$$

On obtient en éliminant y ou x les identités :

$$x = \sqrt[n]{x^n} \quad \text{et} \quad y = (\sqrt[n]{y})^n$$

18. Fonction de plusieurs variables. — ***On appelle fonction de plusieurs variables toute relation qui, à un élément donné*** $(x_1, x_2, \dots x_n)$ ***du produit*** A ***des ensembles*** $A_1, A_2, \dots A_n$ ***fait correspondre au plus un élément*** y ***de l'ensemble*** B.

L'ensemble A' formé par les éléments $(x_1, x_2 \dots x_n)$ de A qui ont effectivement un associé dans B est le *domaine de définition* de la fonction f.

L'égalité $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ caractérise une fonction des variables x et y, définie dans R^2 et à valeurs dans R^+. Son domaine de définition est déterminé par l'inégalité : $x^2 + y^2 \leqslant 4$. C'est donc, dans un plan rapporté à un repère orthonormé Oxy, l'ensemble des points non extérieurs au cercle : $x^2 + y^2 = 4$ de centre O et de rayon 2.

Deux fonctions des mêmes variables f_1 *et* f_2 *sont équivalentes sur un ensemble donné* A si pour tout élément $(x_1, x_2 \dots x_n)$ de cet ensemble, elles sont toutes deux définies et ont même valeur dans B.

$$\forall (x_1, x_2 \dots x_n) \in A \Longrightarrow f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = f_2(x_1, x_2 \dots x_n).$$

Exemple. — Les fonctions $z_1 = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$ et $z_2 = x^2 + xy + y^2$ sont équivalentes pour tout couple (x, y), élément de R^2, tel que $x \neq y$.

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

19. Définition. — ***Étant donnés deux ensembles de points*** A ***et*** B, ***on appelle transformation ponctuelle de l'ensemble*** A ***dans l'ensemble*** B, ***toute correspondance*** T ***qui, à tout point*** M ***de*** A, ***associe un point unique*** M' ***de*** B.

La transformation ponctuelle T n'est autre qu'une *application* de l'ensemble ponctuel A dans l'ensemble ponctuel B. L'image M' de M est appelée le *transformé* ou l'*homologue* de M. On écrit :

$$M \xrightarrow{\quad T \quad} M' \quad \text{ou} \quad M' = T(M).$$

Les exemples d'applications géométriques vus aux nos 10 et 14 ne sont autres que des transformations géométriques ponctuelles.

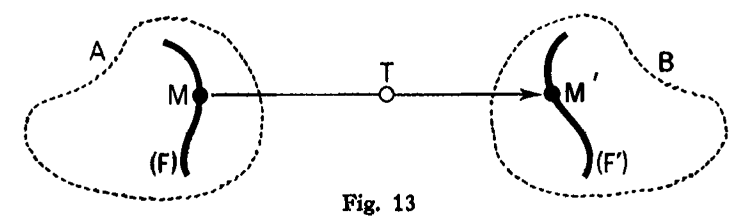


Fig. 13

Lorsque les ensembles A et B sont identiques, on dit que T est une transformation ponctuelle dans A (ou de A sur lui-même). On peut ainsi définir une *transformation dans le plan* ou une *transformation dans l'espace*.

L'ensemble des transformés par T des différents points M d'une figure F est une figure F' appelée *transformée* ou *homologue* de la figure F dans la transformation ponctuelle T (fig. 13).

Deux transformations ponctuelles T *et* T' *sont équivalentes* si tout point M a même transformé dans T et T' :

$$\forall M \in A \implies M' = T(M) = T'(M). \qquad \text{On écrit : } T = T'.$$

20. Éléments invariants. — 1° Tout point M qui coïncide avec son homologue M' dans une transformation ponctuelle T est un *point double* de T ou un *point invariant* par T.

On appelle transformation identique la transformation ponctuelle I ***dans laquelle tout point*** M ***de l'espace (ou du plan) est invariant.***

$$\forall M \in (E) \text{ ou } (P) : M = I(M).$$

2° Toute figure F qui coïncide avec sa transformée F' dans T est dite invariante dans T. La figure F est *invariante point par point* lorsque chacun de ses points est invariant. Elle est *globalement invariante* ou invariante dans son ensemble lorsque ses différents points s'échangent entre eux.

21. Transformations réciproques. — *Une transformation ponctuelle* T *de* A *dans* B *est dite bijective si tout point* M' *de* B *est le tranformé d'un point unique* M *de* A.

Une telle transformation est donc à la fois injective et surjective :

$$M_1 \neq M_2 \implies M'_1 = T(M_1) \neq M'_2 \neq T(M_2) \qquad (\textit{injection})$$

$$\forall M' \in B, \exists M \in A \text{ tel que : } M' = T(M) \qquad (\textit{surjection})$$

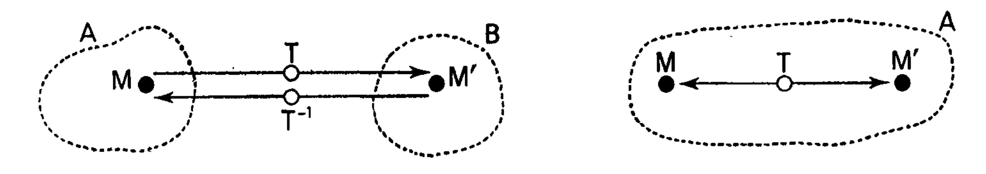


Fig. 14. Fig. 15.

Toute transformation bijective T ***de*** A ***dans*** B ***définit une transformation bijective de*** B ***dans*** A ***appelée transformation réciproque de*** T ***et notée*** T^{-1}.

En effet à tout point M' de B correspond un point unique M de A tel que M' = T(M) et réciproquement (fig. 14) :

$$M' = T(M) \iff M = T^{-1}(M')$$

Les deux bijections T et T^{-1} sont dites réciproques l'une de l'autre. Ainsi les translations de vecteurs $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ sont réciproques.

Une transformation T ***d'un ensemble ponctuel*** A ***en lui-même est dite involutive lorsque tout point*** M ***est le transformé de son homologue*** M'.

$$\forall M \in A; \quad M' = T(M) \implies M = T(M').$$

Une telle transformation T est donc bijective et coïncide avec sa transformation réciproque (fig. 15) : $T^{-1} = T$.

Toute symétrie par rapport à un point, une droite ou un plan est une transformation involutive.

22. Produit de transformations ponctuelles. — Soient T_1 une transformation de A dans B et T_2 une transformation de B dans C (fig. 16) :

$$\forall M \in A, \exists M_1 \in B \text{ et } M_2 \in C \text{ tels que } M_1 = T_1(M) \text{ et } M_2 = T_2(M_1).$$

On fait ainsi correspondre à tout point M de A un point unique M_2 de C. On définit donc (nº 19) une *transformation* T *de* A *dans* C, *appelée produit des transformations* T_1 *et* T_2. On écrit :

$$M_2 = T(M) = T_2[T_1(M)] \iff M_2 = T_2 \circ T_1(M) \text{ et } T = T_2 \circ T_1$$

On dit que le produit $T = T_2 \circ T_1$ des transformations ponctuelles T_1 et T_2, effectuées dans cet ordre, est une loi de composition interne dans l'ensemble des transformations ponctuelles.

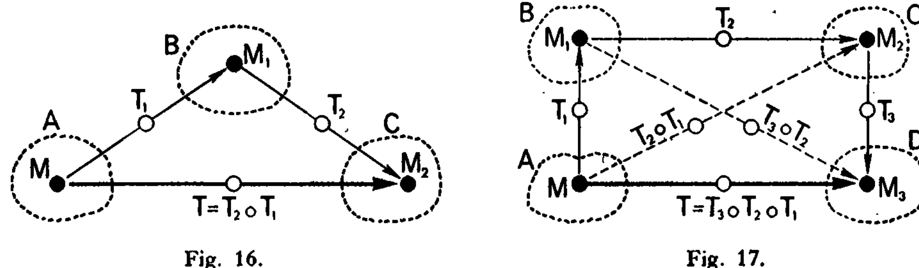


Fig. 16. Fig. 17.

De même le produit $T_3 \circ T_2 \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$ est le produit des transformations $T_2 \circ T_1$ et T_3; le produit $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ est le produit des transformations $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ et T_4, etc.

23. Propriétés. — 1º *Un produit de transformations est toujours associatif* car il en est ainsi d'un produit d'applications. Donc (fig. 17) :

$$T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$$

Il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs transformations consécutives par leur produit ou inversement de remplacer une transformation par un produit équivalent.

2º *Le produit des transformations* T_1 *et* T_2 *est commutatif si* : $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.

Il en est ainsi des projections orthogonales d'un point M de l'espace sur deux plans rectangulaires P et Q (nº 14).

3º Dans l'ensemble des transformations ponctuelles de l'espace (ou du plan) *la transformation identique* I *est l'élément neutre dans l'opération produit* :

$$\forall T : I \circ T = T \circ I = T$$

4º *Le produit de deux transformations réciproques* T *et* T^{-1} *est la transformation identique :*

$$M' = T(M) \text{ et } M = T^{-1}(M') \implies T^{-1} \circ T(M) = M \text{ et } T \circ T^{-1}(M') = M'$$

Donc : $$T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I.$$

Il en résulte que si T est une transformation involutive :

$$\forall M : T \circ T(M) = M \implies T \circ T = T^2 = I.$$

Si T_1 et T_2 sont deux transformations bijectives il en est de même de $T = T_2 \circ T_1$, car :

$$(T_2 \circ T_1).(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) = T_2 \circ I \circ T_2^{-1} = I.$$

La transformation réciproque de $T_2 \circ T_1$ est donc $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

EXERCICES

1. Démontrer les implications suivantes :

1° $A \subset B \Longrightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $(A \cup C) \subset (B \cup C)$

2° $A \subset B$ et $C \subset D \Longrightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$ et $(A \cup C) \subset (B \cup D)$

3° $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ et $(A \cup C) \subset (B \cup C) \Longrightarrow A \subset B$.

2. On appelle *différence de deux ensembles* A *et* B pris dans cet ordre, l'ensemble, noté $A - B$, des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

1° Comparer $A - B$ et $B - A$. Établir que $B \subset A \Longrightarrow A - B = C_A(B)$.

2° $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A \cap (A - B)$.

3. Établir les relations :

1° $A \cap B = A - (A - B)$ ou $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.

2° $A \cup B = A \cup (B - A)$ ou $(A \cup B) - (B - A) = A$.

4. 1° Montrer que la différence $A - (B \cup C)$ est formée des éléments de A qui n'appartiennent ni à B, ni à C.

2° $A - (B \cup C) = (A - B) - C = (A - C) - B$ et s'écrit : $A - B - C$.

5. Établir les relations :

1° $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

2° $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

3° $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

6. Soient A et B deux sous-ensembles de E admettant dans E les compléments :

$$\overline{A} = E - A \quad \text{et} \quad \overline{B} = E - B.$$

1° Démontrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2° En déduire que : $E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)$

$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

3° Pouvait-on prévoir ces résultats d'après l'exercice précédent ?

7. *La différence symétrique de deux ensembles* A *et* B est l'ensemble, noté $A \Delta B$ ou $B \Delta A$, des éléments appartenant à un et un seul des ensembles A et B.

1° $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2° $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

3° $(A \Delta B) - C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$.

8. Sur l'ensemble $\mathcal{P}_{(E)}$ on définit une relation binaire :

$$A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow A \Delta B \text{ contient un nombre pair d'éléments.}$$

Montrer que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence.

9. 1° Établir que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ noté $A \triangle B \triangle C$ est l'ensemble des éléments appartenant à un seul ou aux trois ensembles A, B et C. En déduire que $A \triangle B \triangle C$ est la réunion de $A - (B \cup C)$, $B - (C \cup A)$, $C - (A \cup B)$ et $A \cap B \cap C$.

2° Montrer que $D = (A \cup B \cup C) - (A \triangle B \triangle C)$ est l'ensemble des éléments communs à deux et deux seulement des ensembles A, B, C. En déduire que D est la réunion des trois ensembles

$$(B \cap C) - A, \quad (C \cap A) - B \quad \text{et} \quad (A \cap B) - C.$$

10. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 des transformations bijectives de l'espace (ou du plan).

1° Montrer que si le produit $T_1 o T_2 o T_3 o T_4$ est la transformation identique I il en est de même des produits $T_2 o T_3 o T_4 o T_1$, $T_3 o T_4 o T_1 o T_2$ et $T_4 o T_1 o T_2 o T_3$.

2° Que peut-on alors dire du produit $T_4^{-1} o T_3^{-1} o T_2^{-1} o T_1^{-1}$ des transformations inverses.

LOIS DE COMPOSITION

24. Loi de composition interne. — ***Étant donné un ensemble*** **E*, toute application de*** **E^2** ***dans*** **E*, définit une loi de composition interne dans*** **E.**

A tout couple ordonné (a, b) d'éléments de E, distincts ou non, on fait ainsi correspondre un élément unique c de E. L'élément c est le composé des éléments a et b pris dans cet ordre. On écrit :

$$\boxed{a \star b = c}$$

L'addition des vecteurs, le produit de deux transformations géométriques sont des opérations internes sur l'ensemble des vecteurs ou des transformations géométriques.

Le signe opératoire $\star$ (ou $\perp$, $\llcorner$, $\div$ $\wedge$, $\vee$...) est le signe $+$ dans le cas d'une addition, le signe $\times$ ou . dans le cas d'une multiplication. Dans l'ensemble $\mathcal{P}_{(E)}$ des parties de E les symboles $\cup$ et $\cap$ définissent des opérations internes.

On peut, dans le cas d'un ensemble fini, établir une *table de composition* permettant de retrouver instantanément le composé de deux éléments.

Exemples. — Désignons par I, R et S les rotations planes de centre O donné et d'angles respectifs 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ (en rd, mod 2π) et soit $\star$ le signe opératoire du produit de deux rotations de cet ensemble. On obtient : $I \star R = R$, $R \star R = S$, $R \star S = I$ etc. On peut alors dresser le tableau de la figure 18.

De même si, dans le plan, I et S désignent les rotations (O, 0) et (O, π), X et Y les symétries d'axes Ox et Oy tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$, on obtient le tableau de la figure 19.

Dans le cas d'un ensemble illimité E, on ne peut établir la table de composition que pour les premiers éléments. Pour l'ensemble des entiers naturels on connaît ainsi la table de multiplication (ou de Pythagore) pour les premiers entiers.

— Une opération interne peut être réitérée sur des éléments a, b, c, d de E.

On écrit : $(a \star b) \star c = a \star b \star c$, $(a \star b \star c) \star d = a \star b \star c \star d$, etc.

en se rappelant que les opérations successives s'effectuent dans l'ordre des éléments.

25. Loi de composition externe. — ***Étant donnés deux ensembles*** E ***et*** K ***toute application de l'ensemble produit*** K × E ***dans*** E, ***définit une loi de composition externe dans*** E ***admettant*** K ***pour champ d'opérateurs.***

A tout élément (α, a) de K × E, on fait ainsi correspondre un élément unique b de E. Le composé b de α et a, s'écrit le plus souvent sous forme de produit :

$$b = a \times \alpha \quad \text{ou} \quad b = \alpha \times a \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{b = \alpha a}$$

Ainsi en Géométrie on envisage le produit $\vec{U}$ d'un vecteur libre $\vec{V}$ par un nombre relatif k donné. On écrit :

$$\vec{U} = k\vec{V}.$$

Une opération externe dans E peut être réitérée pour des éléments α, β, γ du champ d'opérateurs K :

$$b = \alpha a \quad \text{entraîne} \quad c = \beta b = \beta(\alpha a), \qquad d = \gamma c = \gamma\,[\beta\,(\alpha a)]...$$

26. Propriétés. — 1° ***Une loi de composition interne est associative si :***

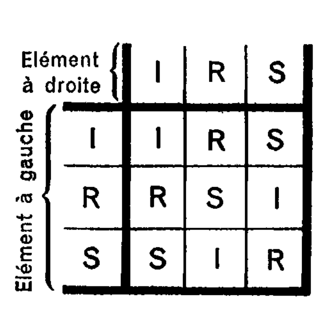
$$\forall\, a, b, c \in E : \qquad \boxed{(a \star b) \star c = a \star (b \star c)}$$

Dans ce cas l'égalité : $[(a \star b) \star c] \star d = [a \star (b \star c)] \star d$

entraîne : $$a \star b \star c \star d = a \star (b \star c) \star d = a \star (b \star c \star d).$$

Dans une opération interne associative portant sur plusieurs éléments, on peut remplacer deux ou plusieurs termes consécutifs par leur composé.

Il en est ainsi du produit de plusieurs transformations géométriques. On peut le vérifier sur les tables (fig. 18 et 19).



Elément à droite / Elément à gauche	I	R	S
I	I	R	S
R	R	S	I
S	S	I	R

Fig. 18.

	I	S	X	Y
I	I	S	X	Y
S	S	I	Y	X
X	X	Y	I	S
Y	Y	X	S	I

Fig. 19.

2° ***Une loi de composition interne est commutative si :***

$$\forall\, a, b \in E \qquad \boxed{a \star b = b \star a}$$

Dans ce cas la table de composition est symétrique par rapport à la diagonale principale (descendante de gauche à droite). Il en est ainsi du produit de deux rotations de même centre. Par contre le produit de deux rotations de centres distincts n'est pas commutatif.

Lorsqu'une loi de composition interne est à la fois associative et commutative, le composé de plusieurs éléments est indépendant de leur ordre.

$$a \star b \star c \star d = a \star (b \star c) \star d = a \star (c \star b) \star d = a \star c \star b \star d.$$

On peut donc échanger deux termes consécutifs et par suite amener chaque élément à une place fixée à l'avance : $a \star b \star c \star d = c \star a \star d \star b.$

3° ***Une loi de composition interne notée $\star$ est distributive par rapport à une deuxième loi notée $+$, si quels que soient les éléments a, b, c de E :***

$a \star (b + c) = (a \star b) + (a \star c)$	*distributivité à gauche*
$(b + c) \star a = (b \star a) + (c \star a)$	*distributivité à droite*

On en déduit (en veillant à l'ordre des éléments) :

$$(a + b + c) \star (m + n) = (a \star m) + (b \star m) + (c \star m) + (a \star n) + (b \star n) + (c \star n).$$

Ainsi la multiplication des nombres relatifs est distributive par rapport à l'addition.

4° De même la multiplication d'un vecteur par un nombre est une opération externe doublement distributive par rapport à l'addition des nombres et à l'addition des vecteurs :

$$(\alpha + \beta + \gamma)\vec{V} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V} + \gamma\vec{V} \quad \text{et} \quad \alpha(\vec{U} + \vec{V}) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}.$$

27. Éléments particuliers.

1° ***Une loi de composition interne admet un élément neutre e si :***

$$\forall a \in E \qquad \boxed{a \star e = e \star a = a}$$

Il ne peut exister deux éléments neutres distincts e *et* e' sinon le composé $e \star e'$ *serait* égal à e' pour e neutre, à e pour e' neutre, ce qui donnerait $e' = e$.

Dans l'ensemble des nombres relatifs l'élément neutre est 0 pour l'addition, $+ 1$ pour la multiplication.

2° ***Deux éléments a et a' sont symétriques pour l'élément neutre e si :***

$$\boxed{a \star a' = a' \star a = e}$$

Dans une loi associative, un élément a admet au plus un symétrique a', car s'il en admettait un deuxième a'', l'égalité $a'' \star (a \star a') = (a'' \star a) \star a'$ donnerait $a'' \star e = e \star a'$ soit $a'' = a'$.

Deux éléments symétriques sont dits opposés dans une addition, inverses dans une multiplication.

3° ***Un élément a est dit régulier si quels que soient x et y :***

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \implies x = y & \textit{régularité à gauche.} \\ x \star a = y \star a \implies x = y & \textit{régularité à droite.} \end{cases}$$

On peut alors simplifier par a, toute égalité pouvant se ramener à l'une des deux formes ci-dessus. Ainsi lorsque la loi de composition $\star$ est associative :

$$a \star b \star c = a \star d \star f \implies a \star (b \star c) = a \star (d \star f) \implies b \star c = d \star f.$$

Lorsque cette loi est à la fois associative et commutative, on peut supprimer tout élément commun aux deux membres :

$$b \star a \star c = d \star a \star f \implies a \star (b \star c) = a \star (d \star f) \implies b \star c = d \star f.$$

28. Notion de structure. — ***On dit qu'un ensemble* E *est muni d'une structure algébrique, lorsqu'on a défini sur* E *une ou plusieurs lois de composition, internes ou externes.***

Les structures les plus usuelles que nous étudierons sont celles de groupe, d'anneau, de corps et d'espace vectoriel. Il suffit de montrer qu'un ensemble donné E admet une structure connue S pour en déduire que cet ensemble possède toutes les propriétés qui découlent de S.

29. Isomorphisme. — Considérons deux ensembles :

$$E = \{ x, x_1, x_2 \ldots\ldots \} \text{ muni d'une loi interne } \star;$$
$$F = \{ y, y_1, y_2 \ldots\ldots \} \text{ muni d'une loi interne } \div.$$

S'il existe une *application bijective* f de E sur F définie par $x \longmapsto y = f(x)$ et qui, au composé $x_1 \star x_2$ de deux éléments de E fait correspondre le composé $f(x_1) \div f(x_2)$ des éléments correspondants de F, on dit que f est un *isomorphisme* de E sur F :

Une application bijective f d'un ensemble* E *sur un ensemble* F *est un isomorphisme pour les lois de composition* ⋆ *de* E *et* ÷ *de* F *si :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad : \qquad f(x_1 \star x_2) = f(x_1) \div f(x_2).$$

Si on désigne par φ la bijection réciproque de F sur E, on peut aussi définir l'isomorphisme par les relations :

$$\forall y_1, y_2 \in F \qquad \varphi(y_1 \div y_2) = \varphi(y_1) \star \varphi(y_2).$$

Lorsque les deux lois de composition sont affectées du même symbole ⋆ on dit que E et F sont isomorphes pour la loi de composition ⋆.

EXEMPLES. — 1° Considérons l'ensemble E des entiers positifs x et l'ensemble E des puissances entières positives y du nombre 2. La relation $y = 2^x$ définit une bijection de E sur F et la relation $2^{(x_1+x_2)} = 2^{x_1} \times 2^{x_2}$ montre que cette application est un isomorphisme de E sur F pour l'addition dans E et la multiplication dans F.

2° Étant donné un axe Ox d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{i}$, l'égalité : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ définit une correspondance bijective entre l'ensemble E des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ de l'axe Ox et l'ensemble R des nombres réels x.

La relation : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x_1\vec{i} + x_2\vec{i} = (x_1 + x_2)\vec{i}$ montre qu'à la somme des vecteurs associés à x_1 et x_2 correspond le vecteur associé à $x_1 + x_2$. Les ensembles E et R sont isomorphes pour l'addition.

30. Théorème. — ***Les lois de composition associées dans un isomorphisme admettent les mêmes propriétés.***

1° *Si l'opération ⋆ est commutative sur* E, *l'opération associée ÷ est commutative sur* F.

Soient y_1 et y_2 les éléments de F correspondant par f à x_1 et x_2 de E :

$$y_1 \div y_2 = f(x_1) \div f(x_2) = f(x_1 \star x_2) = f(x_2 \star x_1) = f(x_2) \div f(x_1) = y_2 \div y_1.$$

2° *Si l'opération ⋆ est associative sur* E, *l'opération ÷ est associative sur* F :

$$(y_1 \div y_2) \div y_3 = [f(x_1) \div f(x_2)] \div f(x_3) = f(x_1 \star x_2) \div f(x_3) = f[(x_1 \star x_2) \star x_3]$$
$$y_1 \div (y_2 \div y_3) = f(x_1) \div [f(x_2) \div f(x_3)] = f(x_1) \div f(x_2 \star x_3) = f[x_1 \star (x_2 \star x_3)]$$

Les deux résultats sont égaux en vertu de l'hypothèse.

3° *Si l'opération ⋆ dans* E *admet l'élément neutre e, l'opération ÷ dans* F *admet l'élément neutre* $\varepsilon = f(e)$.

En effet :

$$\varepsilon \div y = f(e) \div f(x) = f(e \star x) = f(x) = y.$$
$$y \div \varepsilon = f(x) \div f(e) = f(x \star e) = f(x) = y.$$

4° *Si x et x' sont deux éléments symétriques dans* E, *leurs correspondants y et y' sont deux éléments symétriques dans* F.

$$y \dotplus y' = f(x) \dotplus f(x') = f(x \star x') = f(e) = \varepsilon.$$

Il résulte des propriétés précédentes qu'il est commode d'adopter le même symbole $\star$ pour les opérations associées dans un isomorphisme. On obtient alors la relation :

$$f(x_1 \star x_2) = f(x_1) \star f(x_2).$$

5° *La distributivité se conserve dans un isomorphisme.*

Supposons que l'ensemble E soit muni de deux lois de composition internes notées $+$ et $\star$, que l'isomorphisme f associe respectivement à deux lois notées également $+$ et $\star$ dans l'ensemble F. Donc :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{E} : \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_1 \star x_2) = f(x_1) \star f(x_2)$$

Si, dans E, la loi de composition $\star$ est distributive par rapport à l'addition, on obtient par exemple :

$$(x_1 + x_2) \star x_3 = (x_1 \star x_3) + (x_2 \star x_3).$$

Calculons : $(y_1 + y_2) \star y_3$, on obtient successivement :

$$[f(x_1) + f(x_2)] \star f(x_3) = f(x_1 + x_2) \star f(x_3) = f[(x_1 + x_2) \star x_3] =$$
$$f[(x_1 \star x_3) + (x_2 \star x_3)] = f(x_1 \star x_3) + f(x_2 \star x_3) = [f(x_1) \star f(x_3)] + [f(x_2) \star f(x_3)]$$

Donc : $(y_1 + y_2) \star y_3 = (y_1 \star y_3) + (y_2 \star y_3)$ *(distributivité à droite).*

On démontrerait de même que *(distributivité à gauche) :*

$$x_1 \star (x_2 + x_3) = (x_1 \star x_2) + (x_1 \star x_3) \Longrightarrow y_1 \star (y_2 + y_3) = (y_1 \star y_2) + (y_1 \star y_3).$$

31. Conséquence. — Il en résulte que si une ou plusieurs lois de composition confèrent à un ensemble E une structure donnée S, les lois associées dans tout isomorphisme de E sur F, confèrent à l'ensemble F, la même structure S.

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

32. Structure de groupe. — ***Un ensemble donné* E *admet une structure de groupe pour une loi de composition interne* L *notée* $\star$ *si :***

1° ***Cette loi est associative :*** $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

2° ***Cette loi admet un élément neutre*** e **:** $a \star e = e \star a = a$.

3° ***Tout élément*** a ***admet un symétrique*** a' **:** $a \star a' = a' \star a = e$.

L'élément neutre e est unique et chaque élément a n'admet qu'un seul symétrique a' (n° 20).

Un groupe est dit commutatif (ou abélien) si : $a \star b = b \star a$.

Les déplacements dans le plan forment un groupe non commutatif pour leur produit. L'ensemble des nombres relatifs a une structure de groupe abélien pour l'addition.

Un groupe est dit *additif* si la loi de composition du groupe est une addition, *multiplicatif* lorsque cette loi est une multiplication.

Lorsqu'un sous-ensemble A d'un groupe G admet lui-même une structure de groupe pour la loi L du groupe G, on dit que A *est un sous-groupe de* G. Ainsi dans le plan, le groupe abélien des translations est un sous-groupe du groupe (non abélien) des déplacements.

33. Propriétés. — 1° ***Tous les éléments d'un groupe sont réguliers.***

Quels que soient les éléments a, x, y du groupe G :

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \Longrightarrow a' \star a \star x = a' \star a \star y \Longrightarrow e \star x = e \star y \\ x \star a = y \star a \Longrightarrow x \star a \star a' = y \star a \star a' \Longrightarrow x \star e = y \star e. \end{cases}$$

Donc, dans les deux cas : $x = y$. D'où les équivalences :

$$\boxed{x = y} \iff \boxed{a \star x = a \star y} \iff \boxed{x \star a = y \star a}$$

2° ***Si a et b sont deux éléments donnés du groupe* G *il existe un élément unique x et un élément unique y tels que $x \star b = b \star y = a$.***

En effet : $x \star b = a \iff x \star b \star b' = a \star b' \iff x = a \star b'$

$b \star y = a \iff b' \star b \star y = b' \star a \iff y = b' \star a.$

Par suite :

3° ***Dans un groupe abélien il existe un élément unique $x = a \star b'$ tel que : $x \star b = b \star x = a$.***

La loi de composition L' qui associe à tout couple ordonné (a, b) du groupe abélien G l'élément unique $x = a \star b'$ est appelée *opération inverse* du groupe : c'est *la soustraction* dans un groupe additif, *la division* dans un groupe multiplicatif. Cette opération inverse est donc une loi de composition interne définie pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments distincts ou non du groupe abélien G.

34. Théorème. — ***Tout ensemble* F *isomorphe à un groupe* G *admet une structure de groupe.***

Soit f un isomorphisme de G sur F associant à la loi de composition $\star$ du groupe G, la loi de composition notée $\div$ sur F. D'après le n° 30 la loi $\div$ est associative, elle admet un élément neutre $\varepsilon = f(e)$ et tout élément y de F admet un opposé y' tel que $y \div y' = \varepsilon$.

La loi $\div$ confère donc à l'ensemble F une structure de groupe de même nature que le groupe G car si ce dernier est abélien, il en est de même de F, la loi $\div$ étant alors commutative, comme la loi $\star$ du groupe G.

35. Structure d'anneau. — ***On appelle anneau tout ensemble* A *muni de deux lois de composition interne telles que :***

1° ***La première loi, appelée addition, est une loi de groupe abélien.***

2° ***La seconde, appelée multiplication, est associative et distributive par rapport à la première.***

L'élément neutre pour l'addition est noté 0 (zéro) et le symétrique $\tilde{a}$ de tout élément a est appelé *opposé de a* et s'écrit $-a$. On voit ainsi que les éléments d'un anneau doivent vérifier les conditions suivantes :

1° *Structure de groupe additif abélien :*

α) Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$

β) Commutativité : $a + b = b + a$

γ) Élément neutre (ou nul) 0 : $a + 0 = 0 + a = a$

δ) Élément $\tilde{a}$ opposé à a : $a + \tilde{a} = \tilde{a} + a = 0.$

2° *Multiplication associative et distributive par rapport à l'addition :*

α) Associativité : $(ab)c = a(bc)$
β) Distributivité à gauche : $a(b + c) = ab + ac$
à droite : $(b + c)a = ba + ca$

L'anneau A est *commutatif* si : $ab = ba.$

Il est dit *unitaire* lorsque la multiplication admet un élément neutre appelé *unité* et noté 1 ou I : $a.I = I.a = a.$

Dans tout anneau A : $\begin{cases} ab = a(b+0) = ab + a.0 \\ ba = (b+0)a = ba + 0.a. \end{cases}$

Comme tout élément d'un groupe additif est régulier (nº 33) on obtient :

$$\forall a \in A : \quad a.0 = 0.a = 0.$$

Nous verrons que l'ensemble des entiers relatifs (4e leçon) est un anneau commutatif et unitaire. Il en est de même de l'ensemble des polynômes.

36. Structure de corps. — ***Un corps est un anneau* K *dans lequel l'ensemble* K* *des éléments non nuls a une structure de groupe pour la multiplication.***

Un corps est dit *commutatif* ou *gauche* suivant que la multiplication est commutative ou non. Dans cet ouvrage, nous n'emploierons le mot « corps » que dans le sens de *corps commutatif.* Dans un tel corps commutatif K :

1º *L'ensemble des éléments constitue un groupe additif abélien :*

α) Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$
β) Commutativité : $a + b = b + a$
γ) Élément nul 0 : $a + 0 = 0 + a = a$
δ) $\tilde{a}$ opposé de a : $a + \tilde{a} = \tilde{a} + a = 0.$

2º *L'ensemble* K* *des éléments non nuls forme un groupe multiplicatif abélien :*

α) Associativité : $(ab)c = a(bc)$
β) Commutativité : $ab = ba$
γ) Élément unité 1 : $a.1 = 1.a = a$
δ) a' inverse de a; $\forall a \neq 0;\ aa' = a'a = 1.$

3º *La multiplication est distributive par rapport à l'addition :*

$$(a + b + c)m = m(a + b + c) = am + bm + cm.$$

D'autre part, comme dans tout anneau : $a.0 = 0.a = 0$ et on peut définir une *soustraction* pour tout élément de K^2, une *division* pour tout élément de K × K* (nº 33, 3º). Nous verrons que l'ensemble R des nombres relatifs ou réels a une structure de corps commutatif. C'est pourquoi les règles de calcul relatives à un corps ne sont autres que les règles du calcul algébrique étudié dans les classes antérieures.

37. Structure d'espace vectoriel sur un corps K. — Les propriétés de l'ensemble des vecteurs libres du plan ou de l'espace (addition vectorielle, multiplication par un nombre, décomposition unique sur une base donnée) conduisent à la notion d'espace vectoriel. On envisage un ensemble E d'éléments $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ... appelés *vecteurs* et un corps commutatif K, d'éléments α, β, γ... appelés *scalaires.* Le corps K sera en général le corps R des nombres réels ou parfois le corps C des nombres complexes.

***Un ensemble* E *admet une structure d'espace vectoriel sur le corps commutatif* K, *lorsqu'on peut définir sur* E :**

1° *Une loi d'addition interne conférant à* E *une structure de groupe commutatif.*

2° *Une loi de multiplication externe par les scalaires du corps* K, *associative, doublement distributive par rapport à l'addition (dans* E *et dans* K*), et admettant l'élément unité du corps* K *pour élément neutre.*

L'espace vectoriel E satisfait donc aux conditions suivantes quels que soient les éléments $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ de E et les scalaires α, β, γ... du corps K :

1° *Addition vectorielle dans* E *(loi de groupe abélien) :*

a) Associativité : $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

b) Commutativité : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

c) Élément neutre $\vec{0}$: $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$.

d) $-\vec{A}$ opposé de $\vec{A}$: $(\vec{A}) + (-\vec{A}) = \vec{0}$.

2° *Multiplication par les scalaires du corps* K :

a) Associativité : $\beta(\alpha\vec{A}) = (\beta\alpha)\vec{A} = \alpha\beta\vec{A}$.

b) Double distributivité : $(\alpha + \beta)\vec{A} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{A}$

$\alpha(\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$.

c) Élément neutre 1 : $1.\vec{A} = \vec{A}.1 = \vec{A}$.

3° Compte tenu de la régularité dans un groupe abélien (n° 33) on en déduit que :

a) $\alpha\vec{A} = \alpha(\vec{A} + \vec{0}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{0} \implies \alpha\vec{0} = \vec{0}$.

b) $\alpha\vec{A} = (\alpha + 0)\vec{A} = \alpha\vec{A} + 0.\vec{A} \implies 0.\vec{A} = \vec{0}$.

c) Par suite : $\alpha\vec{A} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ ou $\vec{A} = 0$

car pour $\alpha \neq 0$ et $\alpha\alpha' = 1$ l'égalité $\alpha\vec{A} = \vec{0}$ entraîne :

$$\alpha'\alpha\vec{A} = \alpha'\vec{0} = \vec{0} \iff \vec{A} = 0$$

Il résulte de la définition que : $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$... désignant des éléments de l'espace vectoriel E, et α, β, γ des scalaires du corps K, toute combinaison linaire : $\vec{U} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$ est un élément de E.

38. Remarque. — Nous surmontons d'une flèche les éléments de l'ensemble vectoriel E pour rappeler l'origine géométrique de la structure de cet espace. La flèche sera évidemment supprimée pour des ensembles de tout autre nature.

Ainsi l'ensemble des nombres de la forme $x + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}$ où x, y, z désignent des nombres rationnels a une structure d'espace vectoriel sur le corps Q des nombres rationnels. On écrira par exemple :

$$A = a + a'\sqrt{3} + a''\sqrt{5}; \qquad B = b + b'\sqrt{3} + b''\sqrt{5} \qquad \text{etc.}$$

39. Dimension d'un espace vectoriel. — Un espace vectoriel E est de dimension n s'il est possible de trouver, parmi les éléments de E, un système de n vecteurs : $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... $\vec{e}_n$ tel que tout vecteur $\vec{X}$, élément de E, puisse s'exprimer d'une *façon unique* sous la forme :

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n \quad \text{ou} \quad \vec{X} = \sum_1^n x_i\vec{e}_i$$

L'ensemble des n vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ constitue une *base* $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \}$ de l'espace vectoriel qui sera désigné par E_n.

Les n coefficients $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont les composantes scalaires ou coordonnées du vecteur $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On désigne le vecteur par la notation $\vec{X}(x_i) = \vec{X}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ou simplement par $(x_1, x_2 \ldots x_n)$.

La base $\mathcal{B}$ étant connue, on voit ainsi que tout vecteur d'un espace vectoriel E_n sur le corps K, correspond bijectivement à un élément de K^n.

40. Propriétés. — Considérons dans l'espace vectoriel E_n rapporté à la base $\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n \}$ les vecteurs $\vec{A}(a_1, a_2 \ldots a_n)$, $\vec{B}(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $\vec{C}(c_1, c_2, \ldots c_n)$ etc.

1° La décomposition d'un vecteur étant unique, l'égalité $\vec{A} = \vec{B}$ se traduit par les n égalités scalaires ; $a_i = b_i$ soit :

$$\vec{A} = \vec{B} \iff a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad \ldots \quad a_n = b_n.$$

2° Les propriétés de l'addition vectorielle et de la multiplication par les scalaires du corps K montrent que :

$\vec{U} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} = \sum_1^n (\alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i)\vec{e}_i$, ce qui équivaut aux n égalités scalaires : $u_i = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$.

On en déduit que :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \iff a_1 + b_1 = c_1; \quad a_2 + b_2 = c_2; \quad \ldots \quad a_n + b_n = c_n$$
$$\vec{A} = \lambda\vec{B} \iff a_1 = \lambda b_1; \quad a_2 = \lambda b_2; \quad \ldots \quad a_n = \lambda b_n.$$

Le vecteur $\vec{0}$ étant l'élément neutre de l'addition vectorielle : $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$, on en déduit que ses composantes sont toutes nulles. Donc :

$$\vec{X} = \vec{0} \iff x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad \ldots \quad x_n = 0.$$

41. Exemples. — 1° Tout vecteur libre de l'espace rapporté au repère cartésien $Oxyz$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'écrit d'une façon unique :

$$\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

L'ensemble de ces vecteurs libres est un espace vectoriel E_3 à trois dimensions.

Dans le plan xOy, on obtient un espace E_2 à deux dimensions et sur un axe Ox, un espace vectoriel à une dimension.

2° Tout polynôme réel P_n a une indéterminée X, de degré n s'écrit en posant $X^0 = I$, et ceci d'une façon unique :

$$P_n = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Un tel polynôme peut donc être considéré comme un élément $(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ d'un espace vectoriel E_{n+1} (à $n + 1$ dimensions) sur le corps R des nombres réels rapporté à la base $\mathcal{B} = \{ I, X, X^2 \ldots X^n \}$.

3° Par contre l'ensemble de tous les polynômes à une indéterminée X constitue un espace vectoriel de dimension infinie et dont la base est illimitée : $\mathcal{B} = \{ I, X, X^2, \ldots X^n \ldots \}$.

Pour désigner un polynôme de degré n, de cet ensemble, on écrit :

$$P_n = \{ a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, 0, 0 \ldots \}$$

pour indiquer que les composantes venant après a_n sont toutes nulles.

EXERCICES

11. Soient A, B, C, des sous-ensembles de E. On pose par définition : $\overline{A} = E - A = \complement_E A$ puis

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \qquad \text{et} \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

1° Montrer que les deux symboles $\cap$ et $\cup$ définissent deux lois de composition internes dans $\mathcal{P}_{(E)}$. Montrer qu'elles sont toutes deux associatives, commutatives et qu'elles admettent chacune un élément neutre.

2° A quelles conditions peut-on définir X et $Y \subset E$ tels que $A = B \cap X$ ou $A = B \cup Y$. En déduire qu'aucun sous-ensemble A n'admet de symétrique pour les lois $\cap$ ou $\cup$.

3° Démontrer les relations $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ et en déduire que les propriétés de l'une des lois $\cap$ ou $\cup$ sont conséquences de celles de l'autre.

12. Les notations étant les mêmes qu'à l'exercice précédent, démontrer que dans $\mathcal{P}_{(E)}$:

1° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Vérifier que la distributivité de l'une des lois $\cap$ ou $\cup$ par rapport à l'autre se vérifie sur les compléments dans E.

2° Calculer $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ et $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

3° Démontrer que $A - A \cap B = A \cup B - B$ et que $A \cup B = (A - A \cap B) \cup B = (B - A \cap B) \cup A$.

13. Dans un ensemble E une loi de composition interne notée . est associative mais non commutative. Elle admet un élément neutre à droite e tel que : $a.e = a$ et tout élément a admet un inverse à droite a' tel que $a.a' = e$. On désigne par a'' l'inverse à droite de a'.

1° En calculant de deux façons le composé : $a'.a.a'.a''$, démontrer que $a'.a = e$ puis en calculant de même : $a.a'.a$, montrer que $e.a = a$.

2° Quelle est la nature de l'ensemble E ?

14. Reprendre l'exercice précédent en supposant cette fois l'existence d'un élément neutre à gauche et d'un inverse à droite (ou l'existence d'un élément neutre à droite et d'un inverse à gauche).

15. Démontrer que si dans un groupe on a, quels que soient les éléments a et b : $(a \star b)^2 = a^2 \star b^2$, le groupe est abélien et $(a \star b)^n = a^n \star b^n$.

En est-il de même si, par hypothèse $(a \star b)^3 = a^3 \star b^3$?

16. Résoudre pour a, b, c, x éléments d'un groupe non commutatif G, les équations :

$$x \star b \star c = a \star c \qquad \text{et} \qquad b \star y \star c = a \star c.$$

17. 1° Démontrer que si dans un groupe non abélien G, d'élément neutre e, les éléments a, b, c, d ont pour composé $a \star b \star c \star d = e$, il en est de même de $b \star c \star d \star a$, $c \star d \star a \star b$ et $d \star a \star b \star c$.

2° Exprimer d' inverse de d en fonction de a, b, et c puis $d' \star c'$ en fonction de a et b.

18. Dans un groupe G on pose $a^2 = a \star a$, puis $a^{n+1} = a^n \star a$. Le groupe G est dit *monogène* si tous ses éléments sont les puissances successives de l'élément a distinct de l'élément neutre ; $e = a^0$.

1° Montrer qu'un groupe monogène est abélien.

2° Le groupe G est dit *cyclique* si $e = a^0 = a^n$. Combien d'éléments distincts y a-t-il alors dans G ?

3° Démontrer que les rotations d'axe donné Δ et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ (k entier relatif) forment un groupe cyclique.

19. Deux entiers relatifs a et b sont dits congruents modulo 5, si la différence $a - b$ ou $b - a$ est un multiple de 5. On écrit : $17 \equiv 2 \pmod 5$.

1° Montrer que cette congruence est une relation d'équivalence dans l'ensemble Z des entiers relatifs. Elle comporte cinq classes d'équivalence désignées par leur plus petit élément positif ou nul : soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ l'ensemble de ces classes.

2° Montrer que l'on peut définir dans E une addition et une multiplication qui sont des lois de groupe cyclique, la première pour E, la seconde pour $E^* = E - \{0\}$.
Établir les tables d'addition, de multiplication et des puissances dans E.

3° Démontrer que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Quelle est la structure de l'ensemble E ?

20. On désigne dans le plan, par I, R, S, T les rotations de centre donné O et d'angles respectifs $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ et $\frac{3\pi}{2}$ et par A, B, C, D les symétries d'axe Ox, Ou, Oy, Ov dont les angles polaires sont respectivement $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, et $\frac{3\pi}{4}$.

1° Établir la table de multiplication de l'ensemble E de ces huit transformations.

2° Montrer que E a une structure de groupe non abélien.

3° Trouver dans E deux sous-groupes abéliens.

21. On considère un triangle équilatéral ABC de centre O et on désigne par I, R, S, X, Y et Z les transformations (isométries) qui, au triangle ABC, font respectivement correspondre : ABC, BCA, CAB, ACB, CBA et BAC.

1° Donner les caractéristiques de chacune de ces transformations.

2° Établir la table de multiplication et la table des trois premières puissances des éléments de l'ensemble $E = \{I, R, S, X, Y, Z\}$.

3° Quelle est la structure de E ? Admet-il des sous-groupes cycliques (exercice n° 16).

22. On appelle birapport des quatre nombres distincts a, b, c, d le symbole :

$$(abcd) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} = \lambda.$$

1° Montrer que $(abcd) + (acbd) = 1$ et $(abcd)(bacd) = 1$. En déduire que :

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba) = \lambda.$$

2° Démontrer qu'avec les quatre nombres a, b, c, d, on peut seulement former six birapports distincts : $(abcd) = \lambda$, $(bcad) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, $(cabd) = \frac{1}{1-\lambda}$, $(acbd) = 1 - \lambda$, $(cbad) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ et $(bacd) = \frac{1}{\lambda}$.

3° On désigne par I, R, S, X, Y, Z les substitutions qui transforment $(abcd)$ en chacun des six birapports ci-dessus (dans l'ordre). Établir la table de multiplication de l'ensemble :

$$E = \{I, R, S, X, Y, Z\}$$

et vérifier sur les valeurs numériques en posant $I(\lambda) = \lambda$, $R(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ et $SR = S[R(\lambda)]$, etc. Comparer la table trouvée à celle de l'exercice précédent.

23. On définit sur l'ensemble R des nombres relatifs les deux lois de composition suivantes :

$$a \dotplus b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a \star b = ab - a - b + 2.$$

1° Montrer que la loi $\dotplus$ est une loi de groupe abélien. Calculer son élément neutre e et le symétrique $\bar{a}$ de a par rapport à e.

2° Montrer que la loi $\star$ est une loi de groupe abélien dans l'ensemble $R' = R - \{e\}$ et que

pour tout a on obtient : $a \star e = e \star a = e$. Calculer l'élément neutre ε pour cette loi et le symétrique a' de a par rapport à ε.

3° La loi $\star$ est distributive par rapport à la loi $\div$. En déduire que R muni des lois $\star$ et $\div$ a une structure de corps. Peut-on donner une explication de ce fait en posant $\alpha = a - 1$ et $\beta = b - 1$?

24. Dans un espace vectoriel E_4 de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ on pose :

$$\vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{2}(\vec{e_1} + \vec{e_2}); \quad \vec{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(\vec{e_1} - \vec{e_2}); \quad \vec{\varepsilon_3} = \frac{1}{2}(\vec{e_3} + \vec{e_4}) \quad \text{et} \quad \vec{\varepsilon_4} = \frac{1}{2}(\vec{e_3} - \vec{e_4}).$$

1° Exprimer $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ en fonction de $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4}$.

2° En déduire que tout vecteur $\vec{V} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} + x_4\vec{e_4}$ s'exprime en fonction des vecteurs $\vec{\varepsilon_i}$ sous la forme $\vec{V} = y_1\vec{\varepsilon_1} + y_2\vec{\varepsilon_2} + y_3\vec{\varepsilon_3} + y_4\vec{\varepsilon_4}$.

Montrer que le vecteur $\vec{0}$ $(x_i = 0)$ élément neutre de l'addition vectorielle a pour composante $y_j = 0$ quel que soit j et que l'ensemble $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4})$ constitue une nouvelle base de E_4.

3° Exprimer les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 de $\vec{V}$ en fonction des anciennes x_1, x_2, x_3, x_4 puis trouver l'expression de ces dernières en fonction des premières.

25. 1° Démontrer que si dans un espace vectoriel E_n, on peut exprimer les n vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n})$ en fonction des n vecteurs $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \dots \vec{\varepsilon_n}$ sous la forme :

$$\vec{e_i} = a_{i1}\vec{\varepsilon_1} + a_{i2}\vec{\varepsilon_2} + \dots + a_{in}\vec{\varepsilon_n} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

l'ensemble $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_4}, \dots \vec{\varepsilon_n})$ est une nouvelle base de E_n.

2° Sachant que $\vec{V} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n} = x_1\vec{\varepsilon_1} + x_2\vec{\varepsilon_2} + \dots + x_n\vec{\varepsilon_n}$, exprimer les nouvelles coordonnées (X_j) en fonction des anciennes (x_i).

26. On considère l'ensemble des nombres $n = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ ou a, b, c sont des nombres rationnels, éléments du corps Q.

1° Montrer que l'ensemble S des nombres n a une structure d'espace vectoriel sur le corps Q.

2° Démontrer $n = 0 \Longleftrightarrow a = b = c = 0$. On partira du fait que $x = y\sqrt{2}$ entraîne $x = y = 0$ car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, et on utilisera : $(a + b\sqrt{2})^2 = 3c^2$ ou $(a + c\sqrt{3})^2 = 2b^2$.

3° En déduire que $n = n' \Longleftrightarrow a = a'$; $b = b'$; $c = c'$ et que l'ensemble $\mathcal{B} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ constitue une base de l'ensemble vectoriel S.

L'ENSEMBLE N DES ENTIERS NATURELS

42. Notion d'entier naturel. — La nécessité de dénombrer les objets d'une collection conduit à la notion de nombre entier ou entier naturel. Les propriétés de la suite N des nombres entiers : 0, 1, 2, 3, ... n ... établies d'une manière concrète dans les classes antérieures sont supposées connues des élèves de la classe.

La construction axiomatique de l'ensemble N n'est donc plus au programme. Nous l'avons cependant conservée car, outre son intérêt en elle-même, elle permettra au lecteur :

1° Une révision des propriétés de l'ensemble N.

2° L'étude du raisonnement par récurrence.

43. Axiomes de Peano. — ***Il existe un ensemble* N *et un seul dont les éléments appelés entiers naturels satisfont aux cinq axiomes suivants :***

1° ***Zéro (noté 0) est un entier naturel.***

2° ***Tout entier naturel a admet un suivant unique $a^{\cdot}$.***
Ainsi : $0^{\cdot} = 1$, $1^{\cdot} = 2$, $2^{\cdot} = 3$ etc. et $a = b \Longrightarrow a^{\cdot} = b^{\cdot}$.

3° ***Aucun entier naturel n'admet* 0 *pour suivant.***

4° ***Deux entiers naturels qui ont le même suivant sont égaux.***

Donc : $a^{\cdot} = b^{\cdot} \Longrightarrow a = b$, soit (2°) : $\boxed{a = b} \iff \boxed{a^{\cdot} = b^{\cdot}}$

5° ***Tout sous-ensemble* E *de* N *contenant* 0 *et le suivant $n^{\cdot}$ de chacun de ses éléments n coïncide avec l'ensemble* N.**

Ainsi l'ensemble E contenant 0, ainsi que le suivant de tout entier naturel est un sous-ensemble de N qui contient 0 et le suivant $n^{\cdot}$ de chacun de ses éléments n. Il coïncide donc avec N d'après l'axiome 5. Il en résulte que :

Tout entier naturel a, autre que* 0, *est le suivant d'un entier naturel unique $^{\cdot}a$, appelé antécédent de a.

Autrement dit, il n'y a pas dans l'ensemble N d'élément autre que 0 et ceux que l'on obtient en construisant le suivant d'un élément de N.

Nous n'insisterons pas davantage sur la construction de l'ensemble N qui fait l'objet de la numération (parlée ou écrite) étudiée en Arithmétique et déjà connue.

44. Raisonnement par récurrence. — L'axiome 5 de Peano est d'autre part à la base du principe de raisonnement dit par récurrence que nous utiliserons fréquemment.

Pour qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour tout entier naturel il suffit :

α) ***Qu'elle soit vraie pour*** $n = 0$.

β) ***Qu'étant vraie pour*** n, ***elle le soit aussi pour*** $n^{\cdot}$.

En effet, l'ensemble A des entiers naturels qui vérifient la propriété $\mathcal{P}(n)$ contient alors 0 et le suivant $n^{\cdot}$ de chacun de ses éléments n. Il coïncide avec N.

Lorsque la propriété $\mathcal{P}(n)$ ne concerne pas 0 (ou 0 et 1), on commence à l'établir pour $n = 1$ (ou pour $n = 2$).

ADDITION ET SOUSTRACTION.

45. Addition des entiers naturels. — ***C'est une loi de composition interne dans l'ensemble*** N ***définie par les axiomes suivants :***

1° $\boxed{a + 0 = a}$ 2° $\boxed{a + b^{\cdot} = (a + b)^{\cdot}}$

En particulier : $a + 0^{\cdot} = (a + 0)^{\cdot} = a^{\cdot}$ donc : $\boxed{a^{\cdot} = a + 1}$

Si $a + b = c$, on dit que *c est la somme des entiers a et b.*

46. Propriétés de l'addition des entiers naturels.

1° ***C'est une loi associative :*** $(a + b) + c = a + (b + c)$.

2° ***C'est une loi commutative :*** $a + b = b + a$.

Donc : $0 + a = a + 0 = a$.

L'addition admet 0 *pour élément neutre unique* (n° 27).

3° ***Tout entier naturel*** a ***est régulier pour l'addition :***

$$a + b = a + c \Longleftrightarrow b + a = c + a \Longleftrightarrow b = c.$$

4° ***Pour que la somme*** $a + b$ ***soit nulle il faut et il suffit que les entiers naturels*** a ***et*** b ***soient tous deux nuls.***

$$a + b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Par suite, *aucun entier naturel $a \neq 0$ n'admet d'opposé* (n° 27, 2°).

— Ces propriétés, que nous admettrons, se démontrent par récurrence.

Associativité : $(a + b) + c = (a + b) + c$.

α) Propriété vraie pour $c = 0$ car $(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0)$.

β) Si la propriété est vraie pour $c = n$, la relation $(a + b) + n = a + (b + n)$ entraîne :

$$(a + b) + n^{\cdot} = [(a + b) + n]^{\cdot} = [a + (b + n)]^{\cdot} = a + (b + n)^{\cdot} = a + (b + n^{\cdot}).$$

La propriété étant vraie pour $c = 0$ et pour le suivant $n^{\cdot}$ de tout entier n qui la vérifie, est vraie quel que soit c (n° 44).

Commutativité. — **1er cas :** $0 + a = a + 0$.

α) Vrai pour $a = 0$ car $0 + 0 = 0 + 0$.

β) $0 + n = n + 0 \Longrightarrow 0 + n^{\cdot} = (0 + n)^{\cdot} = (n + 0)^{\cdot} = n^{\cdot} = n^{\cdot} + 0$.

2e cas : $a + 1 = 1 + a$. α) Vrai pour $a = 0$ car $0 + 1 = 1 + 0$.

β) $n + 1 = 1 + n \Longrightarrow n^{\cdot} + 1 = (n + 1) + 1 = (1 + n)^{\cdot} = 1 + n^{\cdot}$.

3e cas : $a + b = b + a$. α) Vrai pour $b = 0$, car $a + 0 = 0 + a$.
β) $a + n = n + a \Longrightarrow a + n^{\cdot} = (a + n)^{\cdot} = (n + a)^{\cdot} = n + a^{\cdot}$.
Donc : $a + n^{\cdot} = n + (a + 1) = n + (1 + a) = (n + 1) + a = n^{\cdot} + a$.

Régularité : $a + b = a + c$ ou $b + a = c + a \Longleftrightarrow b = c$.
α) Vrai pour $a = 0$ car $b + 0 = c + 0 \Longleftrightarrow b = c$.
β) Si $b + n = c + n$ équivaut à $b = c$, il en est de même de $b + n^{\cdot} = c + n^{\cdot}$
car : $b + n^{\cdot} = c + n^{\cdot} \Longleftrightarrow (b + n)^{\cdot} = (c + n)^{\cdot} \Longleftrightarrow b + n = c + n$ (nº 43, 4º);

Relation : $a + b = 0$. Cette relation est vérifiée pour $a = b = 0$.
Elle est impossible si un seul des entiers a et b n'est pas nul.
Par exemple : $b = c^{\cdot} \neq 0 \Longrightarrow a + b = a + c^{\cdot} = (a + c)^{\cdot} \neq 0$ car 0 n'est pas le suivant d'un entier (nº 43, 3º). Donc : $a + b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

47. Corollaires. — 1º L'addition des entiers naturels étant à la fois associative et commutative on peut, dans une somme de plusieurs entiers naturels permuter l'ordre des termes et remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur somme (nº 26).

$$a + b + c + d + f = b + d + c + f + a = (a + d) + (b + c + f).$$

Ainsi : $a + 1 + b = (a + 1) + b = a + (b + 1)$ $\boxed{a^{\cdot} + b = a + b^{\cdot}}$

2º Dans l'égalité de deux sommes on peut ajouter ou supprimer un terme commun aux deux membres (nº 27, 3º) :

$$a + b = c \Longleftrightarrow a + b + n = c + n \Longleftrightarrow a + n + b = n + c.$$

3º On peut ajouter membre à membre deux ou plusieurs égalités.

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} a + c = b + c \\ b + c = b + d \end{matrix}\right| \Longrightarrow a + c = b + d.$$

Réciproquement, si $a + c = b + d$, les égalités $a = b$ et $c = d$ sont conséquences l'une de l'autre.

48. Relations d'inégalité dans l'ensemble N. — ***Si*** $a = b + n$ ***on dit que*** a ***est supérieur ou égal à*** b ***et que*** b ***est inférieur ou égal à*** a.

On écrit :

$$a = b + n \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \quad \text{(Inégalités au sens large)}$$

Si n est différent de 0, on a : $a \neq b$. *On dit alors que a est supérieur à b et que b est inférieur à a* :

$$\left.\begin{matrix} a = b + n \\ n \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} a > b \\ b < a \end{cases} \quad \text{(Inégalités au sens strict)}$$

Or $n \neq 0$ admet un antécédent m (nº 43) et $n = m^{\cdot}$, si bien que :

$$\boxed{a > b} \Longleftrightarrow \boxed{a = b + m^{\cdot}}$$

49. Théorème. — ***La relation d'inégalité*** ($\geqslant$ ou $\leqslant$) ***définit dans l'ensemble*** N, ***une relation d'ordre total au sens large*** (nos 8 et 9).

1º *Elle est réflexive* car $a = a + 0 \Longrightarrow a \geqslant a$.

2º *Elle est antisymétrique* car les égalités $a = b + x$ et $b = a + y$ entraînent $a + b = b + a + x + y$ donc $x + y = 0$ soit $x = y = 0$ et $a = b$.

$$a \geqslant b \text{ et } b \geqslant a \Longrightarrow a = b.$$

3° *Elle est transitive,* car les égalités $a = b + x$ et $b = c + y$ entraînent :

$a = (c + y) + x = c + (x + y)$. Donc : $a \geqslant b$ et $b \geqslant c \Longrightarrow a \geqslant c$.

4° *Tout couple d'entiers (a, b) vérifie soit $a \geqslant b$ soit $a \leqslant b$.*

Donnons-nous l'entier a et montrons que l'entier b se compare à a.
α) Vrai pour $b = 0$ car : $a = 0 + a \Longrightarrow a \geqslant 0$.
β) Supposons n classé par rapport à a, il vérifie soit $n \geqslant a$, soit $n < a$.
Montrons que $b = n^{\cdot}$ se compare à a.
Si $n \geqslant a$ on a : $n = a + x$ et $n^{\cdot} = a + x^{\cdot} \Longrightarrow n^{\cdot} > a$ (n° 48).
Si $n < a$ on a : $a = n + x^{\cdot} = x + n^{\cdot} \Longrightarrow n^{\cdot} \leqslant a$.
Donc (n° 44) tout entier b est comparable à a.

50. Remarque. — On verrait de même que la relation d'inégalité ($>$ ou $<$) est une relation d'ordre total au sens strict (n°s 8 et 10). Retenons que :

1° L'une des trois relations $a = b$, $a > b$ et $a < b$ exclut les deux autres.

2° Les inégalités : $a > b$ et $a + n > b + n$ sont équivalentes car :

$$a = b + x^{\cdot} \Longleftrightarrow a + n = (b + n) + x^{\cdot}.$$

3° On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + c > b + c \\ b + c > b + d \end{array}\right\} \Longrightarrow a + c > b + d.$$

51. Corollaires. — 1° ***Lorsqu'un entier naturel a est supérieur à un entier b, il est au moins égal à son suivant*** $b^{\cdot} = b + 1$.

En effet : $a = b + m^{\cdot} \Longleftrightarrow a = b^{\cdot} + m = (b + 1) + m$.

Donc : $\boxed{a > b} \Longleftrightarrow \boxed{a \geqslant b + 1}$

On verrait de même que $a < b \Longleftrightarrow a \leqslant {}^{\cdot}b$.

2° ***Il n'existe pas d'entier naturel n tel que :*** $a < n < a + 1$.

La relation $n > a \Longrightarrow n \geqslant a + 1$ qui exclut $n < a + 1$ (n° 50).

3° ***Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres.***

Car tout entier naturel n est inférieur à son suivant $n^{\cdot} = n + 1$.

On dit que l'ensemble N n'a pas d'*élément maximal.* Par contre il admet 0 pour *élément minimal.*

Il en résulte que l'ensemble des entiers naturels constitue une *suite croissante illimitée* dans laquelle chaque entier naturel n précède son suivant $n + 1$.

52. Différence de deux entiers naturels. — ***Si a et b sont deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$, il existe un entier naturel x unique tel que $a = b + x$, appelé différence des entiers a et b pris dans cet ordre (ou excès de a sur b).***

1° La relation $a \geqslant b$ suppose l'existence de x tel que $a = b + x$ (n° 48).

2° Cet entier x est unique car s'il en existait un second x' cela impliquerait :

$$a = b + x = b + x' \quad \text{soit (n° 46, 3°)} : \ x = x'.$$

$$\boxed{a = b + x} \Longleftrightarrow \boxed{x = a - b}$$

Si $a < b$, la différence $a - b$ n'existe pas car la relation $a = b + x$ implique $a \geqslant b$ ce qui est incompatible avec $a < b$ (n° 50).

La soustraction n'est pas une loi de composition interne définie pour tout couple ordonné d'entiers naturels (a, b).

Si $a > b$, la différence $a - b$ existe.
Si $b > a$, la différence $b - a$ existe.
Si $a = b$, on a : $a - b = b - a = 0$.

Dans tous les cas l'une au moins des différences $a - b$ ou $b - a$ est définie. (C'est de cette différence qu'il s'agit lorsque l'on parle de la différence de deux entiers, sans en préciser l'ordre.)

MULTIPLICATION ET DIVISION

53. Multiplication des entiers naturels. — ***C'est une loi de composition interne dans l'ensemble* N *définie par les axiomes suivants :***

1° $\boxed{a \times 0 = 0}$ 2° $\boxed{a \times b^{\cdot} = ab + a}$

Il en résulte que : $a \times 1 = a \times 0^{\cdot} = a \times 0 + a$ donc : $\boxed{a \times 1 = a.}$

$a \times 2 = a \times 1^{\cdot} = a \times 1 + a$ donc $a \times 2 = a + a$, $a \times 3 = a + a + a$

et : $a \times b = a + a + ... a$ (b termes).

Si $ab = c$, on dit que c est le *produit* de a par b et les deux entiers a et b sont les *facteurs* du produit ab.

54. Propriétés de la multiplication des entiers naturels.

1° ***La multiplication est une loi associative :*** $(ab)\,c = a\,(bc)$.

2° ***La multiplication est une loi commutative :*** $ab = ba$.
Donc : $1.a = a.1 = a$. La multiplication admet 1 pour *élément neutre unique* (n° 27).

3° ***La multiplication est distributive par rapport à l'addition :***

$$a\,(b + c) = (b + c)\,a = ab + ac.$$

Ces propriétés, que nous admettrons, s'établissent par récurrence.

Distributivité à droite. — Montrons que : $(b + c)\,a = ba + ca$.
α) Vrai pour $a = 0$ car $(b + c).0 = b.0 + c.0 = 0$.
β) Si $(b + c)\,n = bn + cn$, on obtient, puisque $(b + c)\,n^{\cdot} = (b + c)\,n + (b + c)$,

$$(b + c)\,n^{\cdot} = bn + cn + b + c = (bn + b) + (cn + c) = bn^{\cdot} + cn^{\cdot}.$$

Relation : $0.a = 0$. — α) Vraie pour $a = 0$ car $0.0 = 0$.
β) Si $0.n = 0$, il vient : $0.n^{\cdot} = 0.n + 0 = 0$.

Commutativité. — Montrons que : $ab = ba$.
α) Vrai pour $b = 0$, car $a.0 = 0.a = 0$.
β) Si $an = na$, on obtient, compte tenu de la distributivité à droite :

$$an^{\cdot} = an + a = na + a = (n + 1)\,a = n^{\cdot}a.$$

Distributivité à gauche. — La commutativité montre que :

$(b + c)\,a = ba + ca$ s'écrit : $a\,(b + c) = ab + ac$.

Associativité. — Montrons que : $(ab)c = a\,(bc)$.
α) Vrai pour $c = 0$ car $(ab).0 = a\,(b.0) = 0$.
β) Si $(ab)\,n = a\,(bn)$, on obtient, compte tenu de la distributivité :

$$(ab)\,n^{\cdot} = (ab)\,n + ab = a\,(bn) + a.b = a\,(bn + b) = a\,(bn^{\cdot}).$$

55. Théorème. — ***Pour qu'un produit de deux facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.***

1° La condition est suffisante car : $a.0 = 0.a = 0$.

2° Elle est nécessaire. Supposons $ab = 0$ avec $b \neq 0$ soit $b = c^{\cdot}$:

$$ab = ac^{\cdot} = ac + a = 0 \Longrightarrow ac = a = 0 \text{ (n° 46, 4°)}.$$

Donc : $$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Cette propriété s'étend à un produit de plusieurs facteurs car :

$$abc = 0 \Longleftrightarrow a(bc) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } bc = 0 \Longleftrightarrow a = 0, b = 0 \text{ ou } c = 0.$$

56. Corollaires. 1° ***Tout entier naturel n autre que 0 est régulier pour la multiplication.***

2° ***Les inégalités $a > b$ et $an > bn$ sont équivalentes.***

En effet : $a = b \Longrightarrow an = bn$ et $a = b + x \Longrightarrow an = bn + xn$.

Soit, si n et x ne sont pas nuls : $a > b \Longrightarrow an > bn$.
et par suite : $a < b \Longrightarrow an < bn$.

Réciproquement, si $an = bn$ pour $n \neq 0$, on ne peut avoir $a > b$ ni $a < b$ ce qui entraînerait $an > bn$ ou $an < bn$. Donc : $a = b$.

Pour $n \neq 0$ $\boxed{a = b} \Longleftrightarrow \boxed{an = bn}$ (régularité de $n \neq 0$)

Si $an > bn$, il faut supposer $n \neq 0$ car $n = 0 \Longrightarrow an = bn = 0$.

On ne peut alors avoir $a \leqslant b$ ce qui entraînerait : $an \leqslant bn$.

Donc : $\boxed{a > b} \Longleftrightarrow \boxed{an > bn}$

Retenons que l'on peut multiplier (ou diviser) par un même facteur non nul, les deux membres d'une égalité ou d'une inégalité entre entiers naturels.

57. Conséquences. — 1° La multiplication étant à la fois commutative et associative on peut, dans un produit de plusieurs facteurs, permuter ces facteurs d'une manière quelconque ou remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par le produit effectué (n° 26) :

$$abcdf = cbafd = (ad)(bcf).$$

2° On peut multiplier membre à membre des égalités ou des inégalités de même sens, entre des entiers naturels. Ainsi :

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} ac > bc \\ bc > bd \end{matrix}\right\} \Longrightarrow ac > bd.$$

3° **Propriétés des différences.** — Si $x = a - b$ et $y = a' - b'$ les relations

$$a = b + x \text{ et } a' = b' + y \text{ entraînent :}$$

1° $a + b' + y = a' + b + x$ ce qui montre (n° 47, 3°) que :
$x = y \Longleftrightarrow a + b' = a' + b$ donc que $\underline{a - b = a' - b' \Longleftrightarrow a + b' = b + a'}$.

2° $a + a' = b + b' + x + y$ donc $x + y = \underline{(a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b')}$.

3° $ay = by + xy$
$aa' = ab' + ay$ $\Longrightarrow$ Par addition et après réduction :
$bb' + by = ba'$

$$aa' + bb' = ab' + ba' + xy$$

donc : $xy = \underline{(a - b)(a' - b') = (aa' + bb') - (ab' + ba')}$.

58. Division. — ***Étant donné deux entiers naturels*** a ***et*** b, ***s'il existe un entier naturel*** q ***tel que*** $a = bq$, ***cet entier*** q ***est appelé quotient de*** a ***par*** b.

On écrit :

$$\boxed{a : b = q \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = q} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{a = bq}$$

On dit que a est un *multiple* de b ou que b est un *diviseur* de a. Le symbole $\frac{a}{b}$ est dans ce cas un *rapport entier*.

Notons que $a = 1.a \Longrightarrow \frac{a}{a} = 1$ et $\frac{a}{1} = a$.

Pour $a \neq 0$, $0 = a0. \Longrightarrow \frac{0}{a} = 0$. Par contre $\frac{a}{0}$ est impossible car $0 \times q = 0 \neq a$.

1° *Montrons que la division de* a *par* b > 1 *n'est pas toujours possible.*

Soit r tel que $0 < r < b$. Quel que soit q, on obtient : $bq < bq + r < b(q + 1)$.

Or si l'entier $a = bq + r$ était divisible par b on aurait : $a = bq + r = bx$.

Ce qui donnerait $bq < bx < b(q + 1)$ soit (n° 56, 2°) : $q < x < q + 1$, relation impossible en entiers (n° 51, 2°).

La division de a ***par*** b ***n'est donc pas une loi de composition interne définie dans*** N ***pour tout couple d'entiers naturels*** a ***et*** b.

Ainsi 1 n'est pas divisible par un entier $a > 1$, car pour tout entier $x \neq 0$, la relation $x \geqslant 1$ entraîne $ax \geqslant a > 1$. Par suite puisque $0 \times x = 0$:

Aucun entier $a \neq 1$ *n'admet d'inverse dans la multiplication* (n° 27, 2°).

Il en résulte que : $\boxed{ab = 1} \Longleftrightarrow \boxed{a = b = 1}$

2° **Propriétés des rapports entiers.** — Si $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{a'}{b'}$ les relations $a = bx$ et $a' = b'y$ entraînent :

1° $ab'y = a'bx$ donc (n° 56) : $x = y$ ou $\underline{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow ab' = ba'}$.

2° $ab' + a'b = b'bx + bb'y = bb'(x + y)$,

donc : $x + y = \underline{\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'}}$.

3° $aa' = bb'xy$ donc : $xy = \underline{\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}}$.

PUISSANCES

59. Définition. — ***On appelle puissance entière de l'entier naturel $a \neq 0$ tout entier naturel a^m, défini par les relations :***

1° $\boxed{a^0 = 1}$ 2° $\boxed{a^{n+1} = a^n.a}$

L'entier naturel m est l'exposant de a^m. On obtient ainsi :

$$a^1 = a^0.a = a, \quad a^2 = a^1.a = a.a, \quad a^3 = a^2.a = a.a.a, \text{ etc.}$$

$a^m = a \,.\, a \ldots a$ est le produit de m facteurs égaux à a. Il est clair que $0^m = 0$ tout au moins si $m \neq 0$.

60. Formules fondamentales. — On les obtient par récurrence :

1° ***Puissance d'un produit :*** $\boxed{(ab)^m = a^m b^m}$

α) Vrai pour $m = 0$ car $(ab)^0 = 1 = a^0.b^0$.

β) Si $(ab)^n = a^n b^n$, $(ab)^{n+1} = (ab)^n ab = a^n b^n ab = (a^n a)\ (b^n b) = a^{n+1}\, b^{n+1}$.

On en déduit la généralisation : $(abc)^m = (ab)^m c^m = a^m b^m c^m$.

2° ***Produit de deux puissances :*** $\boxed{a^m.a^p = a^{m+p}}$

α) Vrai pour $p = 0$ car $a^m.a^0 = a^m = a^{m+0}$.

β) Si $a^m.a^n = a^{m+n}$, $a^m a^{n+1} = a^m.a^n.a = a^{m+n}.a = a^{m+n+1}$.

On en déduit que : $\boxed{a^m.a^n.a^p = a^{m+n}.a^p = a^{m+n+p}.}$

Si $m \geqslant p$ on a : $m = p + x$ et $a^m = a^p.a^x = a^p.a^{m-p}$.

Donc pour $m \geqslant p$: $\boxed{\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}}$

3° ***Puissance d'une puissance :*** $\boxed{(a^m)^p = a^{mp}.}$

α) Vrai pour $p = 0$ car $(a^m)^0 = 1 = a^{m \times 0}$,

β) Si $(a^m)^n = a^{mn}$ est vérifié, on peut écrire :

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n.a^m = a^{mn}.a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Il en résulte que : $(a^m)^p = (a^p)^m$ et la possibilité de décomposer une puissance. Ainsi pour calculer a^5 on fera $[a^2]^2.a$.

61. Corollaire. — ***Pour $m \neq 0$ les égalités $a = b$ et $a^m = b^m$ sont équivalentes et il est de même des inégalités $a < b$ et $a^m < b^m$.***

1° $a = b \Longrightarrow a^m = b^m$.

α) Vrai pour $m = 0$ car $a^0 = b^0 = 1$.

β) $a^n = b^n$ et $a = b \Longrightarrow a^n a = b^n b$ ou $a^{n+1} = b^{n+1}$ (n° 57, 2°).

2° Pour $m \neq 0$, $a < b \Longrightarrow a^m < b^m$.

α) Vrai pour $m = 1$ car $a < b \Longleftrightarrow a^1 < b^1$.

β) $a^n < b^n$ et $a < b \Longrightarrow a^n a < b^n b$ ou $a^{n+1} < b^{n+1}$ (n° 57, 2°).

On voit que : $a = b \Longrightarrow a^m = b^m$, $a < b \Longrightarrow a^m < b^m$ donc que : $a > b \Longrightarrow a^m > b^m$.

Par réciprocité, il en résulte que :

$$\boxed{a = b \Longleftrightarrow a^m = b^m} \quad \text{et} \quad \boxed{a < b \Longleftrightarrow a^m < b^m}$$

62. Conclusion. — Nous avons défini dans l'ensemble N des entiers naturels deux lois de composition interne, l'addition et la multiplication, qui sont des lois associatives, commutatives et admettant chacune un élément neutre. Cependant l'ensemble N n'a pas une structure de groupe ni pour l'une, ni pour l'autre de ces lois car :

1° *Tout élément autre que* 0 *n'a pas d'opposé* (n° 46, 4°).

2° *Tout élément autre que* 1 *n'a pas d'inverse* (n° 58).

Des extensions de l'ensemble N permettront de symétriser l'ensemble N par rapport à l'addition puis par rapport à la multiplication (4e et 5e leçons).

ANALYSE COMBINATOIRE

63. Arrangement. — ***Étant donné un ensemble* E *contenant m éléments distincts, on appelle arrangement p à p de ces* E *éléments tout sous-ensemble rangé de* E *formé de p éléments distincts.***

Deux arrangements donnés diffèrent soit par ce qu'ils ne contiennent pas les mêmes éléments, soit parce que les éléments qu'ils contiennent ne sont pas rangés dans le même ordre.

Ainsi avec 5 lettres A, B, C, D, E on peut former les arrangements 3 à 3 distincts :

(ABC), (BAC), (CBA), (ABD), (ACE), (DEA), etc.

On désigne par A_m^p le nombre des arrangements p à p de m éléments.

64. Calcul de A_m^p. — Remarquons d'abord que $A_m^1 = m$ car chaque élément constitue un arrangement 1 à 1 et un seul.

Ainsi les arrangements une à une des 5 lettres A, B, C, D, E sont (A), (B), (C), (D), (E).

Supposons établi le tableau T_m^{p-1} des A_m^{p-1} arrangements $p - 1$ à $p - 1$ des m éléments. A la droite de chacun d'eux plaçons successivement chacun des $(m - p + 1)$ éléments qu'il ne contient pas. Nous formons ainsi un nouveau tableau T' contenant $A_m^{p-1} \times (m - p + 1)$ arrangements p à p des m éléments donnés.

1° Tout arrangement p à p est ainsi obtenu. Ainsi l'arrangement (BCED) des 5 lettres A, B, C, D, E, 4 à 4 s'obtient en plaçant à la droite de (BCE) la lettre D qui n'y figure pas.

2° Tous les arrangements ainsi obtenus sont distincts car ils diffèrent soit par l'arrangement de leurs $(p - 1)$ premiers éléments, soit par leur dernier élément, s'ils proviennent d'un même arrangement du tableau T_m^{p-1}.

Le tableau T′ est donc le tableau T_m^p des A_m^p arrangements p à p des m éléments, ce qui entraîne : $A_m^p = A_m^{p-1}(m - p + 1)$.

Écrivons : $A_m^1 = m$

puis pour $p = 2$ $A_m^2 = A_m^1(m - 1)$

pour $p = 3$ $A_m^3 = A_m^2(m - 2)$

. . . .

$A_m^p = A_m^{p-1}(m - p + 1)$

En multipliant membre à membre et en supprimant les facteurs communs aux deux membres on obtient :

$$\boxed{A_m^p = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}$$

Donc : $A_m^1 = m$, $A_m^2 = m(m-1)$, $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Ainsi : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

65. Permutation. — ***On appelle permutation de m éléments distincts tout arrangement m à m de ces m éléments.***

Les permutations des 3 lettres A, B, C sont :

(ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB) et (CBA).

On désigne par P_m le nombre des permutations de m éléments distincts.

On a donc : $P_m = A_m^m$ soit en faisant $p = m$ dans l'expression de A_m^p :

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.$$

P_m est donc le produit des m premiers entiers naturels non nuls que l'on désigne par $m!$ (lire « factorielle m »). Donc :

$$\boxed{P_m = 1.2.3\ldots(m-1)\,m.} \quad \text{soit} \quad \boxed{P_m = m!}$$

Ainsi : $P_6 = 1.2.3.4.5.6 = 720$.

66. Combinaison. — ***Étant donné un ensemble* E *de m éléments distincts on appelle combinaison p à p de ces m éléments tout sous-ensemble de* E *formé de p éléments distincts (non rangés).***

Ici on ne fait plus intervenir l'ordre des éléments. Ainsi avec les 5 lettres A, B, C, D, E on forme les combinaisons 3 à 3 distinctes : ABC, ABD, ACD, BCD, etc. On désigne par C_m^p le nombre des combinaisons p à p de m éléments.

Calcul de C_m^p. — Soit T le tableau des C_m^p combinaisons p à p de m éléments.

Sur les p éléments de chacune de ces combinaisons effectuons les $p!$ permutations possibles. Nous obtenons ainsi un tableau T′ contenant $C_m^p \cdot p!$ arrangements p à p de ces m éléments. Tout arrangement p à p est ainsi obtenu et un arrangement donné ne peut être obtenu qu'une fois. Le tableau T′ est donc le tableau T_m^p des A_m^p arrangements p à p, ce qui entraîne :

$$A_m^p = C_m^p \cdot p! \quad \text{soit:} \quad \boxed{C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad p}} \qquad (1)$$

En multipliant les deux termes du rapport par $(m - p)! = 1.2 \dots (m - p)$, on obtient la formule condensée :

$$\boxed{C_m^p = \frac{m!}{p!\,(m-p)!}} \qquad (2)$$

Ainsi $C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10$; $C_7^3 = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$.

67. Applications. — 1° $\boxed{C_m^p = C_m^{m-p}}$. Cette formule se démontre en remplaçant p par $m - p$ dans la formule (2) de C_m^p.

On vérifie d'ailleurs que toute combinaison p à p admet une combinaison complémentaire $m - p$ à $m - p$ et réciproquement. Le nombre des premières est donc égal à celui des secondes.

2° $\boxed{C_m^0 = C_m^m = 1}$ car l'une correspond au sous-ensemble vide $\varnothing$, l'autre à l'ensemble E lui-même. Or la formule (2) donne :

$$C_m^0 = C_m^m = \frac{m!}{m!\,0!} = 1, \text{ ce qui conduit à poser : } \boxed{0! = 1}$$

3° $\boxed{C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1}}$. En effet :

$$C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1} = \frac{(m-1)!}{p!\,(m-p-1)!} + \frac{(m-1)!}{(p-1)!\,(m-p)!} = \frac{(m-1)!}{p!\,(m-p)!}[(m-p)+p]$$
$$= \frac{m!}{p!\,(m-p)!} = C_m^p.$$

On vérifie que, si A désigne l'un des éléments de E, il y a C_{m-1}^p combinaisons p à p qui ne contiennent pas A et C_{m-1}^{p-1} où A est associé à une combinaison $p - 1$ à $p - 1$ des $(m - 1)$ éléments autres que A. D'où la formule proposée.

68. Formule du binôme de Newton. — Démontrons par récurrence que :

$$\boxed{(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \dots + C_m^{m-1} ab^{m-1} + C_m^m b^m.} \qquad (1)$$

Cette formule est vraie pour $m = 1$ car $(a + b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$.

Admettons-la pour $m = n$ et calculons $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n a + (a + b)^n b$. On obtient :

$$(a+b)^{n+1} = \left| \begin{array}{l} C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \dots + C_n^p a^{n-p+1} b^p \quad + \dots + C_n^n ab^n \\ \qquad + C_n^0 a^n b + \dots + C_n^{p-1} a^{n-p+1} b^p + \dots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n b^{n+1} \end{array} \right|$$

Compte tenu de la formule $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ (n° 67, 3°) on voit que :

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^p a^{n-p+1} b^p + \dots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$$

ce qui est bien la formule (1) pour $m = n + 1$. Ainsi :

	Coefficients
$(a+b)^1 = a + b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
. . . .	. . . .

Le tableau triangulaire des coefficients *(triangle de Pascal)* s'obtient aisément car tout élément C_m^p est la somme de l'élément C_{m-1}^p placé au-dessus de lui et de l'élément C_{m-1}^{p-1} qui précède ce dernier.

EXERCICES

— **Démontrer par récurrence les formules suivantes :**

27. $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{1}{2}\,n(n+1).$

28. $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1).$

29. $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2.$

30. $S'_1(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2.$

31. $S'_2(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}\,n(2n-1)(2n+1).$

32. $S'_3(n) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$

33. $\Sigma_2(n) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots\ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}\,n(n+1)(n+2).$

34. $\Sigma_3(n) = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}\,n(n+1)(n+2)(n+3).$

35. $\Sigma_\alpha(n) = \sum_1^n p(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha-1) = \frac{1}{\alpha+1}\,n(n+1)(n+2)\ldots(n+\alpha).$

36. Démontrer et vérifier d'après les valeurs précédentes de $S_\alpha(n)$, $S'_\alpha(n)$ et $\Sigma_\alpha(n)$ que :

1° $S'_1(n) = S_1(2n) - 2\,S_1(n)$; $S'_2(n) = S_2(2n) - 4\,S_2(n)$
et plus généralement : $S'_\alpha(n) = S_\alpha(2n) - 2^\alpha S_\alpha(n).$

2° $S_1(n) = \Sigma_1(n)$; $S_2(n) = \Sigma_2(n-1) + \Sigma_1(n)$; $S_3(n) = \Sigma_3(n-1) + \Sigma_1 n.$
et que $S_\alpha(n)$ se déduit de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_\alpha$.

37. On pose : $\Sigma'_2(n) = 1.2 + 3.4 + \ldots + (2n-1)\,2n$ et $\Sigma''_2(n) = 2.3 + 4.5 + \ldots + 2n(2n+1).$

1° Établir que : $\Sigma'_2(n) = S'_2(n) + S'_1(n)$ et $\Sigma''_2(n) = \Sigma_2(2n) - \Sigma'_2(n).$

2° En déduire : $\Sigma'_2(n)$ et $\Sigma''_2(n)$. Vérifier par récurrence.

38. 1° Utiliser les résultats des exercices n°s 27 à 35 pour calculer :

$$A = (a + r) + (a + 2r) + \dots + (a + nr)$$
$$B = (a + r)^2 + (a + 2r)^2 + \dots + (a + nr)^2$$
$$C = (a + r)^3 + (a + 2r)^3 + \dots + (a + nr)^3.$$

2° Vérifier les résultats par récurrence et en déduire pour $p = 1, 2, \dots n$ les sommes :
$\Sigma (3p - 2)$, $\Sigma (3p - 2)^2$, $\Sigma (3p - 2)^3$, $\Sigma (3p - 1)$, $\Sigma (3p - 1)^2$, $\Sigma (3p - 1)^3$.

39. Calculer C^n_{n+p}. Démontrer que le produit de n entiers naturels consécutifs est toujours divisible par le produit $n!$ des n premiers entiers non nuls.

Vérifier que : $17 \times 18 \times 19 \times 20 \times 21$ est divisible par 1.2.3.4.5.

40. 1° Démontrer par récurrence que : $2.6.10 \dots (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots (2n)$.

2° Vérifier directement en montrant que la relation précédente peut s'écrire :

$$2^n.1.3.5 \dots (2n - 1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

41. Soient a, b, c des entiers naturels non nuls :

1° Démontrer que : $(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 2[a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$.

2° En déduire que si a, b, c ne sont pas tous trois égaux : $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$.

3° Établir que : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \iff a = b = c$.

42. 1° Démontrer que : $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$,

2° $a = b \iff a^n = b^n$ et $a > b \iff a^n > b^n$.

3° Établir que si $k < a < b < l$ on a :

$$nk^{n-1}(b - a) < b^n - a^n < nl^{n-1}(b - a).$$

43. Soient n entiers $a, b, c \dots, h, k, l$ tels que $b - a = c - b = \dots = l - k = r$.

1° Calculer le p ième entier de la suite et en particulier l en fonction de a, r, p ou n.

2° Démontrer que : $a + l = b + k = c + h \dots$ et que la somme S des n entiers vérifie :

$$2S = n(a + l).$$

En déduire que : $S = na + \dfrac{n(n - 1)r}{2}$,

44. 1° Si les entiers naturels non nuls a, b et n vérifient la relation :

$$ab = (a + b)n \quad \text{on a} : a > n \text{ et } b > n.$$

2° Que devient la relation précédente quand on pose $a = n + X$ et $b = n + Y$?

3° Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $ab = 6(a + b)$.

45. 1° Démontrer que si les entiers naturels non nuls x, y, m et p vérifient la relation :

$$xy = px + my \quad \text{on a} : \quad x > m \text{ et } y > p.$$

Transformer la relation en posant : $x = m + X$, $y = p + Y$.

2° Déterminer les couples d'entiers (x, y) tels que $xy = 3x + 5y$.

46. 1° Transformer la relation $xy = px + my + 9$ en posant $x = m + X$ et $y = p + Y$.

2° Résoudre en entiers l'équation : $xy = 4x + 2y + 7$.

47. Un ensemble $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ satisfait aux axiomes de Peano dans lesquels l'axiome 3 a été remplacé par : « *4 admet* 0 *pour suivant* ».

1° Montrer que la somme $a + b$ et le produit ab dans K ne sont autres que les restes de la division par 5 de $a + b$ et de ab dans N. Établir les tables d'addition et de multiplication dans K.

2° Montrer que K est un groupe additif abélien, que $K^* = \{1, 2, 3, 4\}$ est un groupe multiplicatif abélien, et que K a une structure de corps.

3° Établir dans le corps K la table des puissances a^b pour $a \in K^*$ et $b \in K$. Étudier les solutions des équations : $x^b = a$ et $b^x = a$.

48. Étudier comme à l'exercice précédent l'ensemble $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec $\dot{6} = 0$.

49. Étudier de même l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $\dot{5} = 0$. Quelle est cette fois la structure de l'ensemble A ?

50. Démontrer les formules suivantes :

1° $C_m^p = \frac{m}{p} C_{m-1}^{p-1} = \frac{m(m-1)}{p(p-1)} C_{m-2}^{p-2}$.

2° $C_m^p = C_{m-2}^p + 2\, C_{m-2}^{p-1} + C_{m-2}^{p-2}$. (Procéder par raisonnement en distinguant deux éléments A et B des $m - 2$ autres).

3° $C_m^p = C_{m-3}^p + 3\, C_{m-3}^{p-1} + 3\, C_{m-3}^{p-2} + C_{m-3}^{p-3}$.

51. Soit h un entier inférieur à l'entier p. On suppose que, parmi les m éléments d'un ensemble, il y en a h distincts des $m - h$ autres.

1° Montrer que toute combinaison p à p des m éléments de l'ensemble est la réunion d'une combinaison x à x des h premiers éléments et d'une combinaison $p - x$ à $p - x$ des $m - h$ derniers :

2° En déduire que : $C_m^p = \sum_{x=0}^{h} C_h^x C_{m-h}^{p-x}$.

52. 1° Démontrer que le nombre S_m des sous-ensembles (y compris $\emptyset$ et E_m) d'un ensemble E_m formé de m éléments est le double du nombre S_{m-1} des sous-ensembles de E_{m-1} composé de $(m - 1)$ éléments.

2° En déduire que : $S_m = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$.

3° Démontrer que $S'_m = C_m^0 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots$ et $S''_m = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \ldots$ sont égaux pour m impair et aussi pour m pair. Établir que $S'_m = S''_m = 2^{m-1}$.

53. 1° Calculer $(1 + 1)^m$ et $(1 - 1)^m$ en fonction des valeurs S_m, S'_m et S''_m de l'exercice précédent.

2° En déduire ainsi les valeurs de S_m, S'_m et S''_m.

54. 1° Soient des entiers a, b, p tels que $p \leqslant a$ et $p \leqslant b$. Démontrer la formule :

$$C_{a+b}^p = \sum_{x=0}^{p} C_a^x C_b^{p-x}$$

2° On suppose $a = b = p = n$. En déduire la relation :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

55. Démontrer que si l'entier p est un nombre premier, C_p^x est un multiple de p pour tout x tel que $0 < x < p$.

2° En déduire que pour p premier, $(a + b)^p - (a^p + b^p)$ est multiple de p quels que soient les entiers a et b.

3° Démontrer par récurrence que quel que soit l'entier $a \in N$, la différence $a^p - a$ est divisible par le nombre premier p (*Théorème de Fermat*).

4e Leçon

L'ANNEAU Z DES ENTIERS RELATIFS

69. Introduction. — Nous allons symétriser pour l'addition, l'ensemble N des entiers naturels, c'est-à-dire construire à partir de N, un nouvel ensemble Z où tout élément aura un opposé et dans lequel nous pourrons inclure N.

On parvient à ce but en étendant aux différents couples d'entiers naturels (a, b) les propriétés (égalité, somme, produit) des différences d'entiers naturels $(a - b)$ (n° 57, 3°).

70. Relation d'équivalence. — ***Dans l'ensemble*** N^2 ***des couples ordonnés*** (a, b) ***d'entiers naturels, l'égalité*** $a + b' = b + a'$ ***définit une relation d'équivalence*** $\mathcal{R}$ ***entre les couples*** (a, b) ***et*** (a', b').

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(a', b') \Longleftrightarrow a + b' = b + a'.$$

En effet, la relation ainsi définie est (n° 5) :

1° *Réflexive* car $a + b = b + a \Longrightarrow (a, b)\,\mathcal{R}\,(a, b)$

2° *Symétrique* car $a + b' = b + a' \Longrightarrow a' + b = b' + a$

Soit : $(a, b)\,\mathcal{R}\,(a', b') \Longrightarrow (a', b')\,\mathcal{R}\,(a, b)$

3° *Transitive* car $a + b' = b + a'$ et $a' + b'' = b' + a''$ entraînent :

$$a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a'' \Longrightarrow a + b'' = b + a''$$

Donc : $(a, b)\,\mathcal{R}\,(a', b')$ et $(a', b')\,\mathcal{R}\,(a'', b'') \Longrightarrow (a, b)\,\mathcal{R}\,(a'', b'')$.

71. Définition. — ***On appelle entier relatif, la classe d'équivalence*** $\alpha(a, b)$ ***des éléments de*** N^2 ***équivalents au couple*** (a, b) ***modulo*** $\mathcal{R}$.

L'ensemble Z des entiers relatifs est donc l'ensemble quotient $\dfrac{N^2}{\mathcal{R}}$.

Dans la présente leçon, nous conviendrons de désigner cette classe $\alpha(a, b)$ par l'un quelconque de ses éléments et d'écrire :

$$\alpha = (a, b) \quad \text{ou} \quad \alpha = (a', b') \quad \text{si} \quad (a, b)\,\mathcal{R}\,(a', b').$$

Ainsi : $\boxed{(a, b) = (a', b')} \Longleftrightarrow \boxed{a + b' = b + a'}$

L'égalité : $a + (b + k) = b + (a + k)$ montre que : $\boxed{(a, b) = (a + k, b + k)}$ et par suite $(a, b) = (a - k, b - k)$ lorsque les deux différences $a - k$ et $b - k$ sont possibles en entiers naturels.

1° Si $a > b$ on obtient : $(a, b) = (a - b, 0) = (n, 0)$. L'entier relatif $(a, b) = (n, 0)$ est dit *positif* et s'écrit n^+.

2° Si $a < b$, on obtient : $(a, b) = (0, b - a) = (0, n)$. L'entier relatif $(a, b) = (0, n)$ est dit *négatif* et s'écrit n^-.

3° Si $a = b$, l'entier relatif $(a, a) = (0, 0)$ est l'entier relatif nul, 0^+ ou 0^-.

L'entier naturel, $n = a - b$ ou $b - a$ qui intervient dans les formes réduites $(n, 0)$ et $(0, n)$ est *la valeur absolue* de l'entier relatif $\alpha = (a, b)$. On écrit $n = |\alpha|$. La valeur absolue de $(0, 0)$ est 0. On voit (n° 70, 3°) que :

Deux entiers relatifs égaux ont même forme réduite et par suite même valeur absolue et même signe.

On désigne par Z^+ l'ensemble formé par les entiers positifs et $(0, 0)$, c'est-à-dire pouvant s'écrire $(n, 0)$ avec $n \in N$, par Z^- l'ensemble formé par les entiers négatifs et $(0, 0)$ pouvant s'écrire $(0, n)$. Enfin Z^* désigne l'ensemble des entiers relatifs non nuls, autres que $(0, 0)$.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

72. Addition. — ***C'est une loi de composition interne dans Z définie par :***

$$\boxed{(a, b) + (a', b') \equiv (a + a', b + b')}$$

La somme de deux entiers relatifs ne change pas si on remplace l'un d'eux par un entier relatif égal. Si par exemple : $(a'', b'') = (a', b')$ l'égalité $a'' + b' = b'' + a'$ montre que (n° 71) :

$$(a + a', b + b') = (a + a' + a'' + b', b + b' + b'' + a') = (a + a'', b + b'')$$

c'est-à-dire que : $(a, b) + (a', b') = (a, b) + (a'', b'')$. On dit que l'addition est stable. En opérant sur les formes réduites, on voit que :

1° $$m^+ + n^+ = (m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0) = (m + n)^+$$
$$m^- + n^- = (0, m) + (0, n) = (0, m + n) = (m + n)^-$$

2° $$\begin{cases} m^+ + n^- = (m, 0) + (0, n) = (m, n) \\ n^- + m^+ = (0, n) + (m, 0) = (m, n) \end{cases}$$

Or (m, n) est égal à $\begin{cases} (m - n, 0) = (m - n)^+ & \text{pour } m > n. \\ (0, n - m) = (n - m)^- & \text{pour } m < n. \end{cases}$

On retrouve la règle d'addition des nombres relatifs admise dans les classes antérieures.

73. Propriétés de l'addition.

1° *L'addition est associative* car les deux sommes $[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'')$ et $(a, b) + [(a', b') + (a'', b'')]$ sont égales à $(a + a' + a'', b + b' + b'')$.

2° *L'addition est commutative* car $(a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$ donc :

$$(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b).$$

3° *L'addition admet un élément neutre* $(n, n) = (0, 0)$ car :
$(0, 0) + (a, b) = (a, b) + (0, 0) = (a, b)$. Cet élément neutre est unique (n° 27, 1°).

4° *Tout entier relatif* $\alpha = (a, b)$ *admet un opposé* $\tilde{\alpha} = (b, a)$.
$\alpha + \tilde{\alpha} = (a, b) + (b, a) = (a + b, b + a) = (0, 0)$. Cet opposé est unique (n° 27, 2°).
$\alpha = (m, 0) = m^+$ admet pour opposé $\tilde{\alpha} = (0, m) = m^-$.

Deux entiers relatifs opposés ont même valeur absolue et des signes différents.

L'ensemble Z des entiers relatifs a une structure de groupe additif abélien.

Les quatre propriétés ci-dessus montrent que l'addition des entiers relatifs est une loi de groupe commutatif (n° 32).

74. Somme de plusieurs entiers relatifs. — L'addition étant une loi de groupe (n° 33), il en résulte que :

Dans une somme de plusieurs entiers relatifs on peut modifier d'une manière quelconque l'ordre des termes ou remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur somme effectuée.

Ainsi pour des entiers relatifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$...

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \beta + \varepsilon + \delta + \alpha + \gamma = (\beta + \varepsilon) + (\delta + \alpha + \gamma).$$

75. Soustraction. — L'addition des entiers relatifs étant une loi de groupe abélien (n° 33, 3°) :

Étant donné deux entiers relatifs α et β, il existe un entier relatif unique $x = \alpha + \tilde{\beta}$, tel que $\alpha = \beta + x$, appelé différence de α et β.

$$\boxed{x = \alpha - \beta} \iff \boxed{\alpha = \beta + x} \iff \boxed{x = \alpha + \tilde{\beta}}$$

Pour retrancher un entier relatif, il suffit d'ajouter son opposé.

La soustraction est une loi de composition interne dans Z définie pour tout couple ordonné d'entiers relatifs (α, β).

1° $\alpha - \alpha = \alpha + \tilde{\alpha} = (0, 0)$.
La différence de deux entiers relatifs égaux est nulle.

2° Si $\alpha = (a, b)$ et $\beta = (c, d)$ on obtient :

$$\alpha - \beta = \alpha + \tilde{\beta} = (a, b) + (d, c) = (a + d, b + c)$$
$$\beta - \alpha = \beta + \tilde{\alpha} = (c + d) + (b + a) = (b + c, a + d)$$

Les deux différences $\alpha - \beta$ *et* $\beta - \alpha$ *sont opposées.*

76. Sommes algébriques. — ***Une somme algébrique est le résultat d'une suite d'additions et de soustractions à effectuer dans l'ordre des termes.***

1° *Une telle somme algébrique se ramène à une suite d'additions* et possède les propriétés de commutativité et d'associativité des sommes (n° 68).

$$S = \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon = \alpha + \beta + \tilde{\gamma} + \delta + \tilde{\varepsilon} = \alpha + \tilde{\gamma} + \delta + \tilde{\varepsilon} + \beta$$

Soit : $S = (\alpha + \tilde{\gamma}) + (\delta + \tilde{\varepsilon} + \beta) = (\alpha - \gamma) + (\delta - \varepsilon + \beta)$.

2° *L'opposé d'une somme algébrique de plusieurs entiers relatifs est égal à la somme algébrique de leurs opposés.*

$$(\alpha - \beta + \gamma) + (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) = (\alpha + \tilde{\beta} + \gamma) + (\tilde{\alpha} + \beta + \tilde{\gamma})$$
$$= (\alpha + \tilde{\alpha}) + (\tilde{\beta} + \beta) + (\gamma + \tilde{\gamma}) = (0, 0).$$

3° Il en résulte que :

a) $\alpha + (\beta - \gamma + \delta) = \alpha + (\beta + \tilde{\gamma} + \delta) = \alpha + \beta + \tilde{\gamma} + \delta = \alpha + \beta - \gamma + \delta$

b) $\alpha - (\beta - \gamma + \delta) = \alpha + (\tilde{\beta} - \tilde{\gamma} - \tilde{\delta}) = \alpha + \tilde{\beta} - \tilde{\gamma} + \tilde{\delta} = \alpha - \beta + \gamma - \delta$

On retrouve *la règle de suppression des parenthèses* lorsqu'il s'agit d'ajouter ou de retrancher une somme algébrique.

77. Isomorphisme de Z^+ et N pour l'addition. — A tout entier positif ou nul $(m, 0) \in Z^+$, faisons correspondre l'entier naturel $m \in N$. *Cette correspondance est bijective* car tout élément de chacun des ensembles Z^+ et N est ainsi associé à un élément unique de l'autre.

Or à la somme $m + n$ des entiers naturels m et n correspond l'entier relatif $(m + n, 0)$ somme des entiers relatifs $(m, 0)$ et $(n, 0)$ associés à m et n. Dans la correspondance envisagée, *les ensembles* N *et* Z^+ *sont isomorphes pour l'addition.* Nous verrons plus loin qu'ils le sont aussi pour les relations d'ordre et la multiplication. C'est pourquoi on identifie ces deux ensembles, et on écrit :

$$N = Z^+ \Longrightarrow N \subset Z.$$

L'entier positif ou nul $(m, 0)$ est identique à l'entier naturel m.

Ainsi l'entier relatif nul $(0, 0)$ s'écrit 0 *(zéro)*.

$n^+ = (n, 0) = 0 + n$ s'écrit n ou $+n$ *(entier positif)*.

$n^- = (0, n) = 0 - (n, 0) = 0 - n$ s'écrit $-n$ *(entier négatif)*.

On étend ces conventions de signes à tout entier relatif.

$\alpha = 0 + \alpha$ s'écrit $+\alpha$ et $\tilde{\alpha} = 0 - \alpha$ s'écrit $-\alpha$.

L'opposé de $+\alpha$ est donc $-\alpha$. Ainsi $\alpha + \beta - \gamma$ s'écrit $\alpha + \beta + (-\gamma)$.

D'autre part : $\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) - (b, 0) = a - b$.

Tout entier relatif (a, b) est la différence, dans Z, des entiers naturels a et b.

78. Relations d'inégalité dans Z. — ***Étant donné deux entiers relatifs distincts α et β on dit que α est supérieur à β ou que β est inférieur à α si la différence $\alpha - \beta$ est positive :***

$$\left.\begin{array}{r} \alpha - \beta = (n, 0) \\ n \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \beta < \alpha \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{(Inégalités} \\ \text{au sens strict)}\end{array}$$

En particulier : $\alpha - 0 = \alpha$ montre que :

Tout entier positif est supérieur à 0 et tout entier négatif est inférieur à 0.

Donc : $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta > 0$ ou $\beta - \alpha < 0$.

On définit de même les inégalités au sens large :

$$\alpha \geqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \geqslant 0 \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in Z^+ \quad \text{ou} \quad \beta - x \in Z^-.$$

79. Théorème. — ***La relation d'inégalité ($\geqslant$ ou $\leqslant$) est une relation d'ordre total au sens large dans l'ensemble Z des entiers relatifs.***

1° *Elle est réflexive :* $\alpha \geqslant \alpha$ puisque $\alpha = \alpha$.

2° *Elle est antisymétrique* car $\alpha \geqslant \beta$ et $\beta \leqslant \alpha$ entraînent, la première $\alpha - \beta \in Z^+$ et la seconde $\alpha - \beta \in Z^-$, soit $\alpha - \beta = 0$ et $\alpha = \beta$.

3° *Elle est transitive* car $\alpha \geqslant \beta$ et $\beta \geqslant \gamma$ entraînent $\alpha - \beta \geqslant 0$ et $\beta - \gamma \geqslant 0$ soit

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \geqslant 0 \Longrightarrow \alpha - \gamma \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha \geqslant \gamma.$$

4° *Tout couple d'entiers relatifs* (α, β) *vérifie soit* $\alpha \geqslant \beta$ *soit* $\beta \geqslant \alpha$.

Car la différence $\alpha - \beta$ est un élément de Z^+ ou de Z^-.

80. Remarque. — On verrait de même que la relation d'inégalité ($>$ ou $<$) est une relation d'ordre total au sens strict. D'ailleurs si $\alpha - \beta = (a, b)$:

$$a > b \Longleftrightarrow \alpha > \beta, \qquad a = b \Longleftrightarrow \alpha = \beta \quad \text{et} \quad a < b \Longleftrightarrow \alpha < \beta.$$

L'ensemble Z des entiers relatifs est totalement ordonné. Notons qu'il n'y a pas dans Z d'*élément maximal* ni d'*élément minimal,* c'est-à-dire d'élément supérieur ou inférieur à tous les autres. La suite des entiers relatifs est illimitée dans les deux sens.

81. Corollaires. — 1° $(m, 0) - (n, 0) = (m, n)$ est positif ou négatif suivant que l'entier naturel m est supérieur ou inférieur à n.

Deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs valeurs absolues.

On vérifie l'isomorphisme de Z^+ et N pour la relation d'ordre ($>$ ou $<$).

2° $(m, 0) - (0, n) = (m, 0) + (n, 0) = (m + n, 0) = (m + n)^+$.

Tout entier positif est supérieur à tout entier négatif.

3° $(0, m) - (0, n) = (0, m) + (n, 0) = (n, m)$ est positif ou négatif suivant que m est inférieur ou supérieur à n.

Deux entiers négatifs sont dans l'ordre inverse de leurs valeurs absolues.

Ainsi : $$-13 < -7 < 0 < +5 < +21.$$

MULTIPLICATION ET DIVISION.

82. Multiplication. — ***C'est une loi de composition interne dans Z définie par :***

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba'). \qquad \text{(Cf. n° 57, 3°).}$$

Le produit de deux entiers relatifs ne change pas si l'on remplace un des facteurs par un facteur égal. Si par exemple $(a', b') = (a'', b'') \Longleftrightarrow a' + b'' = b' + a''$, le produit $(a, b)(a'', b'') = (aa'' + bb'', ab'' + ba'')$ est égal à $(a, b)(a', b')$ car l'égalité :

$$(aa' + bb') + (ab'' + ba'') = (ab' + ba') + (aa'' + bb'')$$

ou :

$$a(a' + b'') + b(b' + a'') = a(b' + a'') + b(a' + b'')$$

est une conséquence de l'égalité : $a' + b'' = b' + a''$. La multiplication est donc une opération stable. En opérant sur les formes réduites, on voit que :

$$(m^+)(n^+) = (m, 0)(n, 0) = (mn, 0) = (mn)^+$$
$$(m^-)(n^-) = (0, m)(0, n) = (mn, 0) = (mn)^+$$
$$(m^+)(n^-) = (m, 0)(0, n) = (0, mn) = (mn)^-$$
$$(m^-)(n^+) = (0, m)(n, 0) = (0, mn) = (mn)^-.$$

Le produit de deux entiers relatifs est égal au produit de leurs valeurs absolues affecté du signe + ou du signe —, selon que les deux facteurs sont de même signe ou non.

On retrouve la règle connue admise dans les classes antérieures.

Or : $(a, b)(0, 0) = (0, 0)(a, b) = (0, 0)$. Donc : $\alpha.0 = 0.\alpha = 0$.

Il en résulte que :

L'ensemble Z^+ des entiers positifs (ou nul) et l'ensemble N des entiers naturels sont isomorphes pour la multiplication.

Notons que le produit de plusieurs entiers relatifs est égal au produit de leurs valeurs absolues affecté du signe + s'il existe un nombre pair ou nul de facteurs négatifs, du signe — s'il existe un nombre impair de facteurs négatifs.

83. Propriétés de la multiplication.

1° *La multiplication est commutative et associative.*

$$\boxed{\alpha\beta = \beta\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)}$$

Ceci résulte de l'égalité des valeurs absolues et de l'identité des signes des deux membres.

2° *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

$$\boxed{(\alpha + \beta)\mu = \mu(\alpha + \beta) = \alpha\mu + \beta\mu.}$$

Posons : $\alpha = (a, b)$, $\beta = (a', b')$ et $\mu = (m, n)$:

$$\begin{aligned}\mu(\alpha + \beta) &= (m, n)(a + a', b + b') = [m(a + a') + n(b + b'), m(b + b') + n(a + a')] \\ &= [(ma + nb) + (ma' + nb'), (mb + na) + (mb' + na')] \\ &= (ma + nb, mb + na) + (ma' + nb', mb + na') \\ &= (m, n)(a, b) + (m, n)(a', b') = \mu\alpha + \mu\beta.\end{aligned}$$

3° *La multiplication possède un élément neutre* $(1, 0) = +1 = 1$.

$$(a, b)(1, 0) = (1, 0)(a, b) = (a, b).$$

Cet élément est unique (n° 27, 2°).

4° *Tout entier relatif différent de* $+1$ ou -1 *n'admet pas d'inverse.*

En effet (n° 58) : $\alpha\beta = 1 \Longrightarrow |\alpha||\beta| = 1 \Longrightarrow |\alpha| = |\beta| = 1$. Les entiers relatifs $+1$ et -1 sont à eux-mêmes leur propre inverse. Donc : $\alpha\beta = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \pm 1$.

Notons que : $(a, b)(0, 1) = (b, a)$ donc : $\alpha.(-1) = -\alpha$.

84. Conclusion. — ***L'ensemble Z des entiers relatifs a une structure d'anneau commutatif ordonné.***

L'ensemble Z a une structure de groupe abélien pour l'addition, mais non pour la multiplication. Celle-ci étant commutative, associative et distributive par rapport à l'addition on voit que Z est un anneau commutatif (nº 35) et ordonné (nº 80).

On peut même ajouter que cet anneau est unitaire.

85. Produit de plusieurs facteurs. — 1º Il résulte du nº 83 (1º) que dans un produit de plusieurs entiers relatifs on peut modifier l'ordre des facteurs ou remplacer deux ou plusieurs d'entre eux par leur produit effectué (nº 33).

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \beta\delta\alpha\varepsilon\gamma = (\beta\delta\alpha)(\varepsilon\gamma).$$

2º *Pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit nul il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

$$\alpha\beta\gamma = 0 \Longleftrightarrow |\alpha|\,|\beta|\,|\gamma| = 0 \Longleftrightarrow |\alpha|,\ |\beta| \text{ ou } |\gamma| = 0 \Longleftrightarrow \alpha,\ \beta \text{ ou } \gamma = 0.$$

3º Les relations $\mu\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\mu = (-1)\,\alpha\mu = -\alpha\mu$ et $(\alpha + \beta + \gamma)\,\mu = \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu$ entraînent :

$$(\alpha - \beta + \gamma)\,\mu = \alpha\mu - \beta\mu + \gamma\mu$$

et par suite :

$$(\alpha - \beta + \gamma)\ (x - y) = \alpha x - \beta x + \gamma x - \alpha y + \beta y - \gamma y.$$

Pour multiplier deux sommes algébriques on peut multiplier chaque terme de l'une successivement par chaque terme de l'autre et faire la somme des résultats obtenus.

86. Division des entiers relatifs. — Si $\alpha = \beta\mu$, on dit que l'entier relatif μ est le quotient exact de α par β :

$$\alpha : \beta = \mu \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \beta\mu.$$

Or $\alpha = \beta\mu \Longrightarrow |\alpha| = |\beta|\,.\,|\mu|$. La division de α par β n'est possible que si $|\alpha|$ est divisible par $|\beta|$ (nº 58) et on a alors : $|\mu| = |\alpha| : |\beta|$. D'autre part on voit aisément que le quotient μ est positif ou négatif suivant que α et β sont de même signe ou non. *La règle des signes dans la division est la même que dans la multiplication.*

87. Puissances entières d'entiers relatifs. — La définition et les propriétés des puissances entières d'entiers naturels (nºˢ 59 et 60) s'étendent aux entiers relatifs. De plus :

$$\forall p \in N : \quad (+m)^p = +m^p$$

$$(-m)^p = (-1)^p . m^p = \begin{cases} +m^p & \text{si } p \text{ est pair.} \\ -m^p & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc toute puissance α^p d'exposant pair est positive, toute puissance α^p d'exposant impair est du signe de l'entier relatif α.

88. Propriétés des égalités dans Z.

1º *Les égalités* $\alpha = \beta$ et $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ *sont équivalentes.*

En effet : $(\alpha + \beta) - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta$. Donc : $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Il en résulte que tout entier relatif est ***régulier*** pour l'addition (nº 27, 3º).

Donc $\alpha + \beta = \gamma \Longleftrightarrow \alpha + \beta + \bar{\beta} = \gamma + \bar{\beta} \Longleftrightarrow \alpha = \gamma - \beta$. On peut *transposer* un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.

2° *On peut ajouter membre à membre des égalités entre entiers relatifs.*

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad \gamma = \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

3° *Pour* $\gamma \neq 0$, *les égalités* $\alpha = \beta$ *et* $\alpha\gamma = \beta\gamma$ *sont équivalentes.*

$$\forall \gamma \in Z : \quad \alpha = \beta \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma \qquad (\text{n}^o\ 82).$$

Pour $\gamma \neq 0$: $\alpha\gamma = \beta\gamma \Longrightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma = 0 \Longrightarrow (\alpha - \beta)\gamma = 0$, donc $\alpha - \beta = 0$, si $\gamma \neq 0$.
Tout entier relatif non nul est *régulier* pour la multiplication.

4° *On peut multiplier membre à membre des égalités entre entiers relatifs.*

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad \alpha' = \beta' \Longrightarrow \alpha\alpha' = \beta\alpha' = \beta\beta' \Longrightarrow \alpha\alpha' = \beta\beta'.$$

En particulier : $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha^n = \beta^n$.

Signalons que la réciproque $\alpha^n = \beta^n \Longrightarrow \alpha = \beta$ est vraie pour des entiers naturels (n° 61) donc pour α et $\beta \in Z^+$.

89. Propriétés des inégalités dans Z.

1° *Les inégalités* $\alpha > \beta$ *et* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ *sont équivalentes.*

Car les différences $\alpha - \beta$ et $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ sont égales, donc de même signe.

Par suite : $\alpha + \beta > \gamma \Longleftrightarrow \alpha + \beta + \bar{\beta} > \gamma + \bar{\beta} \Longleftrightarrow \alpha > \gamma - \beta$.

On peut *transposer* un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer son signe.

2° *On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.*

$$\alpha \geqslant \beta \quad \text{et} \quad \gamma \geqslant \delta \Longrightarrow \alpha - \beta \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \gamma - \delta \geqslant 0$$

donc : $(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) \geqslant 0$ soit : $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) \geqslant 0$ et $\alpha + \gamma \geqslant \beta + \delta$.

3° *L'inégalité* $\alpha > \beta$ *est équivalente à* $\mu\alpha > \mu\beta$ *si* μ *est positif, à* $\mu\alpha < \mu\beta$ *si* μ *est négatif.*

a) $\mu > 0$: $\alpha - \beta > 0 \Longleftrightarrow \mu(\alpha - \beta) > 0 \Longleftrightarrow \mu\alpha - \mu\beta > 0$

donc $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \mu\alpha > \mu\beta$.

b) $\mu < 0$: $\alpha - \beta > 0 \Longleftrightarrow \mu(\alpha - \beta) < 0 \Longleftrightarrow \mu\alpha - \mu\beta < 0$

donc $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \mu\alpha < \mu\beta$.

4° *On peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens dont les deux membres sont positifs.*

$$0 < \alpha < \beta \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < \delta \Longrightarrow 0 < \alpha\gamma < \beta\gamma \quad \text{et} \quad 0 < \beta\gamma < \beta\delta$$

donc : $0 < \alpha\gamma < \beta\delta$.

En particulier si α et β sont des entiers positifs non nuls,

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha^n < \beta^n \ (\text{n}^o\ 61).$$

EXERCICES

N.B. *Les exercices* n°s 56 *à* 59 *constituent une étude directe de* Z *analogue à celle de* N.

56. On suppose qu'il existe un ensemble unique Z d'entiers relatifs tels que :

I. Zéro (0) est un entier relatif.

II. Tout entier relatif a admet un suivant unique $a^{\cdot}$ et un précédent unique ${}^{\cdot}a$.
Les suivants successifs de 0 sont dits positifs : $0^{\cdot} = 1$, $1^{\cdot} = 2$, $2^{\cdot} = 3$...

Les précédents successifs de 0 sont dits négatifs : ${}^{\cdot}0 = \bar{1}$, ${}^{\cdot}\bar{1} = \bar{2}$, ${}^{\cdot}\bar{2} = \bar{3}$...

III. Aucun entier positif n'est le précédent d'un entier négatif.

IV. Tout sous-ensemble non vide de Z contenant le suivant $n^{\cdot}$ et le précédent ${}^{\cdot}n$ de chacun de ses éléments n est identique à Z.

1° Démontrer que dans Z : $a = b \Longleftrightarrow a^{\cdot} = b^{\cdot} \Longleftrightarrow {}^{\cdot}a = {}^{\cdot}b$.

2° Pour qu'une propriété P (n) soit vraie pour tout $n \in Z$, il faut et il suffit que P (0) ou P (a) soit vraie et qu'étant vraie pour n elle le soit pour $n^{\cdot}$ et aussi pour ${}^{\cdot}n$ *(récurrence étendue)*, donc que P $(n) \Longleftrightarrow$ P $(n^{\cdot})$ ou P $(n) \Longleftrightarrow$ P $({}^{\cdot}n)$.

57. *L'addition* dans Z est définie par : $a + 0 = a$ et $a + b^{\cdot} = (a + b)^{\cdot}$.

1° Démontrer que $a + {}^{\cdot}b = {}^{\cdot}(a + b)$, $a^{\cdot} = a + 1$, ${}^{\cdot}a = a + \bar{1}$
et que a et $b \in Z^+ \Longrightarrow a + b \in Z^+$, a et $b \in Z^- \Longrightarrow a + b \in Z^-$

2° Démontrer, en utilisant la récurrence étendue comme au n° 46, que l'addition est associative et commutative (on établira en particulier que $a + \bar{1} = \bar{1} + a$).

3° Établir la régularité de tout $a \in Z$ pour l'addition.

58. 1° Démontrer que $a^{\cdot} + {}^{\cdot}b = a + b$ et en partant de $0 + 0 = 0$ que l'on peut associer à tout élément n de Z^+, l'élément $\bar{n}$ de Z^-, tel que $\bar{n} + n = 0$.

2° Montrer que tout entier relatif a admet un opposé $\bar{a}$, et que l'ensemble Z *a une structure de groupe additif abélien.*

3° En déduire l'existence et l'unicité de la différence $x = a - b$ et les équivalences
$a \geqslant b \Longleftrightarrow a - b \in Z^+$ ou $b - a \in Z^- \Longleftrightarrow a - b \geqslant 0$ et que $\bar{a}$ s'écrit $0 - a = -a$.

59. La *multiplication* dans Z est définie par, $a \times 0 = 0$ et $a \times b^{\cdot} = ab + a$.

1° Démontrer que $a \times {}^{\cdot}b = ab + \bar{a}$. Si $a \in Z^+$, démontrer par récurrence que $a \times \bar{n} = -(a \times n)$ et retrouver la règle des signes.

2° Démontrer comme au n° 54, en utilisant la récurrence étendue, les propriétés de distributivité, associativité et commutativité de la multiplication dans Z.

3° L'ensemble Z a une structure d'anneau.

60. 1° Soient a et b deux entiers relatifs n'admettant pas de diviseurs communs autres que $+1$ et -1. Montrer que si $bx = ay$, les entiers relatifs x et y sont de la forme $x = ak$, $y = bk$ où k désigne un entier relatif quelconque.

2° Trouver deux entiers $x = \alpha$ et $y = \beta$ vérifiant : $3x - 4y = 7$ (1)
On pose $x = \alpha + X$, $y = \beta + Y$. En déduire la forme générale des entiers relatifs x et y vérifiant la relation (1).

— Résoudre de même les équations en entiers relatifs :

61. $5x + 3y = 9$.

62. $12x - 5y = 11$.

63. $3x - 5y = 7$.

64. $15x + 11y = 12$.

65. $7x + 4y = -3$.

66. $24x - 13y = 7$.

67. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) vérifiant : $xy = -15$.

68. Montrer que la relation (1) : $xy + 2x - 3y - 11 = 0$ peut s'écrire sous la forme : $(x - 3)(y + 2) = 5$. En déduire tous les couples d'entiers relatifs (x, y) vérifiant la relation (1).

— Reprendre l'exercice précédent pour :

69. $xy + 3x - 2y - 13 = 0$

70. $xy + 2x - y + 4 = 0$

71. $xy - x - 3y - 7 = 0$

72. $xy - x - 2y + 18 = 0$

73. $xy - 3x + 4y + 8 = 0$

74. $xy + 7x - 5y - 47 = 0$.

75. 1° Montrer que si x et y sont des entiers relatifs, $x + y$ et $x - y$ sont toujours de même parité.

2° En déduire les entiers relatifs, éléments de Z^+ tels que :

a) $x^2 - y^2 = 45$ *b*) $x^2 - y^2 = 60$ *c*) $x^2 - y^2 = 120$.

76. 1° Rechercher les entiers positifs x et y tels que : $x^2 + y^2 = k$ pour $k = 2, 5, 13, 17$ et 29 (nombres premiers de la forme $4m + 1$).

2° Sachant que : $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = (a\alpha + b\beta)^2 + (a\beta - b\alpha)^2 = (a\alpha - b\beta)^2 + (a\beta + b\alpha)^2$, montrer qu'à une solution de l'équation $x^2 + y^2 = k$ et une solution de l'équation $x^2 + y^2 = l$, on peut, en général associer deux solutions de l'équation $x^2 + y^2 = kl$. Étudier le cas où $k = l$, le cas où $k = 2$, $l \neq 2$, et le cas où $k = l = 2$.

3° En déduire le plus grand nombre possible de solutions de l'équation : $x^2 + y^2 = k$ pour $k = 65, 85, 221, 1105, 2\,210$ et $5\,525$.

77. Dans N on connaît : $\alpha^2 + \beta^2 = mk$ et $a^2 + b^2 = m$ avec m premier.

1° Montrer que $a^2\alpha^2 - b^2\beta^2$ et $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2$ sont divisibles par m.

2° En utilisant l'identité de l'exercice précédent, montrer que l'un des couples $(a\alpha + b\beta, a\beta - b\alpha)$ ou $(a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$ a ses deux éléments multiples de m et permet de trouver une solution de l'équation : $x^2 + y^2 = k$.

3° Sachant que : $36^2 + 37^2 = 2\,665$ et que $2^2 + 1^2 = 5$ trouver une solution de l'équation $x^2 + y^2 = 533$. Puis sachant que $533 = 13 \times 41$ trouver trois autres solutions de l'équation $x^2 + y^2 = 2\,665$ et montrer qu'il ne peut y en avoir d'autres.

78. On considère un ensemble $E = \{a, b, c\ldots\}$. On désigne par A, B, C... les sous ensembles de E et par $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$... leurs compléments dans E. Pour tout élément (m, a) du produit $Z \times E$, on pose $(m, a) = ma$ et on désigne par mA tout sous-ensemble de $mE = \{ma, mb, mc\ldots\}$. On définit dans l'ensemble V des sous-ensembles de $Z \times E$ les opérations suivantes :

a) L'addition d'ensembles disjoints : $mA + nB = (mA) \cup (nB)$ pour $A \cap B = \varnothing$;

b) La multiplication $(mA) \cdot (nB) = mn\,AB = mn\,(A \cap B)$;

c) Une loi de composition $\star$ distributive par rapport à l'addition, et telle que :

$$(mA) \star (nB) = mA + nB \text{ si } A \cap B = \varnothing \quad \text{et} \quad (mA) \star (nA) = (m + n)A.$$

1° Démontrer que la multiplication est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle admet pour élément neutre E. Est-ce une loi de groupe ?

Établir que : $A \cup B = E - \bar{A}\bar{B}$, $A \cup B \cup C = E - \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

2° En écrivant : $mA \star nB = (0.\bar{A} + mA) \star (0.\bar{B} + nB)$ montrer que la distributivité de la loi $\star$ entraîne : $mA \star nB = mA\bar{B} + n\bar{A}B + (m + n)AB$

$$mA \star nB \star pC = \Sigma m A\bar{B}\bar{C} + \Sigma (m + n) AB\bar{C} + (m + n + p) ABC.$$

Vérifier à l'aide de diagrammes et montrer en particulier que :

$$A \star B = A \cup B \star A \cap B, \quad A \star (-B) = A\bar{B} - \bar{A}B, \quad (-A) \star (-B) = -A \star B.$$

3° En déduire que la loi de composition $\star$ est une loi de groupe admettant pour élément neutre $\varnothing = 0.E$. Quel est le symétrique de mA ? Résoudre $mA = nB \star X$. Montrer que l'ensemble B a une structure d'anneau commutatif pour la loi de composition $\star$ et la multiplication.

LE CORPS Q DES NOMBRES RATIONNELS

90. Introduction. — Nous allons symétriser pour la multiplication, l'anneau Z des entiers relatifs, c'est-à-dire construire, à partir de Z, un nouvel ensemble Q où tout élément aura un inverse et dans lequel nous pourrons inclure Z.

On y parvient en étendant aux différents couples d'entiers relatifs (a, b) tels que $b \neq 0$ les propriétés des rapports entiers (nº 58). Rappelons que Z* désigne l'ensemble des entiers relatifs, éléments de Z, autres que 0.

91. Relation d'équivalence. — ***Dans l'ensemble*** $Z \times Z^*$ ***des couples ordonnés d'entiers relatifs*** (a, b) ***tels que*** $b \neq 0$, ***l'égalité*** $ab' = ba'$ ***définit une relation d'équivalence*** $\mathfrak{R}$ ***entre les couples*** (a, b) ***et*** (a', b').

$$(a, b)\ \mathfrak{R}\ (a', b') \iff ab' = ba'.$$

En effet cette relation (nº 5) est :

1º *Réflexive* car $ab = ba \Longrightarrow (a, b)\ \mathfrak{R}\ (a, b)$.

2º *Symétrique* car $ab' = ba' \Longrightarrow a'b = b'a$.
Donc : $(a, b)\ \mathfrak{R}\ (a', b') \Longrightarrow (a', b')\ \mathfrak{R}\ (a, b)$.

3º *Transitive* car $ab' = ba'$ et $a'b'' = b'a'' \Longrightarrow ab'a'b'' = ba'b'a''$
c'est-à-dire, tout au moins si $a' \neq 0$: $ab'' = ba''$.
Donc : $(a, b)\ \mathfrak{R}\ (a', b')$ et $(a', b')\ \mathfrak{R}\ (a'', b'') \Longrightarrow (a, b)\ \mathfrak{R}\ (a'', b'')$.
Pour $a' = 0$ la propriété reste vraie car on a alors : $a = a' = a'' = 0$.

92. Définition. — ***On appelle nombre rationnel la classe d'équivalence*** $\alpha(a, b)$ ***des éléments de*** $Z \times Z^*$ ***équivalents au couple*** (a, b) ***modulo*** $\mathfrak{R}$.

L'ensemble Q ***des rationnels est donc l'ensemble quotient*** $\dfrac{Z \times Z^*}{\mathfrak{R}}$.

Nous désignerons provisoirement cette classe $\alpha(a, b)$ par le symbole $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Donc : $$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}} \iff \boxed{ab' = ba'}$$

Nous dirons que a est le *numérateur*, b le *dénominateur* du rationnel $\binom{a}{b}$ dont les deux *termes* sont a et b.

Notons que :

1° $\binom{0}{a} = \binom{0}{b}$ car $0 . b = a . 0$ donc $\binom{0}{a} = \binom{0}{1}$.

Tout rationnel de numérateur nul est égal à $\binom{0}{1}$

2° $\binom{a}{n} = \binom{b}{n} \iff an = nb \iff a = b$ car $n \neq 0$.

Pour que deux rationnels de même dénominateur soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même numérateur.

93. Théorème. — ***On peut multiplier ou diviser les deux termes d'un rationnel par un même entier relatif non nul.***

Pour $k \neq 0$ l'égalité $(ak)b = (bk)a$ entraîne : $\boxed{\binom{ak}{bk} = \binom{a}{b}}$

1° Si $a = bn$ on a : $\binom{a}{b} = \binom{bn}{b} = \binom{n}{1}$. Le rationnel $\binom{a}{b}$ est dit *entier*.

2° $\binom{a}{b} = \binom{-a}{-b}$. On peut donc supposer que le dénominateur b est positif.

3° *On peut réduire deux plusieurs rationnels au même dénominateur.*

$\binom{a}{b}$ et $\binom{c}{d}$ sont respectivement égaux à $\binom{ad}{bd}$ et $\binom{bc}{bd}$

$\binom{a}{b}$, $\binom{a'}{b'}$ et $\binom{a''}{b''}$ sont respectivement égaux à $\binom{ab'b''}{bb'b''}$, $\binom{a'bb''}{b'bb''}$ et $\binom{a''bb'}{b''bb'}$.

OPÉRATIONS SUR LES RATIONNELS.

94. Addition des rationnels. — ***C'est une loi de composition interne dans Q définie par :***

$$\boxed{\binom{a}{b} + \binom{a'}{b'} = \binom{ab' + ba'}{bb'}} \qquad \text{(cf. n° 58)}$$

La somme de deux rationnels ne change pas si on remplace l'un deux par un rationnel égal. Si par exemple $\binom{a'}{b'} = \binom{a''}{b''}$ donc si $a'b'' = b'a''$, la somme $\binom{a}{b} + \binom{a'}{b'}$ est égale à $\binom{a}{b} + \binom{a''}{b''}$ car l'égalité : $\binom{ab' + ba'}{bb'} = \binom{ab'' + ba''}{bb''}$ ou

$(ab' + ba')\,bb'' = (ab'' + ba'')\,bb'$ se réduit à $ba'bb'' = ba''bb'$ soit à : $a'b'' = b'a''$.

On pourra donc opérer sur des rationnels de même dénominateur pour lesquels la loi d'addition s'écrit :

$$\boxed{\binom{a}{n} + \binom{b}{n} = \binom{a + b}{n}}$$

95. Propriétés de l'addition des rationnels.

1° *L'addition est associative* : En opérant sur des rationnels de même dénominateur :

$$\left[\binom{a}{n}+\binom{b}{n}\right]+\binom{c}{n}=\binom{a}{n}+\left[\binom{b}{n}+\binom{c}{n}\right]=\binom{a+b+c}{n}.$$

2° *L'addition est commutative* : $\binom{a}{n}+\binom{b}{n}=\binom{b}{n}+\binom{a}{n}=\binom{a+b}{n}.$

3° *L'addition possède un élément neutre* $\binom{0}{n}=\binom{0}{1}.$

En effet : $\binom{a}{b}+\binom{0}{1}=\binom{a}{b}+\binom{0}{b}=\binom{a+0}{b}=\binom{a}{b}.$

Cet élément neutre $\binom{0}{1}$ appelé *rationnel nul* est unique (n° 27, 1°).

4° *Tout rationnel* $\binom{a}{b}$ *admet pour opposé* $\binom{-a}{b}.$

$\binom{a}{b}+\binom{-a}{b}=\binom{a-a}{b}=\binom{0}{b}=\binom{0}{1}.$ Cet opposé est unique (n° 27, 1°).

Nous désignerons provisoirement par $\bar{\alpha}$ l'opposé du rationnel α.

L'ensemble* Q *des rationnels a une structure de groupe additif abélien (n° 32).

On en déduit les propriétés d'associativité et de commutativité d'une somme de plusieurs rationnels α, β, γ, δ...

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\beta+\varepsilon+\gamma+\alpha+\delta=(\beta+\varepsilon)+(\gamma+\alpha+\delta).$$

96. Soustraction. — L'addition des rationnels étant une loi de groupe abélien (n° 33, 4°), il en résulte que :

Étant donné deux rationnels α ***et*** β ***il existe un rationnel unique*** $x=\alpha+\bar{\beta}$ ***tel que*** $\alpha=\beta+x$, ***appelé différence de*** α ***et*** β.

$$\boxed{x=\alpha-\beta}\iff\boxed{\alpha=\beta+x}\iff\boxed{x=\alpha+\bar{\beta}}$$

Pour retrancher un rationnel il suffit d'ajouter son opposé. La soustraction est donc une loi de composition interne définie pour tout couple ordonné (α, β) de rationnels.

Les propriétés des différences et des sommes algébriques établies aux n°s 75 et 76 pour des entiers relatifs s'étendent aux rationnels.

97. Multiplication des rationnels. — ***C'est une loi de composition interne dans* Q *définie par :***

$$\boxed{\binom{a}{b}\cdot\binom{a'}{b'}=\binom{aa'}{bb'}.}\qquad\text{(cf. n° 58)}$$

Ce produit ne change pas lorsqu'on remplace l'un des facteurs par un facteur égal. Si par exemple $\binom{a'}{b'}=\binom{a''}{b''}$, l'égalité $a'b''=b'a''$ entraîne :

$$aba'b''=abb'a''\iff\binom{aa'}{bb'}=\binom{aa''}{bb''}\quad\text{soit}\quad\binom{a}{b}\binom{a'}{b'}=\binom{a}{b}\binom{a''}{b''}.$$

98. Propriétés de la multiplication des rationnels.

1° *La multiplication est associative.* En effet :

$$\left[\binom{a}{b}\binom{a'}{b'}\right]\binom{a''}{b''} = \binom{a}{b}\left[\binom{a'}{b'}\binom{a''}{b''}\right] = \binom{aa'a''}{bbb''}$$

2° *La multiplication est commutative* car : $\binom{aa'}{bb'} = \binom{a'a}{b'b}$.

donc $$\binom{a}{b}\binom{a'}{b'} = \binom{a'}{b'}\binom{a}{b}.$$

3° *La multiplication admet un élément neutre* $\binom{m}{m} = \binom{1}{1}$.

$\binom{a}{b}\binom{1}{1} = \binom{1}{1}\binom{a}{b} = \binom{a}{b}$. Cet élément neutre est unique (n° 27, 1°).

4° *Tout rationnel non nul* $\binom{a}{b}$ *admet pour inverse* $\binom{b}{a}$.

$\binom{a}{b}\binom{b}{a} = \binom{ab}{ab} = \binom{1}{1}$. L'inverse de $\binom{a}{b}$ est unique (n° 27, 2°).

Provisoirement nous désignerons par α' l'inverse du rationnel α.

5° *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*

Si $\alpha = \binom{a}{n}$, $\beta = \binom{b}{n}$ et $\gamma = \binom{c}{p}$ on voit que $(\alpha + \beta)\gamma$ s'écrit :

$$\left[\binom{a}{n} + \binom{b}{n}\right]\binom{c}{p} = \binom{a+b}{n}\binom{c}{p} = \binom{ac+bc}{np} = \binom{ac}{np} + \binom{bc}{np} = \binom{a}{n}\binom{c}{p} + \binom{b}{n}\binom{c}{p}$$

Donc : $$(\alpha + \beta)\gamma = \gamma(\alpha + \beta) = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Il résulte des quatre premières propriétés ci-dessus que (n° 32) :

L'ensemble Q^* ***des rationnels non nuls a une structure de groupe multiplicatif abélien.*** — D'autre part on déduit de ce qui précède, comme au n° 85, les propriétés de commutativité d'un produit de plusieurs rationnels ou la distributivité du produit d'une somme algébrique par un rationnel.

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \beta\delta\alpha\varepsilon\gamma = (\beta\delta\alpha)(\alpha\gamma)$$
$$(\alpha - \beta + \gamma)\mu = \mu(\alpha - \beta + \gamma) = \mu\alpha - \mu\beta + \mu\gamma$$
$$(\alpha - \beta + \gamma)(x - y) = \alpha x - \beta x + \gamma x - \alpha y + \beta y - \gamma y.$$

99. Théorème. — ***Pour qu'un produit de plusieurs rationnels soit nul il faut et il suffit que l'un d'entre eux soit nul.***

$\binom{a}{b}\binom{a'}{b'}\binom{a''}{b''} = \binom{0}{1} \iff \binom{aa'a''}{bb'b''} = \binom{0}{1} \iff aa'a'' = 0$ ce qui équivaut à :

$a = 0$, $a' = 0$ *ou* $a'' = 0$ donc à : $\binom{a}{b}$, $\binom{a'}{b'}$ ou $\binom{a''}{b''} = \binom{0}{1}$.

100. Division des rationnels. — La multiplication des rationnels étant une loi de groupe abélien (n° 33, 3°) il en résulte que :

Étant donné deux rationnels α et β (non nul) il existe un rationnel unique $x = \alpha\beta'$ tel que $\alpha = \beta x$, appelé quotient exact de α par β.

$$\boxed{x = \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}} \iff \boxed{\alpha = \beta x} \iff \boxed{x = \alpha\beta'}$$

Le symbole $\frac{\alpha}{\beta}$ est un *rapport.* On voit ainsi que :

Pour diviser α par un rationnel non nul β il suffit de multiplier α par l'inverse de β.

La division est donc une loi de composition interne dans Q, définie pour tout élément (α, β) de $Q \times Q^*$.

De l'égalité : $(\alpha - \beta + \gamma)\ \mu' = \alpha\mu' - \beta\mu' + \gamma\mu'$, il résulte que si μ' est l'inverse de μ :

$$\frac{\alpha - \beta + \gamma}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}.$$

101. Conclusion. — ***L'ensemble Q des nombres rationnels a une structure de corps commutatif*** (n° 36). En effet :

1° L'ensemble Q a une structure de groupe additif abélien (n° 95).

2° L'ensemble Q^* a une structure de groupe multiplicatif abélien (n° 98).

3° La multiplication dans Q est distributive par rapport à l'addition (n° 98, 5°).

On peut inclure l'anneau Z des entiers relatifs dans le corps Q des rationnels.

Associons au rationnel $\binom{a}{1}$ l'entier relatif a :

1° La somme $\binom{a}{1} + \binom{b}{1} = \binom{a+b}{1}$ est associée à la somme $a + b$.

2° Le produit $\binom{a}{1} \cdot \binom{b}{1} = \binom{ab}{1}$ est associé au produit ab.

L'ensemble des rationnels de dénominateur 1 et l'ensemble Z des entiers relatifs sont donc isomorphes (n° 29) pour l'addition ainsi que pour la multiplication. C'est pourquoi on identifie ces deux ensembles.

Tout rationnel $\binom{n}{1}$ est identique à l'entier relatif n.

Donc : $$\boxed{N \subset Z \subset Q.}$$

102. Notations définitives. — Nous écrirons :

$$\binom{a}{1} = a, \quad \binom{0}{1} = 0 \text{ (zéro)} \quad \text{et} \quad \binom{a}{a} = \binom{1}{1} = 1 \text{ (unité)}.$$

L'opposé $\tilde{\alpha}$ du rationnel α s'écrit $\tilde{\alpha} = 0 - \alpha$ soit : $\tilde{\alpha} = -\alpha$.

L'inverse α' du rationnel α s'écrit $\alpha' = 1 : \alpha$ soit : $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$.

Le rationnel $\alpha = \binom{a}{b} = \binom{a}{1}\binom{1}{b} = a : b$ s'écrit : $\alpha = \frac{a}{b}$.

Donc : $$\boxed{\binom{a}{b} = \frac{a}{b}}$$

Tout rationnel $\binom{a}{b}$ ***est donc le quotient exact*** $\frac{a}{b}$ ***dans*** Q, ***de son numérateur*** a ***par son dénominateur*** b.

Nous retrouvons ainsi la notation fractionnaire et les règles opératoires relatives aux fractions établies dans les classes antérieures :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' = ba' \qquad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'} \qquad \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - ba'}{bb'}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} \qquad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{ab'}{ba'}.$$

L'opposé du rationnel $\frac{a}{b}$ est $-\frac{a}{b}$ et son inverse $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

103. Signe d'un rationnel. — Par définition :

Un rationnel non nul $\frac{a}{b}$ ***est dit positif ou négatif suivant que ses deux termes sont de même signe ou non.***

Autrement dit le signe de $\frac{a}{b}$ est celui du produit ab (n° 82).

Cette convention est compatible avec l'inclusion de Z dans Q car si $\frac{a}{b} = n \in Z$, le signe de $\frac{a}{b}$ est bien celui de n (n° 86).

1° *Deux rationnels égaux sont de même signe.* En effet :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \implies ab.cd = (bc)^2 > 0.$$

Les deux produits ab et cd étant de même signe, il en est de même des rationnels donnés.

2° *On désigne par* Q^+ *l'ensemble formé par zéro et les rationnels positifs, par* Q^- *l'ensemble formé par zéro et les rationnels négatifs.*

Comme $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ on peut toujours supposer que b est positif. Dans ce cas le signe de $\frac{a}{b}$ est celui de a. En particulier $\frac{a}{1} = a$ montre que :

$$Z^+ \subset Q^+ \quad \text{et} \quad Z^- \subset Q^-.$$

3° Pour des rationnels de même dénominateur positif d, on voit que les signes de $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}$, $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}$, $\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{d}$ et $\frac{a}{d}:\frac{b}{d}$ sont respectivement ceux de $a+b$, $a-b$, ab et $\frac{a}{b}$.

Les règles des signes pour les opérations dans Q *sont donc les mêmes que pour les opérations dans* Z.

En particulier, un produit de plusieurs facteurs rationnels est positif ou négatif suivant qu'il contient un nombre pair (ou nul) ou bien un nombre impair de facteurs négatifs.

104. Relation d'inégalité dans le corps Q. — Par définition :

Le rationnel α est supérieur ou inférieur au rationnel β suivant que la différence $\alpha-\beta$ est positive ou négative.

Cette définition, compatible avec l'inclusion $Z \subset Q$ (n° 78) montre qu'un rationnel positif est supérieur à zéro tandis qu'un rationnel négatif est inférieur à zéro. On obtient les inégalités au sens strict ou au sens large :

$$\alpha > \beta \iff \alpha-\beta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha < \beta \iff \alpha-\beta < 0$$
$$\alpha \geqslant \beta \iff \alpha-\beta \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha \leqslant \beta \iff \alpha-\beta \leqslant 0.$$

Si $\alpha-\beta=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$ avec $n \in Z^+-\{0\}$, on voit que le signe de $\alpha-\beta$ est celui de $a-b$. Il en résulte que α et β sont dans le même ordre que a et b ce qui montre que la relation d'inégalité est une *relation d'ordre total dans* Q.

L'ensemble Q des rationnels constitue un corps commutatif ordonné.

105. Valeur absolue d'un rationnel. — ***La valeur absolue $|\alpha|$ du rationnel α est égale à α ou à $-\alpha$ suivant que α est positif ou négatif.***

$$|\alpha|=\alpha \text{ si } \alpha \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |\alpha|=-\alpha \text{ si } \alpha < 0.$$

Ainsi $\left|\frac{-3}{-7}\right|=\frac{3}{7}$ et $\left|\frac{-2}{5}\right|=\frac{2}{5}$. Notons que : $\boxed{\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}}$

106. Propriétés des valeurs absolues. — 1° ***La valeur absolue de la somme de deux rationnels est égale à la somme de leurs valeurs absolues ou à leur différence suivant que ces deux rationnels sont de même signe ou non.***

Soients : $\alpha=\frac{a}{n}$, $\beta=\frac{b}{n}$ avec $a, b \in Z$ et $n \in Z^+-\{0\}$

a) Si a et b sont de même signe :

$$|\alpha+\beta|=\frac{|a+b|}{|n|}=\frac{|a|+|b|}{n}=\frac{|a|}{n}+\frac{|b|}{n}=|\alpha|+|\beta|.$$

Si a et b sont de signes différents en supposant $|a| \geqslant |b|$:

$$|\alpha+\beta|=\frac{|a+b|}{n}=\frac{|a|-|b|}{n}=\frac{|a|}{n}-\frac{|b|}{n}=|\alpha|-|\beta|.$$

2° ***La valeur absolue d'une somme de plusieurs rationnels est au plus égale à la somme des valeurs absolues de chacun de ses termes.***

La propriété est immédiate pour deux termes car en supposant $|\alpha| \geqslant |\beta|$:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \quad \text{ou bien} \quad |\alpha + \beta| = |\alpha| - |\beta| < |\alpha| < |\alpha| + |\beta|.$$

Elle s'étend de proche en proche à un nombre quelconque de termes :

$$|\alpha + \beta + \gamma| \leqslant |\alpha + \beta| + |\gamma| \leqslant |\alpha| + |\beta| + |\gamma|.$$

Notons que l'égalité a lieu lorsque tous les termes sont de même signe.

3° ***La valeur absolue d'un produit ou d'un quotient de rationnels est égale au produit ou au quotient des valeurs absolues de chacun des termes.***

Si : $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$, $\gamma = \frac{e}{f}$ on obtient : $\alpha\beta\gamma = \frac{ace}{bdf}$, d'où :

$$|\alpha\beta\gamma| = \frac{|ace|}{|bdf|} = \frac{|a|\cdot|b|\cdot|e|}{|b|\cdot|d|\cdot|f|} = \frac{|a|}{|b|}\cdot\frac{|c|}{|d|}\cdot\frac{|e|}{|f|} = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|.$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad}{bc} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|a|\cdot|d|}{|b|\cdot|c|} = \frac{|a|}{|b|}:\frac{|c|}{|d|} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

En particulier : $\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$.

107. Propriétés des égalités et des inégalités dans Q. — Les propriétés des égalités et des inégalités dans l'anneau Z des entiers relatifs (n[os] 88 et 89) se démontrent de la même façon dans le corps Q des rationnels. En particulier tout rationnel non nul est régulier aussi bien pour l'addition que pour la multiplication.

En désignant par a, b, c, x, m des rationnels donnés :

$$\forall x \in Q \quad \begin{cases} a = b \iff a + x = b + x \\ a > b \iff a + x > b + x \end{cases}$$

$$\forall m \in Q^* \quad \begin{cases} a = b \iff am = bm \\ a > b \iff \begin{cases} am > bm & \text{pour } m > 0. \\ am < bm & \text{pour } m < 0. \end{cases} \end{cases}$$

108. Propriétés des rapports dans Q.

1° *Un rapport est invariant lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise ses deux termes par un même rationnel non nul.*

En désignant par a, b, c, m, x, y des rationnels donnés :

$$x = \frac{a}{b} \iff a = bx \iff am = bmx \iff x = \frac{am}{bm}$$

donc pour $m \neq 0$:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}}$$

Les rapports peuvent être simplifiés ou convertis au même dénominateur.

2° ***Pour que deux rapports soient égaux il faut et il suffit que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens.***

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \iff \frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd} \iff \boxed{ad=bc}$$

Donc : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \iff \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

3° *Dans une suite de rapports égaux, chacun d'eux est égal au rapport de la somme des umérateurs et de la somme des dénominateurs.*

Si : $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=x$, les égalités : $a=bx$, $a'=b'x$, $a''=b''x$ entraînent :

$$a+a'+a''=bx+b'x+b''x=(b+b'+b'')x \quad \text{soit :} \quad x=\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}$$

Plus généralement :

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{ma-na'+pa''}{mb-nb'+pb''}}$$

109. Opérations sur les rapports. — 1° ***Somme algébrique de rapports :*** On commence par les convertir au même dénominateur :

Si : $\frac{a}{n}=x$, $\frac{b}{n}=y$ et $\frac{c}{n}=z$, les égalités $a=nx$, $b=ny$ et $c=nz$ entraînent :

$$a-b+c=nx-ny+nz=n(x-y+z) \Longrightarrow x-y+z=\frac{a-b+c}{n}$$

donc : $$\boxed{\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a-b+c}{n}}$$

2° ***Produit de rapports :***

Si : $\frac{a}{b}=x$, $\frac{c}{d}=y$ et $\frac{e}{f}=z$ les égalités $a=bx$, $c=dy$ et $e=fz$ entraînent

$$ace=bdf\,.\,xyz$$

Soit : $xyz=\frac{ace}{bdf}$

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}}$$

3° ***Quotient de deux rapports :***

Si : $\frac{a}{b}=x$ et $\frac{c}{d}=y$ on voit que :

$$a=bx \text{ et } dy=c \Longrightarrow ady=bcx \Longrightarrow \frac{x}{y}=\frac{ad}{bc},$$

donc : $$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$

Donc : $1 : \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$. *L'inverse de* $\frac{c}{d}$ *est* $\frac{d}{c}$. D'où la règle :

Pour diviser par un rapport, il suffit de multiplier par son inverse.

110. Définitions. — 1° ***On appelle moyenne arithmétique et moyenne harmonique de deux nombres donnés** a **et** b **les deux nombres** m **et** h **définis par :***

$$\boxed{m = \frac{1}{2}(a + b)} \qquad et \qquad \boxed{\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

On voit que : $h = \frac{2\,ab}{a + b} \Longrightarrow mh = ab$. Si a et b sont positifs on vérifie aisément que

$$a < b \Longrightarrow a < h < m < b.$$

Ces moyennes se généralisent pour n nombres donnés $a, b, c ... l$:

$$m = \frac{1}{n}\Sigma\, a \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{n}\Sigma\,\frac{1}{a}.$$

2° ***On appelle birapport de quatre nombres** a, b, c, d **le symbole :***

$$(abcd) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b} = \frac{(a - c)\,(b - d)}{(a - d)\,(b - c)} = \frac{(ab + cd) - (ad + bc)}{(ab + cd) - (ac + bd)}$$

On vérifie aisément que : $(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$. On peut donc inverser simultanément les deux couples (a, b) et (c, d) ou les échanger sans modifier $(abcd)$.

Comme d'autre part : $(abcd) . (bacd) = 1$ et $(abcd) + (acbd) = 1$, il en résulte qu'avec les 4 nombres a, b, c, d on ne peut former que les 6 birapports distincts :

$$(abcd) = \lambda,\ (bacd) = \frac{1}{\lambda},\ (acbd) = 1 - \lambda,\ (cabd) = \frac{1}{1 - \lambda},\ (cbad) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \text{ et } (bcad) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

111. Puissances entières de rationnels. — La définition et les propriétés des puissances entières dans N (nos 59 et 60) s'étendent au corps Q des rationnels.

Pour $a, b, c \in$ Q et $m, n, p \in$ N, on obtient comme au n° 59 :

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad a^{n+1} = a^n.a \quad \text{soit:} \quad a^m = a.a \ldots a \quad (m \text{ facteurs}).$$

1° $(abc)^m = a^m . b^m . c^m$.

2° $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (résulte du n° 109, 2°).

3° $a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p}$.

4° $(a^m)^p = (a^p)^m = a^{mp}$.

5° $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ pour $m \geqslant p$ et $\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}$ pour $m < p$.

Notons que pour a et b rationnels positifs et $m > 1$, on a, comme au n° 61 :

$$a = b \Longleftrightarrow a^m = b^m \quad \text{et} \quad a < b \Longleftrightarrow a^m < b^m.$$

112. Exposants négatifs. — Si m, n, p sont des entiers positifs, on convient de poser :

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{a^{m-p} = \frac{1}{a^{p-m}}}$$

En particulier : $a^{-1} = \frac{1}{a}$ désigne l'inverse du rationnel a.

On peut vérifier que toutes les formules du nº111 s'étendent sans restriction aux exposants relatifs. Ainsi pour $m, n, p \in Z$:

1º $a^m \cdot a^{-n} \cdot a^p = a^m \cdot \frac{1}{a^n} \cdot a^p = \frac{a^{m+p}}{a^n} = a^{m-n+p}$.

2º $(a^{-m})^p = \left(\frac{1}{a^m}\right)^p = \frac{1}{a^{mp}} = a^{-mp} = (a^m)^{-p}$.

113. Répartition des rationnels. — 1º Le corps Q des rationnels est un ensemble totalement ordonné (nº 104), illimité dans les deux sens car tout rationnel α admet des rationnels supérieurs $\alpha + \lambda$ et des rationnels inférieurs $\alpha - \lambda$, ceci quel que soit le rationnel positif λ. On traduit cela en disant que :

Il n'y a pas dans le corps Q d'élément maximal supérieur à tous les autres, ni d'élément minimal inférieur à tous les autres.

Il en est de même pour l'ensemble des rationnels positifs (ou négatifs) car quel que soit le rationnel positif ε, il est supérieur à tout $\frac{\varepsilon}{k}$ pour $k > 1$. Par contre 0 est un élément minimal dans Q^+, maximal dans Q^-.

2º ***Entre deux rationnels distincts α et β on peut intercaler une infinité de rationnels.***

Si $\alpha < \beta$, tout λ tel que $0 < \lambda < \beta - \alpha \Longrightarrow \alpha < \alpha + \lambda < \beta$.

En particulier entre $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$ s'intercale tout rationnel $\alpha \pm \frac{\varepsilon}{k}$ pour $k > 1$.

On traduit ce fait en disant que :

L'ensemble des rationnels est partout dense.

3º ***Quel que soit le rationnel α il existe un entier relatif unique n tel que :***

$$n \leqslant \alpha < n + 1.$$

On peut toujours supposer que α est le quotient $\frac{a}{b}$ de deux entiers relatifs a et b tels que $|b| > 1$, ce qui entraîne : $|\alpha| < |a| \Longrightarrow -|a| < \alpha < +|a|$.

Il y a donc des entiers relatifs supérieurs à α, des entiers relatifs inférieurs ou égaux à α et n est l'élément maximal de ces derniers. *L'ensemble Q est dit archimédien.*

114. Valeurs décimales approchées d'un rationnel. — Rappelons qu'on appelle *rationnel décimal* tout rationnel de la forme $\frac{x}{10^n}$, où $x \in Z$ et $n \in N$. Un tel rationnel peut s'écrire sous la forme d'un *nombre décimal* : $\frac{2\,718}{10^3} = 2{,}718$.

Si le rationnel α s'intercale entre les entiers **consécutifs** a et $b = a + 1$ de **telle sorte** que : $a \leqslant \alpha < b$, on dit que a et b *sont les valeurs entières approchées*, la première par défaut la seconde par excès, du rationnel α.

Le rationnel $10^n.\alpha$ s'intercale de même entre les entiers x_n et $x_n + 1$.

$$x_n \leqslant 10^n.\alpha < x_n + 1 \Longrightarrow a_n = \frac{x_n}{10^n} \leqslant \alpha < \frac{x_n + 1}{10^n} = b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Les rationnels décimaux a_n et b_n sont les valeurs décimales approchées à $\frac{1}{10^n}$ près, la première par défaut, la seconde par excès, du rationnel α.

Les relations : $10x_n \leqslant 10^{n+1}\alpha < 10(x_n + 1)$ et $x_{n+1} \leqslant 10^{n+1}\alpha < x_{n+1} + 1$ entraînent (n° 51, 1°) : $10x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 10^{n+1}\alpha < x_{n+1} + 1 \leqslant 10(x_n + 1)$.

Soit en divisant par 10^{n+1} : $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha < b_{n+1} \leqslant b_n$, les deux égalités $a_n = a_{n+1}$ et $b_n = b_{n+1}$ s'excluant mutuellement car $b_n - a_n > b_{n+1} - a_{n+1}$.

Les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ vérifient donc :

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots\ldots \leqslant \alpha < \ldots \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b.$$

La suite $\{a_n\}$ détermine la suite $\{b_n\}$ et la différence $b_n - a_n$ finit par devenir inférieure à tout rationnel positif donné.

En effet $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ et $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} < \varepsilon \Longrightarrow 10^n > \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui est réalisé dès que n atteint le nombre de chiffres de la valeur entière par défaut de $\frac{1}{\varepsilon}$.

EXERCICES

79. 1° Étant donné un entier $r > 1$, montrer que l'on définit dans l'ensemble produit $Z \times N$ une relation d'équivalence par : $(a, n) = (b, p) \Longleftrightarrow ar^p = br^n$.

2° Dans l'ensemble E_r des classes d'équivalences obtenues on définit :

$$(a, n) + (b, p) = (ar^p + br^n, n + p) \quad \text{et} \quad (a, n).(b, p) = (ab, n + p).$$

Étudier la stabilité de ces deux opérations, leurs propriétés et en déduire que E_r a une structure d'anneau. Cas ou $r = 10$ (ensemble décimal E_{10}).

3° Montrer que E_r est inclus dans Q par la relation $(a, n) = \frac{a}{r^n}$ et retrouver ainsi les propriétés de E_r.

80. Dans le corps Q, on définit la *somme harmonique* de a et b par : $a \star b = \frac{ab}{a + b}$.

1° Montrer que l'addition harmonique est associative, commutative et admet une opération inverse toujours définie : calculer x tel $a = b \star x$. Montrer que $\frac{1}{a} \star \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$ et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition harmonique.

2° On pose $[a]^2 = a \star a$, puis $[a]^{n+1} = a^n \star a$. Calculer $[a]^n$. Quel sens peut-on donner au symbole $[a]^{\frac{1}{2}}$ ou $[b]^{\frac{1}{3}}$?

3° La *moyenne harmonique* de a et b est le rationnel $h = 2\,a \star b$. Montrer que :

$$0 < a < b \Longrightarrow a < h < \frac{a + b}{2} < b.$$

81. On considère la somme $\Sigma(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1° Montrer que chaque terme $\frac{1}{k}$ est la moyenne harmonique des deux termes qui l'encadrent ou de deux termes équidistants $\frac{1}{k-\alpha}$ et $\frac{1}{k+\alpha}$.

2° Démontrer par récurrence que $\Sigma(2^p) > \frac{1}{2}(p+2)$. Montrer que, quel que soit $A > 0$, on peut trouver n tel $\Sigma(n) > A$.

— Établir par récurrence les relations suivantes :

82. $\Sigma_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

83. $\Sigma_2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$.

84. $$\Sigma_3 = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$$

85. $$\Sigma_p = \frac{1}{1.2\ldots(p+1)} + \frac{1}{2.3\ldots(p+2)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}\right].$$

86. $S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$.

87. $S_1 = 1.r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n = \frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$.

88. $$S_2 = 1^2 r + 2^2 r^2 + 3^2 r^3 + \cdots + n^2 r^n = \frac{n^2 r^{n+3} - (2n^2+2n-1) r^{n+2} + (n+1)^2 r^{n+1} - r^2 - r}{(r-1)^3}.$$

89. Montrer que la valeur S_1 de l'exercice n° 87 est le produit par r de la dérivée de S (n° 86) par rapport à r. Vérifier de même la valeur de S_2 (n° 88) en dérivant par rapport à r la valeur de S_1.

90. Utiliser les résultats pour S_1 et S_2 (exercices n°s 87 et 88) pour calculer :

$$S_3 = 1.2\,r + 2.3\,r^2 + 3.4\,r^3 + \ldots + n(n+1)\,r^n.$$
$$S_4 = 1.3\,r + 2.4\,r^2 + 3.5\,r^3 + \ldots + n(n+2)\,r^n.$$

91. Retrouver les résultats S_3 et S_4 en dérivant par rapport à r les produits de S_1 (n° 87) par r ou r^2.

92. Étant donné la suite de rapports égaux : $\frac{x}{au} = \frac{y}{bv} = \frac{z}{cw} = \frac{t}{r}$ $(= \lambda)$ et la relation : $ux + vy + wz + rt = 0$, former une relation entre a, b, c, u, v, w et r, puis une relation entre a, b, c, x, y, z et t.

93. Si $\frac{x}{pu} = \frac{y}{qv} = \frac{-z}{r} = \frac{-t}{w}$ et $ux + vy + wz + rt = 0$, montrer que l'on peut former une relation entre p, q, u, v, w et r ainsi qu'entre p, q, x, y, z et t.

94. On donne : $\frac{xz - myt}{u} = \frac{yz - mxt}{v} = \frac{x^2 + y^2}{2w} = \frac{-mxy}{r}$ et $ux + vy + wz + rt = 0$.

1° En déduire une relation entre m, x, y, z, t puis que : $ux + vy = wz + rt = 0$.

2° En posant $\frac{x}{v} = \frac{-y}{u} = \alpha$, $\frac{z}{r} = \frac{-t}{w} = \beta$ trouver une relation entre m, u, v, w, r et montrer que : $\frac{ur - mvw}{x} = \frac{vr - muw}{y} = \frac{-muv}{z} = \frac{u^2 + v^2}{2t}$.

95. *Fractions continues.* — Soit x un rationnel positif donné. On pose : $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$; $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$; $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ etc... où a_0, a_1, a_2, a_3 désignent respectivement les valeurs entières par défaut de x, x_1, x_2, x_3. On pose ensuite :

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}; \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} \quad \text{etc.}$$

La fraction $\frac{P_k}{Q_k}$, représentée par le symbole $(a_0, a_1, a_2 \ldots a_{k-1}, a_k)$ est la réduite r_k du nombre x que l'on peut écrire : $x = (a_0, a_1, \ldots a_{k-1}, x_k)$.

1° Calculer les entiers $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ pour $x = \frac{2\,341}{1\,045}$ et montrer que le nombre n de ces a_i est limité. Calculer les différentes réduites de x.

2° Démontrer par récurrence que : $P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$ et $Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$.
En déduire un procédé rapide pour obtenir les diverses réduites à l'aide du tableau ci-contre :

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
1	$P_0 = a_0$	$P_1 = a_0 a_1 + 1$	$P_2 =$	$P_3 =$	$P_4 =$
0	$Q_0 = 1$	$Q_1 = a_1$	$Q_2 =$	$Q_3 =$	$Q_4 =$

3° Établir de même que : $P_{k-1}Q_k - P_kQ_{k-1} = (-1)^k$. En déduire que chaque réduite est irréductible et que chacune d'elles est comprise entre les deux précédentes.

96. 1° Développer $\frac{157}{68}$ en fraction continue : $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n)$ et montrer que les termes de la réduite $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (a_0, a_1 \ldots a_{n-1})$ permettent d'obtenir, dans Z, une solution en entiers de l'équation :

$$68\,x - 157\,y + 1 = 0.$$

2° En déduire, dans Z, une solution de l'équation $68x - 157y + 37 = 0$, puis la solution la plus simple de cette équation et sa solution générale.

97. On reprend l'équation précédente : $68\,x - 157\,y + 37 = 0$ que l'on peut écrire successivement puisque : $157 = 68 \times 2 + 21$ et $37 = 21 + 16$:

$$68\,(x - 2\,y) - 21\,y + 37 = 0 \Longrightarrow 68\,(x - 2\,y) - 21\,(y - 1) + 16 = 0.$$

1° Appliquer à nouveau le même procédé jusqu'à obtenir une équation de la forme :

$$(ax + by + c) + m\,(a'x + b'y + c') = 0.$$

2° Constater que le système : $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$ admet une solution dans Z, solution de l'équation proposée (ceci peut s'établir en comparant les coefficients des groupes intermédiaires aux termes P_k et Q_k des diverses réduites de la fraction continue égale à $\frac{157}{68}$).

3° En déduire la solution générale, dans Z, de l'équation proposée.

— En utilisant l'un des procédés des exercices 96 ou 97, résoudre dans Z les exercices n°s 61 à 66 ou les équations suivantes :

98. $32\,x - 27\,y = 23$

99. $41\,x - 67\,y = 49$

100. $25\,x - 33\,y = 47$

101. $79\,x - 87\,y = 31$

102. $46x - 37y = 15$

103. $109x - 75y = 47$

104. $53x - 47y = 44$

105. $127x - 89y = 25$.

106. *Ensembles linéairement récurrents.* — L'ensemble ordonné $E = \{a_0, a_1, a_2 \dots a_n\}$ est dit solution de la relation de récurrence : $a_{k+2} - 5a_{k+1} + 6a_k = 0$ (1)
si ses termes consécutifs vérifient cette relation quel que soit $k = 0, 1, 2, \dots n-2$.

1° Déterminer E_0 pour : $a_0 = -\frac{23}{36}$, $a_1 = -\frac{7}{6}$ et $n = 8$.

2° Pour que $E = \{a_k = r^k\}$ soit solution de (1) il faut et il suffit que $r^2 - 5r + 6 = 0$. On trouve $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Montrer que, quels que soient A et B, l'ensemble $E(2, 3) = \{a_k = A.2^k + B.3^k\}$ est solution de (1). Déterminer A et B pour obtenir E_0. En déduire que E (2, 3) est la solution la plus générale de (1).

3° En partant de l'identité : $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ que l'on vérifiera par récurrence, calculer la somme S des $n + 1$ termes de E (2, 3). Vérifier en établissant l'égalité :

$$(S - a_0 - a_1) - 5(S - a_0 - a_n) + 6(S - a_{n-1} - a_n) = 0.$$

107. L'ensemble ordonné $E = \{a_0, a_1, \dots a_n\}$ est solution de : $a_{k+2} - 6a_{k+1} + 9a_k = 0$ (1).

1° Déterminer E_0 pour : $a_0 = -2$, $a_1 = -3$ et $n = 6$.

2° Démontrer par récurrence que, quels que soient A et B, l'ensemble E(3,3) tel que $a_k = (A + Bk)3^k$ est solution de (1). Retrouver E_0 et en déduire que E(3,3) est la solution la plus générale de (1).

3° En utilisant les identités $\sum_0^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ et $\sum_0^n kr^k = \frac{n\,r^{n+2} - (n+1)\,r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$ (cf. ex. n°s 86 et 87) que l'on peut vérifier par récurrence, calculer la somme des $n + 1$ éléments de E (3,3). Vérifier en établissant que : $(S - a_0 - a_1) - 6(S - a_0 - a_n) + 9(S - a_{n-1} - a_n)_1 = 0$.

— Déterminer comme à l'un des exercices précédents l'ensemble ordonné $\{a_0, a_1, a_2 \dots a_n\}$ solution de la relation de récurrence suivante et calculer la somme des $n + 1$ éléments :

108. $a_{k+1} - 5a_k = 0$ Application pour : $a_0 = \frac{4}{625}$ et $n = 8$

109. $a_{k+2} - 3a_{k+1} + 2a_k = 0$ — $a_0 = -\frac{23}{2}$, $a_1 = -11$ et $n = 10$.

110. $a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k = 0$ — $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $n = 99$.

111. $a_{k+2} - 4a_{k+1} + 4a_k = 0$ — $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ et $n = 10$.

112. $a_{k+2} - a_{k+1} - 2a_k = 0$ — $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ et $n = 10$.

113. $a_{k+2} - a_{k+1} - 6a_k = 0$ — $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $n = 8$.

114. $2a_{k+2} - 5a_{k+1} + 2a_k = 0$ — $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ et $n = 7$.

115. $3a_{k+2} - 4a_{k+1} + a_k = 0$ — $a_0 = 80$, $a_1 = 26$ et $n = 8$.

LE CORPS R DES NOMBRES RÉELS

115. Nécessité d'une extension du corps Q. — Bien que le corps Q des nombres rationnels soit partout dense (n° 113), il ne suffit pas à la représentation exacte de tous les nombres qui se présentent en Mathématiques.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, la longueur x de la diagonale du carré de côté 1, doit vérifier la relation : $x^2 = 1 + 1$ ou $x^2 = 2$. Or, on démontre en arithmétique que tout entier positif autre qu'un carré parfait : 0, 1, 4, 9, 16, 25, etc. ne peut être le carré d'un rationnel. Il n'y a donc pas de rationnel x dont le carré est égal à 2. Ce nombre x, qui correspond ainsi à une *lacune* dans le corps Q, constitue un *nombre irrationnel* qui sera symbolisé par $\sqrt{2}$.

Nous verrons plus tard que les notions de limite, de rapport trigonométrique, de logarithme, ou d'exponentielle se traduisent le plus souvent par des nombres irrationnels.

116. Notion de coupure dans le corps Q. — ***On réalise une coupure*** Γ ***dans le corps*** Q ***des rationnels lorsqu'on effectue une partition de*** Q ***en deux sous-ensembles complémentaires non vides*** X ***et*** Y ***tel que tout élément x du premier soit inférieur à tout élément y du second.***

$$\forall x \in X, \forall y \in Y \Longrightarrow x < y.$$

Comme $X \cup Y = Q$, il ne peut y avoir simultanément un élément maximal r' dans X et un élément minimal r'' dans Y car cela impliquerait : $x \leqslant r' < r'' \leqslant y$ et tout rationnel compris entre r' et r'' ne serait pas classé.

1° S'il existe un rationnel r, élément maximal de X ou élément minimal de Y, nous dirons que Γ *est une coupure rationnelle associée à r.*

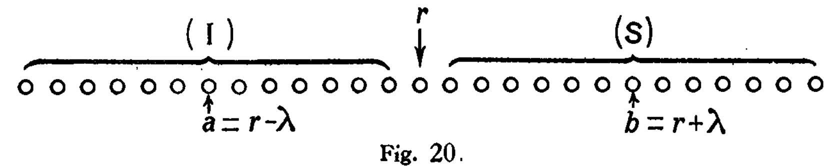


Fig. 20.

L'ensemble $\{a\}$ des rationnels a inférieurs à r constitue la *classe inférieure* I *de la coupure* Γ. L'ensemble $\{b\}$ des rationnels b supérieurs à r constitue la *classe supérieure* S *de la coupure* Γ. Donc (fig. 20) :

$$a \in I \Longleftrightarrow a < r \quad \text{et} \quad b \in S \Longleftrightarrow b > r.$$

Ainsi les deux coupures définies par : $x \leqslant \frac{7}{2}$; $y > \frac{7}{2}$ et par : $x < \frac{7}{2}$; $y \geqslant \frac{7}{2}$ sont toutes deux associées au rationnel $\frac{7}{2}$ et admettent les mêmes classes I et S :

$$a \in \mathrm{I} \Longleftrightarrow a < \frac{7}{2}; \qquad b \in \mathrm{S} \Longleftrightarrow b > \frac{7}{2}$$

C'est pourquoi nous ne ferons pas de distinction entre ces deux coupures.

2° S'il n'existe pas d'élément maximal dans X, ni d'élément minimal dans Y, *la coupure* Γ *est dite irrationnelle* (ou associée à une lacune de Q). Les deux sous-ensembles X et Y constituent alors respectivement *la classe inférieure* I *et la classe supérieure* S *de* Γ (fig. 21).

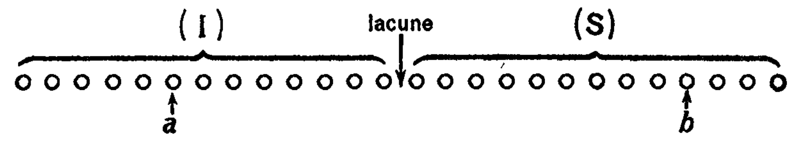


Fig. 21.

Exemple. — Convenons de ranger dans un ensemble I tout rationnel négatif ou nul ainsi que tout rationnel positif a tel que $a^2 < 5$, puis dans un ensemble S tout rationnel positif b tel que $b^2 > 5$. Tout rationnel est ainsi classé dans I ou S car il n'y a pas de rationnel positif dont le carré est égal à 5. Donc : $\mathrm{I} \cup \mathrm{S} = \mathrm{Q}$.

Or : $0 < a$, $0 < b$ et $a^2 < 5 < b^2 \Longrightarrow 0 < a < b$. Par suite tout élément de I est inférieur à tout élément de S. Nous avons réalisé une coupure Γ dans le corps Q.

D'autre part, on peut aisément voir que les rationnels positifs : $u = \frac{10a}{a^2+5}$ et $v = \frac{b^2+5}{2b}$ vérifient :

$$u > a, \quad v < b \quad \text{et} \quad u^2 < 5 < v^2.$$

Tout élément positif a de I admet donc un élément supérieur u et tout élément b de S admet donc un élément inférieur v. Il n'y a pas d'élément maximal dans I ni d'élément minimal dans S. *La coupure* Γ *est irrationnelle et admet pour classes* I *et* S.

En définitive :

117. Théorème. — ***Toute coupure* Γ *détermine dans* Q *deux classes* I *et* S *telles que :***

1° ***Tout élément*** a ***de*** I ***est inférieur à tout élément*** b ***de*** S.

2° ***La classe inférieure*** I ***n'admet pas d'élément maximal et la classe supérieure*** S ***n'admet pas d'élément minimal.***

3° ***Si un rationnel unique*** r ***échappe à cette répartition, la coupure est dite rationnelle et*** $a < r < b$. ***Sinon la coupure est dite irrationnelle et*** $\mathrm{I} \cup \mathrm{S} = \mathrm{Q}$.

Ajoutons que tout rationnel x, inférieur à un élément a de I, appartient obligatoirement à I, tandis que tout rationnel y supérieur à un élément b de S appartient obligatoirement à S.

Nous représenterons une coupure Γ par le symbole $(a \mid b)$ qui se lit « a coupure b » et dans lequel a désigne un élément quelconque de I, et b un élément quelconque de S. Si Γ est une coupure rationnelle associée à r, on peut, en désignant par λ un rationnel positif arbitraire, poser $a = r - \lambda$ et $b = r + \lambda$. La coupure Γ est alors représentée par le symbole $(r - \lambda \mid r + \lambda)$ ou simplement par $[r]$. Signalons que dans ce cas la partition de Q en trois sous-ensembles I, $\{r\}$, S est parfois appelée *coupure généralisée*.

118. Définition. — ***On appelle nombre réel (ou relatif) toute coupure dans le corps* Q *des rationnels.***

La classe inférieure I et la classe supérieure S de la coupure $(a \mid b)$ deviennent les classes I et S du nombre réel : $\alpha = (a \mid b)$. Toute coupure rationnelle détermine ainsi un nombre réel $[r] = (r - \lambda \mid r + \lambda)$ associé au rationnel r.

On identifie tout rationnel r ***avec le nombre réel*** $[r]$ ***auquel il est associé.***

Le corps Q est donc ainsi inclus dans l'*ensemble* R *des nombres réels* :

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Toute coupure irrationnelle détermine un nombre réel dit irrationnel.

119. Comparaison des nombres réels. — Par définition :

1° ***Deux nombres réels*** α ***et*** α' ***sont égaux s'ils ont même classe inférieure et même classe supérieure.***

$$\alpha = \alpha' \Longleftrightarrow I = I' \quad \text{et} \quad S = S'.$$

Mais pour démontrer que $\alpha = \alpha'$, il suffit d'établir l'une des conditions $I = I'$ ou $S = S'$. En effet, $I = I' \Longrightarrow \complement_Q I = \complement_Q I'$. Par suite, ces deux compléments admettant ou non un élément minimal, on obtient $S = S'$ et $\alpha = \alpha'$.

$$\boxed{\alpha = \alpha'} \Longleftrightarrow \boxed{I = I'} \Longleftrightarrow \boxed{S = S'}$$

Autrement dit :

Tout nombre réel, rationnel ou non, est déterminé par l'ensemble des rationnels de sa classe inférieure I *ou de sa classe supérieure* S.

2° ***Tout nombre réel*** α ***est supérieur à tout rationnel*** a ***de sa classe inférieure*** I ***et est inférieur à tout rationnel*** b ***de sa classe supérieure*** S.

$$\forall a \in I, \forall b \in S \Longrightarrow \boxed{a < \alpha < b}.$$

Cette définition, compatible avec l'inclusion $Q \subset R$, permet de comparer par transitivité deux réels quelconques α et α'. Ainsi pour r rationnel :

$$\alpha < r < \alpha' \Longrightarrow \alpha < \alpha'; \qquad \alpha > r > \alpha' \Longrightarrow \alpha > \alpha'.$$

S'il est impossible d'intercaler un rationnel r entre deux réels α et α', tout rationnel a inférieur à l'un d'eux est inférieur à l'autre. Donc $I = I'$ et $\alpha = \alpha'$.

Deux réels quelconques sont donc comparables et la relation d'inégalité est une relation d'ordre total dans R.

Pour que deux nombres réels soient distincts il faut et il suffit que l'on puisse intercaler un rationnel r entre ces deux nombres. On peut alors en intercaler une infinité car si $\alpha > \alpha'$ tout élément r de $I \cap S'$ vérifie $\alpha' < r < \alpha$. Notons enfin que tout réel α est l'élément séparatif entre les rationnels a de sa classe I et les rationnels b de sa classe S.

3° ***Un nombre réel*** $\alpha = (a \mid b)$ ***est dit positif s'il est supérieur à zéro, négatif s'il est inférieur à zéro.***

$$\alpha \text{ positif} \Longleftrightarrow \alpha > 0 \Longleftrightarrow 0 \in I \Longleftrightarrow b > 0 \ \forall b \in S.$$

$$\alpha \text{ négatif} \Longleftrightarrow \alpha < 0 \Longleftrightarrow 0 \in S \Longleftrightarrow a < 0 \ \forall a \in I.$$

On désigne par R^+ l'ensemble formé par zéro et les réels positifs, par R^- l'ensemble formé par zéro et les réels négatifs et par R^* l'ensemble des réels non nuls.

$$\alpha \in R^+ \Longleftrightarrow \alpha \geqslant 0, \qquad \beta \in R^- \Longleftrightarrow \beta \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma \in R^* \Longleftrightarrow \gamma \neq 0.$$

On appelle nombre arithmétique tout réel positif ou nul, élément de R^+.

120. Corollaires. — 1° ***Pour démontrer que*** $\alpha = \alpha'$ ***il suffit d'établir que tout élément de*** I ***appartient à*** I' ***tandis que tout élément de*** S ***appartient à*** S'.

$$I \subseteq I' \Longrightarrow \alpha \leqslant \alpha' \quad \text{et} \quad S \subseteq S' \Longrightarrow \alpha \geqslant \alpha' \quad \text{soit} \quad \alpha = \alpha'.$$

2° ***Quel que soit le réel*** α ***il existe un entier relatif*** n ***tel que :***

$$n \leqslant \alpha < n + 1.$$

Si $\alpha = (a \mid b)$ tout entier relatif inférieur à a est inférieur à α et tout entier relatif supérieur à b est supérieur à α. Donc $n + 1$ est le plus petit entier, élément de S.

L'ensemble R est dit *archimédien*.

121. Ensembles adjacents de rationnels. — Il n'est pas nécessaire de connaître tous les éléments des ensembles X et Y (ou de I et S) pour définir une coupure dans le corps Q. Il suffit d'en connaître deux ensembles adjacents :

Deux ensembles de rationnels A ***et*** B ***sont dits adjacents lorsque :***

1° ***Tout élément*** a ***de*** A ***est inférieur à tout élément*** b ***de*** B.

2° ***Quel que soit le rationnel positif arbitraire*** ε, ***on peut trouver un élément*** a ***de*** A ***et un élément*** b ***de*** B ***tels que*** $b - a < \varepsilon$.

Il en est ainsi des deux ensembles $A = \{a_n\}$ et $B = \{b_n\}$ formés par les valeurs décimales approchées par défaut et par excès d'un rationnel α (n° 114). Montrons que :

122. Théorème. — ***Deux ensembles adjacents de rationnels*** A ***et*** B ***définissent une coupure dans*** Q.

Rangeons dans un ensemble X tout rationnel x inférieur ou égal à un élément quelconque a de A et dans un ensemble Y tout rationnel y supérieur ou égal à un élément quelconque b de B : $\quad x \leqslant a < b \leqslant y \Longrightarrow x < y$.

Il ne peut échapper deux rationnels distincts r' et r'' à cette répartition, sinon on aurait :

$$a < r' < r'' < b \Longrightarrow b - a > r'' - r'$$

et on ne pourrait avoir : $b - a < \varepsilon \leqslant r'' - r'$. S'il existe un rationnel r non classé tel que $a < r < b$, il peut se ranger au choix dans X ou dans Y.

Les deux ensembles X et Y vérifient alors $X \cup Y = Q$ et réalisent une coupure dans Q

Ensembles adjacents A et B	$\Longrightarrow$	*Coupure* (X,Y)	$\Longrightarrow$	*Répartition :* (I, S) ou (I, $\{r\}$, S)

Par suite (n° 118) :

123. Corollaire. — ***Deux ensembles adjacents*** A ***et*** B ***de rationnels définissent un réel unique*** $\alpha = (a \mid b)$ ***tel que :*** $a \leqslant \alpha < b$ ***ou*** $a < \alpha \leqslant b$.

S'il n'y a pas d'élément maximal dans A, ni d'élément minimal dans B, on a même :

$$a < \alpha < b \quad \text{car dans ce cas : } \quad A \subseteq I \text{ et } B \subseteq S.$$

124. Remarque. — ***Les deux classes* I *et* S *d'un réel* $\alpha = (a|b)$ *sont deux ensembles adjacents.***

C'est immédiat pour un nombre rationnel $\alpha = [r]$ car :

$$a < b \quad \text{et} \quad a = r - \frac{\varepsilon}{3}, b = r + \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow b - a = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Si α est irrationnel, on peut, pour a et b donnés, trouver $n \in N$ tel que : $\lambda = \dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$.

Les rationnels a, $a + \lambda$, $a + 2\lambda$, ... $a + n\lambda = b$ se répartissent, les premiers dans I et les suivants dans S. En désignant par a' le plus grand d'entre eux classé dans I et par b' le plus petit classé dans S, on obtient $b' - a' = \lambda < \varepsilon$.

On pourra donc toujours supposer que le réel $\alpha = (a \mid b)$ *est défini par deux ensembles adjacents* $A = \{a\}$ *et* $B = \{b\}$.

125. Valeurs décimales approchées d'un nombre réel. — Les définitions et les propriétés établies au n° 114 pour un rationnel s'étendent sans restriction à tout réel.

Tout nombre réel* α *est déterminé par l'ensemble, illimité ou non, de ses valeurs décimales approchées par défaut.

Soit a_n la valeur décimale approchée à $1/10^n$ près par défaut du nombre réel α et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ la valeur par excès correspondante : $a_n \leqslant \alpha < b_n$ implique

$$a_p < \alpha < b_q \Longrightarrow a_p < b_q$$

et quel que soit ε on finit par avoir $b_n - a_n < \varepsilon$ (n° 114). Les deux ensembles $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont donc adjacents et définissent (n° 123) un réel unique α' tel que $a_p < b_q$, donc égal à α.

126. Remarque. — La notion d'ensembles adjacents permet, ainsi que nous l'exposons ci-dessous, de définir les opérations dans R. Comme le programme de la classe précise « *Exposé sans démonstrations des propriétés des réels* », l'étude des démonstrations est entièrement facultative.

OPÉRATIONS DANS L'ENSEMBLE R DES RÉELS.

127. Addition des réels. — Soient deux nombres réels $\alpha = (a|b)$ et $\beta = (a'|b')$. L'ensemble A des rationnels $a + a'$ et l'ensemble B des rationnels $b + b'$ sont adjacents car :

1° $a < b$ et $a' < b' \Longrightarrow a + a' < b + b'$.

2° Si ε est un rationnel positif donné, on peut trouver (n° 124), a, b, a', b' tels que :

$$b - a < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } b' - a' < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow (b + b') - (a + a') = (b - a) + (b' - a') < \varepsilon.$$

***Les deux ensembles adjacents* A *et* B *définissent un nombre réel* $(a + a' \mid b + b')$ *appelé somme des réels* $\alpha = (a|b)$ *et* $\beta = (a'|b')$.**

On écrit :

$$\boxed{(a \mid b) + (a' \mid b') = (a + a' \mid b + b')}$$

Cette définition est compatible avec l'inclusion $Q \subset R$ car pour α et $\beta \in Q$:

$[\alpha] + [\beta] = (\alpha - \lambda \mid \alpha + \lambda) + (\beta - \mu \mid \beta + \mu) = (\alpha + \beta - \lambda - \mu \mid \alpha + \beta + \lambda + \mu)$

Soit : $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$.

128. Propriétés de l'addition dans R.

1° *Elle est associative* car $(a + a' \mid b + b') + (a'' \mid b'')$ et $(a \mid b) + (a' + a'' \mid b' + b'')$ sont égaux à $(a + a' + a'' \mid b + b' + b'')$. Donc : $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

2° *Elle est commutative* car $(a + a' \mid b + b') = (a' + a \mid b' + b)$ montre que :

$$(a \mid b) + (a' \mid b') = (a' \mid b') + (a \mid b) \quad \text{donc :} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

3° *Elle admet pour élément neutre :* $0 = (-\lambda \mid +\lambda)$. Si $\alpha = (a \mid b)$:

$$\alpha + 0 = (a \mid b) + (-\lambda \mid +\lambda) = (a - \lambda \mid b + \lambda).$$

Or : $a - \lambda$ et $b + \lambda$ sont respectivement éléments des classes I et S de α, donc (n° 120, 1°) :

$$(a - \lambda \mid b + \lambda) = (a \mid b) \quad \text{et :} \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

4° ***Tout nombre réel*** $\alpha = (a \mid b)$ ***admet un opposé.*** En effet :

$$a < b \quad \text{et} \quad b - a < \varepsilon \Longleftrightarrow -b < -a \quad \text{et} \quad (-a) - (-b) < \varepsilon.$$

L'ensemble $\tilde{A}$ des rationnels $(-b)$ et l'ensemble $\tilde{B}$ des rationnels $(-a)$ sont donc adjacents et définissent un nombre réel : $\tilde{\alpha} = (-b \mid -a)$.

Or : $\alpha + \tilde{\alpha} = (a \mid b) + (-b \mid -a) = (a - b \mid b - a) = (-\lambda \mid \lambda) = 0.$

L'opposé $\tilde{\alpha} = (-b \mid -a)$ de $\alpha = (a \mid b)$ est unique (n° 27, 2°).

L'ensemble R a une structure de groupe additif abélien.

Il en résulte (n° 33, 3°) l'existence et l'unicité de la différence $x = \alpha - \beta = \alpha + \tilde{\beta}$ de deux réels donnés : $x = \alpha - \beta \Longleftrightarrow \alpha = \beta + x$.

Notons que $\tilde{\alpha}$ opposé de α est égal à $0 - \alpha$ et s'écrit $-\alpha$.

Les propriétés des sommes, différences, sommes algébriques (n°s 74 à 76) *s'étendent à l'ensemble* R *des nombres réels.*

D'autre part, la *valeur absolue du nombre réel* α est par définition égale à α ou à $-\alpha$ suivant que α est positif ou négatif. Tout nombre arithmétique m est donc la valeur absolue du réel positif $+m$ ou m^+ et du réel négatif $-m$ ou m^-, opposé à m^+.

129. Corollaires. — 1° ***Un nombre réel*** α ***est supérieur, égal ou inférieur à un réel*** β ***suivant que la différence*** $\alpha - \beta$ ***est positive, nulle ou négative.***

Soient $\alpha = (a \mid b)$, $\beta = (a' \mid b') \Longrightarrow \alpha - \beta = \alpha + \tilde{\beta} = (a - b' \mid b - a')$.

Si $\alpha > \beta$, tout rationnel r tel que $\alpha > r > \beta$ est un élément de $\{a\}$ ainsi que de $\{b'\}$. Par suite $r - r = 0$ est un élément de $\{a - b'\} \Longrightarrow \alpha - \beta > 0$ (n° 119, 3°).

De même $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha - \beta < 0$ et puisque $\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha - \beta = \alpha + \tilde{\beta} = 0$, on voit par réciprocité que :

$$\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta > 0 \ ; \quad \alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta = 0 \ ; \quad \alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta < 0.$$

2° ***La somme de deux réels positifs est positive.***

Si $(a \mid b) + (a' \mid b') = (a + a' \mid b + b')$ et si 0 est un élément de $\{a\}$ ainsi que de $\{a'\}$ il est aussi élément de $\{a + a'\}$.

Donc : $$\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta > 0.$$

3° Nous pouvons donc parler de somme ou de différence de deux nombres arithmétiques m et n et en déduire (n° 76) que :

$$m^+ + n^+ = (m + n)^+; \qquad m^- + n^- = -(m^+ + n^+) = (m + n)^-$$

$$m^+ + n^- = m^+ - n^+ \begin{cases} = (m - n)^+ \text{ pour } m > n \\ = -(n^+ - m^+) = (n - m)^- \text{ pour } m < n. \end{cases}$$

On retrouve la règle d'addition des nombres relatifs (cf. n° 72).

130. Multiplication des réels positifs. — Si $\alpha = (a|b)$ est un réel positif, nous supposerons dans ce qui suit que $0 < a < b$. D'autre part, tout rationnel r positif peut s'écrire $[r] = \left(\frac{r}{k} \,\middle|\, rk\right)$ en désignant par k tout rationnel supérieur à $+1$.

Soient $\alpha = (a \mid b)$ et $\beta = (a' \mid b')$ deux réels positifs. Les deux ensembles $A = \{aa'\}$ et $B = \{bb'\}$ sont adjacents car :

1° $0 < a < b$ et $0 < a' < b' \Longrightarrow 0 < aa' < bb'$.

2° Si ε est un rationnel positif donné, choisissons les rationnels $m > \alpha$ et $m' > \beta$. On peut alors trouver a, b, a', b' tels que :

$$a < b < m; \quad a' < b' < m'; \quad b - a < \frac{\varepsilon}{m + m'}; \quad b' - a' < \frac{\varepsilon}{m + m'}$$

ce qui donne : $b(b' - a') + a'(b - a) < \dfrac{m\varepsilon}{m + m'} + \dfrac{m'\varepsilon}{m + m'} = \varepsilon \Longrightarrow bb' - aa' < \varepsilon.$

Les ensembles adjacents $\{aa'\}$ ***et*** $\{bb'\}$ ***définissent un nombre réel positif*** $(aa' \mid bb')$ ***appelé produit des réels positifs*** $\alpha = (a \mid b)$ ***et*** $\beta = (a' \mid b')$.

On écrit :
$$\boxed{(a \mid b)\,(a' \mid b') = (aa' \mid bb')}$$

Cette définition est compatible avec l'inclusion $Q \subset R$ car pour α et $\beta \in Q^+$

$$[\alpha]\,[\beta] = \left(\frac{\alpha}{k} \,\middle|\, \alpha k\right)\left(\frac{\beta}{l} \,\middle|\, \beta l\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{kl} \,\middle|\, \alpha\beta . kl\right) = [\alpha\beta].$$

131. Propriétés de la multiplication des réels positifs.

1° *Elle est associative* car $(aa' \mid bb')\,(a'' \mid b'')$ et $(a \mid b)\,(a'a'' \mid b'b'')$ sont sous deux égaux à $(aa'a'' \mid bb'b'')$. Donc : $(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$.

2° *Elle est commutative* car $(aa' \mid bb') = (a'a \mid b'b)$ montre que :

$$(a \mid b)\,(a' \mid b') = (a' \mid b')\,(a \mid b), \text{ donc} : \alpha\beta = \beta\alpha.$$

3° *Elle admet pour élément neutre* $+ 1 = \left(\frac{1}{k} \,\middle|\, k\right)$. En effet $\alpha\,(+ 1)$ s'écrit : $(a \mid b)\left(\frac{1}{k} \,\middle|\, k\right) = \left(\frac{a}{k} \,\middle|\, bk\right)$.
Or $\frac{a}{k}$ et bk sont respectivement éléments des classes I et S de $(a \mid b)$, donc (n° 119, 1°): $\left(\frac{a}{k} \,\middle|\, bk\right) = (a \mid b)$ et $\alpha\,(+ 1) = \alpha$.

4° *Tout réel positif* $\alpha = (a \mid b)$ *admet un inverse.* Soit m un rationnel tel que $0 < m < \alpha$. On peut trouver a et b tels que $m < a < b$ et $b - a < m^2\,\varepsilon$, d'où :

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{b - a}{ab} < \frac{m^2\,\varepsilon}{m \cdot m} = \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < \varepsilon.$$

Les deux ensembles $\left\{\frac{1}{b}\right\}$ **et** $\left\{\frac{1}{a}\right\}$ **sont donc** adjacents **et** définissent **un rationnel** $\alpha' = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{1}{a}\right)$ **tel que** $\alpha\alpha' = (a \mid b) \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{a}{b} \middle| \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{1}{k} \middle| k\right) = 1.$

L'unique inverse du réel positif $\alpha = (a \mid b)$ est donc $\alpha' = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{1}{a}\right)$.

5° ***La multiplication est distributive par rapport à l'addition.*** **Posons :** $\mu = (m \mid n)$.

$$(m \mid n)(a + a' \mid b + b') = (ma + ma' \mid nb + nb') = (ma \mid nb) + (ma' \mid nb').$$

Donc : $\mu(\alpha + \beta) = \mu\alpha + \mu\beta$.

L'ensemble des réels positifs est donc un groupe multiplicatif abélien.

On en déduit l'existence et l'unicité du quotient $x = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta'$ de deux réels positifs α et β.

Notons que α' inverse du réel positif α est égal à $\frac{1}{\alpha}$ et que (cf. n° 56) :

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \mu\alpha < \mu\beta; \qquad \alpha > \beta, \gamma > \delta \Longrightarrow \alpha\gamma > \beta\delta.$$

132. Puissances entières d'un réel positif. — Pour tout $n \in \mathrm{N}$, on peut donc définir par récurrence α^n tel que $a < \alpha < b \Longleftrightarrow a^n < \alpha^n < b^n$. Montrons que :

Si $\alpha = (a \mid b)$, ***les deux ensembles*** $\{a^n\}$ ***et*** $\{b^n\}$ ***sont adjacents et définissent*** $\alpha^n = (a^n \mid b^n)$.

En effet (n° 111): $0 < a < b \Longrightarrow 0 < a^n < b^n$ et si ε est un rationnel positif donné, on peut choisir le rationnel $m > \alpha$, et trouver a et b tels que : $a < b < m$; $b - a < \frac{\varepsilon}{nm^{n-1}}$.

D'où : $(b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}) < (b - a)nm^{n-1} \Longrightarrow b^n - a^n < \varepsilon$.

D'autre part les relations : $a < \alpha < b \Longleftrightarrow a^n < \alpha^n < b^n$ entraînent pour α et β réels positifs :

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha^n = \beta^n \qquad \text{et} \qquad \alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha^n < \beta^n.$$

133. Extension dans R de la multiplication des réels positifs. — Tout réel α peut être considéré comme la différence $a - b$ de deux réels positifs ou nuls. C'est pourquoi nous poserons d'abord pour a, b, a', b' réels positifs :

$$\alpha\beta = (a - b)(a' - b') = (aa' + bb') - (ab' + ba'). \qquad (1)$$

Cette définition est compatible avec l'inclusion $\mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$ et la formule (1) peut se démontrer (cf. n° 57, 3°) pour α et β positifs. Montrons cependant que $\alpha\beta$ est bien invariant si l'on remplace un des facteurs par un facteur égal. Ainsi : $a' - b' = a'' - b''$ entraîne $(a - b)(a' - b') = (a - b)(a'' - b'')$ car l'égalité : $(aa' + bb') - (ab' + ba') = (aa'' + bb'') - (ab'' + ba'')$

se réduit à : $a(a' + b'') + b(b' + a'') = a(b' + a'') + b(a' + b'')$

qui est une conséquence de : $a' + b'' = a'' + b' \Longleftrightarrow a' - b' = a'' - b''$.

1° *Le produit de tout réel par zéro est égal à zéro.* — Pour $b' = a'$ la formule (1) donne :

$$(a - b)(a' - a') = (aa' + ba') - (aa' + ba') = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha.0 = 0}$$

En particulier : $\alpha(\beta + 0) = \alpha\beta = \alpha.\beta + \alpha.0$. Distributivité dans R^+.

2° Dorénavant nous pouvons, dans la formule (1), supposer a, b, a', b' positifs ou nuls. En désignant par m et n deux nombres arithmétiques, on obtient la règle classique :

$$(m^+)(n^+) = (m - 0)(n - 0) = (mn)^+ \quad | \quad (m^+)(n^-) = (m - 0)(0 - n) = (mn)^-$$
$$(m^-)(n^-) = (0 - m)(0 - n) = (mn)^+ \quad | \quad (m^-)(n^+) = (0 - m)(n - 0) = (mn)^-$$

134. Propriétés de la multiplication dans R. — 1° On en déduit aisément que :

L'ensemble* R* *des réels non nuls constitue un groupe multiplicatif abélien.

Il existe un réel unique $x = \frac{\alpha}{\beta}$, quotient de α par β (non nul) et pour $n \in N$ on peut définir α^n et $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$. En particulier l'inverse de tout réel non nul α est $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$.

2° ***La multiplication dans* R *est distributive par rapport à l'addition.*** En effet, la formule (1) du n° 133 donne, compte tenu de la distributivité dans R⁺ :

$$\begin{aligned}\mu(\alpha + \beta) &= (m - n)[(a + a') - (b + b')] \\ &= [m(a + a') + n(b + b')] - [m(b + b') + n(a + a')] \\ &= [(ma + nb) - (mb + na)] + [(ma' + nb') - (mb' + na')] \\ &= (m - n)(a - b) + (m - n)(a' - b') = \mu\alpha + \mu\beta.\end{aligned}$$

135. Conclusion. — Comme R est un groupe additif abélien (n° 128), on voit que :

L'ensemble* R *des réels constitue un corps commutatif ordonné.

Toutes les propriétés et règles de calcul établies dans le corps Q des rationnels se démontrent de même dans le corps R des réels. On pourra ainsi se reporter à ce qui a été établi dans N, Z ou Q pour *les sommes algébriques* (n° 76), *les produits* (nos 85, 98, 99), *les rapports* (nos 109 et 110), *les puissances entières* (nos 60, 87, 111, 112), *les égalités* (n° 88) *ou les inégalités* (nos 61, 81, 89) *et les propriétés des valeurs absolues* (nos 105 et 106).

RACINES

136. Racines d'un nombre arithmétique. — Étant donné un nombre $\alpha \in R^+$ et un entier naturel $n > 1$, proposons-nous de déterminer un réel $x \in R^+$ tel que $x^n = \alpha$.

1er Cas. — Si α est rationnel, il peut exister un rationnel $r \in Q^+$ tel que $\alpha = r^n$. L'égalité $x^n = r^n$ équivaut (n° 132) dans R⁺, à $x = r$, solution unique du problème. Ainsi :

$$x^5 = 243 = 3^5 \iff x = 3 \quad ; \quad x^3 = \frac{64}{125} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \iff x = \frac{4}{5}.$$

$$\forall n \in N : \quad x^n = 0 \iff x = 0 \quad \text{et} \quad x^n = 1 \iff x = 1.$$

2e Cas. — S'il n'existe pas de rationnel r tel que $r^n = \alpha$, distinct de 0 et 1, nous pourrons ranger dans un ensemble A tout rationnel a positif ou nul tel que $a^n < \alpha$ et dans un ensemble B tout rationnel b positif tel que $b^n > \alpha$. Aucun des deux ensembles A et B n'est vide car :

Si $\quad 0 < \alpha < 1 : \quad a < \alpha < 1 < b \implies a^n < \alpha^n < \alpha < 1 < b^n;$

Si $\quad 1 < \alpha : \quad a < 1 < \alpha < b \implies a^n < 1 < \alpha < \alpha^n < b^n.$

Montrons que les ensembles A et B définissent une coupure irrationnelle dans Q^+ :

1° Tout rationnel positif ou nul se range dans A ou B.

2° $a^n < \alpha < b^n \implies a^n < b^n \implies a < b$.

3° Il n'y a pas d'élément maximal dans A, ni d'élément minimal dans B.

En effet à tout rationnel b tel que $b^n > \alpha$, associons $v = \dfrac{(n-1)\,b^n + \alpha}{nb^{n-1}}$.

On obtient : $b - v = \dfrac{b^n - \alpha}{nb^{n-1}} > 0$ donc $b > v$ et :

$$b^n - v^n = (b - v)\,(b^{n-1} + b^{n-2}\,v + \ldots + bv^{n-2} + v^{n-1}) < (b - v)\,nb^{n-1} = b^n - \alpha$$

Soit : $b^n - v^n < b^n - \alpha$ et $v^n > \alpha$. Donc v est un élément de B inférieur à b.

En partant de $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n > \dfrac{1}{\alpha}$ on en déduit que $u = \dfrac{na\alpha}{(n-1)\,\alpha + a^n}$ est un élément de A supérieur à a.

Les deux ensembles A et B sont donc (n° 117) les classes I et S d'un nombre réel irrationnel : $x = (a \mid b)$ tel que $a < x < b$. Les deux ensembles $\{a^n\}$ et $\{b^n\}$ définissent par suite (n° 132) un réel unique : $x^n = (a^n \mid b^n)$ tel que $a^n < x^n < b^n$. Et puisque $a^n < \alpha < b^n$, on obtient : $x^n = \alpha$.

Le nombre $x \in R^+$ ainsi déterminé est unique car $x^n = y^n = \alpha \implies x = y$. En résumé :

137. Théorème. — ***Étant donné un nombre arithmétique*** α, ***et un entier naturel*** $n > 1$, ***il existe un nombre arithmétique unique*** x ***tel que*** $x^n = \alpha$, ***appelé racine*** $n^{\text{ième}}$ ***de*** α.

On écrit : $\boxed{x = \sqrt[n]{\alpha}} \iff \boxed{x^n = \alpha}$.

Ce qui implique : $x = \sqrt[n]{x^n}$ et $\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha$.

Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ est un radical d'indice n. Rappelons que $\sqrt[2]{\alpha}$ s'écrit $\sqrt{\alpha}$ et se lit « *racine carrée de* α », tandis que $\sqrt[3]{\alpha}$ se lit « *racine cubique de* α ».

138. Propriétés des radicaux arithmétiques. — Soient $a, b, c \in R^+$, $n, p, \lambda \in N$

1° $\boxed{\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{c}}$. Posons $x = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{c}$, nous obtenons :

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n.\left(\sqrt[n]{c}\right)^n = a.b.c \implies x = \sqrt[n]{a.b.c.}$$

Ainsi : $\sqrt{5}\,.\sqrt{7} = \sqrt{35}$ et $\sqrt[3]{875} = \sqrt[3]{125}\,.\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$.

2° $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$ car $x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \implies x^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b} \implies x = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ainsi : $\sqrt[3]{\dfrac{13}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{13}}{5}$.

3° $\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$ car $x = \sqrt[n]{a} \Longrightarrow a = x^n \Longrightarrow a^p = (x^n)^p = (x^p)^n$

donc :
$$\sqrt[n]{a^p} = x^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Ainsi : $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$; $\sqrt{49^3} = (\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$.

4° $\boxed{\sqrt[np]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}$ car $x = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} \Longrightarrow x^n = \sqrt[p]{a}.$

et
$$x^{np} = (x^n)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a \Longrightarrow x = \sqrt[np]{a}.$$

Ainsi : $\sqrt[6]{125} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}.$

5° $\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[\lambda n]{a^{\lambda p}}}$ car $x = \sqrt[n]{a^p} \Longrightarrow x^n = a^p$

D'où :
$$x^{\lambda n} = a^{\lambda p} \Longrightarrow x = \sqrt[\lambda n]{a^{\lambda p}}.$$

On peut donc simplifier un radical ou convertir plusieurs radicaux au même indice.

Ainsi :
$$\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[4\times 3]{a^{4\times 2}} = \sqrt[3]{a^2}$$
$$\sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt[5]{a^2} \,.\, \sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^5} \,.\, \sqrt[15]{a^6} \,.\, \sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^{5+6+4}} = \sqrt[15]{a^{15}} = a.$$

139. Exposants fractionnaires. — Si m et p désignent des entiers naturels non nuls, on pose par définition :

$a \in R^+$: $\boxed{a^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^m}}$ et $\boxed{a^{-\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{a^{-m}}}$

Il résulte de la dernière formule du n° 138 que pour a donné, la valeur du symbole $a^{\frac{m}{p}}$ ne dépend que de la valeur de la fraction $\frac{m}{p}$ qui peut être simplifiée ou convertie à un dénominateur multiple de p.

On peut vérifier que toutes les règles relatives aux exposants entiers positifs ou négatifs (nos 60, 111 et 112) s'appliquent aux exposants fractionnaires positifs ou négatifs. Ainsi :

1° $a^{\frac{m}{\lambda}}\, a^{-\frac{n}{\lambda}}\, a^{\frac{p}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{a^m} \,.\, \sqrt[\lambda]{a^{-n}} \,.\, \sqrt[\lambda]{a^p} = \sqrt[\lambda]{a^{m-n+p}} = a^{\frac{m-n+p}{\lambda}} = a^{\frac{m}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} + \frac{p}{\lambda}}$

2° $\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[p]{a^m})^n} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{(a^m)^n}} = \sqrt[qp]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{pq}} = a^{\frac{m}{p} \cdot \frac{n}{q}}$

140. Racines d'un nombre réel. — Etant donné l'entier naturel $n > 1$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre réel a tout réel x tel que $x^n = a$.

$(-5)^3 = -125 \Longrightarrow -5$ est racine cubique de -125.

$(+3)^4 = (-3)^4 = 81 \Longrightarrow +3$ et -3 sont racines quatrièmes de 81.

1° ***Tout réel a a une racine d'indice impair de même signe que lui.***

2° ***Un réel négatif n'a pas de racines d'indice pair. Un réel positif a deux racines d'indice pair opposées.***

1° L'égalité $x^5 = a$ exige que a et x soient de même signe et que $|x| = \sqrt[5]{|a|}$. Ce qui implique : $x = +\sqrt[5]{a}$ pour $a > 0$, $x = -\sqrt[5]{-a}$ pour $a < 0$.

On écrit : $$\boxed{x = \sqrt[5]{a}}$$

Notons que : $$\sqrt[2p+1]{-a} = -\sqrt[2p+1]{a}.$$

2° L'égalité : $x^4 = a$ est impossible pour $a < 0$. Elle est réalisée pour $a \geqslant 0$ si $|x| = \sqrt[4]{a}$. Donc : $x = +\sqrt[4]{a}$ ou $-\sqrt[4]{a}$.

Par convention le symbole $\sqrt[2p]{a}$ représente la racine positive d'indice $2p$ du réel a et $-\sqrt[2p]{a}$ sa racine négative.

Il en résulte que : $$\sqrt[2p]{a^{2p}} = |a|.$$

Ainsi : $\sqrt{a^2} = a$ pour $a \in R^+$ et $\sqrt{a^2} = -a$ pour $a \in R^-$.

Si a et b sont de même signe, il existe un nombre arithmétique x tel $x^2 = ab$, appelé moyenne géométrique (ou proportionnelle) entre a et b.

En effet : $x^2 = ab \iff \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \iff \frac{a}{-x} = \frac{-x}{b}$.

Lorsque a et b sont positifs on voit qu'il y a entre les moyennes arithmétiques m, harmonique h et géométrique x, les relations (n° 110) :

$$x^2 = ab = mh \qquad \text{et} \qquad a < b \Longrightarrow a < h < x < m < b.$$

141. Remarque importante. — Les formules du 138 relatives aux radicaux arithmétiques doivent être utilisées avec discernement lorsqu'il s'agit de nombres relatifs. Ainsi : $\sqrt[6]{(-5)^2} = \sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{5}$ n'est pas égal à $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$ ou à $\left(\sqrt[6]{-5}\right)^2$ qui n'existe par dans R.

Il est prudent de se ramener à un radical arithmétique avant d'entreprendre une transformation sur ce radical.

Afin de démontrer pour $p < 0$, que l'égalité : $x = -\sqrt{-p}$ entraîne :

$$x^3 + 3px = 2\sqrt{-p^3},$$

il est conseillé de poser $p = -a$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES RÉELS

142. Axiomes fondamentaux. — On apprend en Géométrie à construire les multiples et sous-multiples d'un vecteur et par suite le produit d'un vecteur par un rationnel donné (fig. 22 et 23).

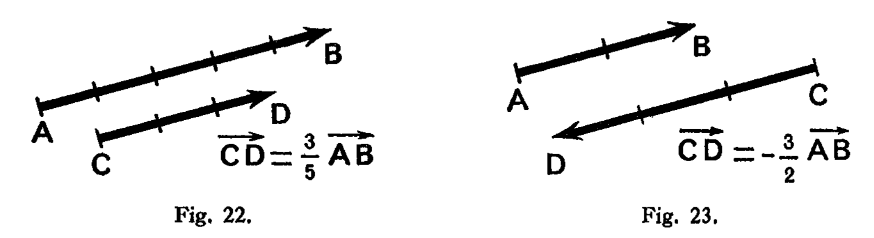


Fig. 22. Fig. 23.

Afin de définir le produit d'un vecteur par un nombre réel (rationnel ou non) énonçons les axiomes suivants :

I. Axiome d'Archimède. — *Etant donné deux segments inégaux* AB < CD *on peut toujours trouver un entier naturel* n *tel que* CD < n AB.

Autrement dit, on peut toujours (fig. 24) trouver un entier m tel :

$$m\ \text{AB} \leqslant \text{CD} < (m + 1)\ \text{AB}.$$

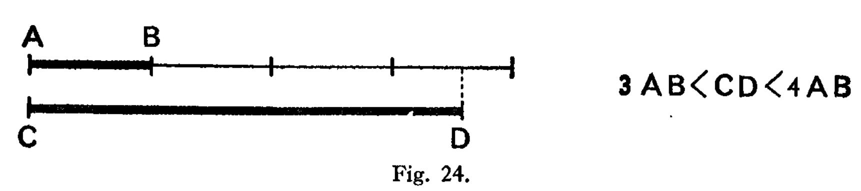


Fig. 24.

II. Axiome de Cantor-Dédekind. — *Il existe un point* M *et un seul commun à différents segments en nombre illimité :* AB, A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, ... *tels que* (fig. 25) :

1° *Chacun d'eux contient son suivant (une extrémité pouvant être commune).*

2° *Pour tout rationnel positif donné* ε *on peut trouver* $A_nB_n < \varepsilon$.

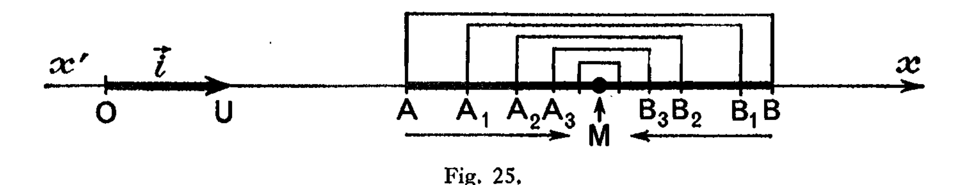


Fig. 25.

Notons que s'il existait deux points distincts M et M' communs à tous les segments on ne pourrait avoir A_nB_n < MM'.

143. Image sur un axe d'un nombre réel. — Considérons un axe $x'x$, orienté de gauche à droite, muni d'une origine O et d'un vecteur-unité $\overrightarrow{OU} = \vec{i}$ (fig. 25).

A tout rationnel a on peut faire correspondre un point A de l'axe tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$ et appelé *image de a*. On vérifie que pour $a < b$, l'image B de b se place à droite de A et que $AB = | b - a |$ tout au moins si a et b sont de même signe.

Soit x un nombre réel, rationnel ou non, défini par l'ensemble $\{ a_n \}$ et l'ensemble $\{ b_n \}$ de ses valeurs décimales approchées à $1/10^n$ près par défaut et par excès. Construisons (fig. 25) les images A_n et B_n des différents rationnels a_n et b_n.

Les relations : $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_n - a_n = 1/10^n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = 1/10^{n+1}$ montrent que le segment A_nB_n contient son suivant $A_{n+1}B_{n+1}$ et que $A_nB_n = \frac{1}{10^n}$. Si ε est un rationnel positif donné, on peut toujours trouver un segment $A_n B_n < \varepsilon$ car (n° 114) il suffit de prendre n égal au nombre de chiffres de la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$. D'après l'axiome de Cantor-Dédekind les différents segments A_nB_n admettent un point commun unique M. Ce point est l'*image* du nombre réel x. Par définition :

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{OU} = \vec{i}$ par le réel x.

On écrit : $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i}}$ $\iff$ $x = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\vec{i}} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OU}}$

Le point M, image du nombre réel x, est désigné par M (x) et le nombre réel x constitue le rapport des vecteurs de même direction $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OU} = \vec{i}$.

144. Abscisse d'un point sur un axe. — Réciproquement, soit M un point donné de l'axe Ox. Si ce point est l'image du rationnel r, on obtient immédiatement : $\overrightarrow{OM} = r\vec{i}$.

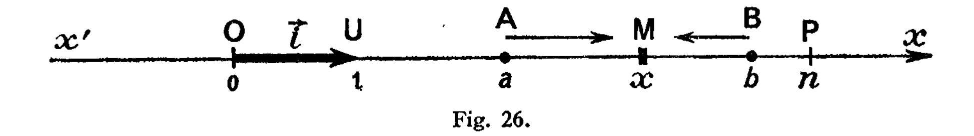


Fig. 26.

Sinon il existe d'après l'axiome d'Archimède un entier n tel que OM $< n$ OU et le point M (fig. 26) appartient au segment PP′ limité par les images de $+ n$ et $- n$. Les images des différents rationnels se répartissent donc de part et d'autre de M. Désignons par a tout rationnel dont l'image A se place à gauche de M et par b tout rationnel dont l'image B se place à droite de M. Tout rationnel est ainsi classé et comme $a < b$, les deux ensembles $\{ a \}$ et $\{ b \}$ définissent un réel $x = (a \mid b)$. Si a_n et b_n sont les valeurs décimales approchées à $1/10^n$ près de x, le point M est le point unique commun à tous les segments correspondants A_nB_n. Donc (n° 143) : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. En résumé :

Le réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$ est l'abscisse du point M sur l'axe Ox.

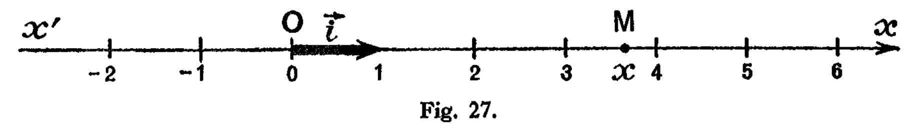


Fig. 27.

On voit ainsi qu'il y a une correspondance bijective (n° 77) entre les nombres réels et les points d'un axe muni d'une origine et d'un vecteur-unité (fig. 27).

145. Mesure algébrique d'un vecteur. — ***On appelle mesure algébrique du vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***sur l'axe*** Ox, ***le rapport de ce vecteur et du vecteur-unité de l'axe.***

On écrit (fig. 28) : $\overline{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} \iff \overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{i}.$

Fig. 28.

Pour l'obtenir il suffit de construire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, on obtient : $\overline{AB} = x = \overline{OM}$. Notons que $\overline{AB}$ n'est autre que la longueur AB affectée du signe + ou — suivant que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens ou non.

Par suite : $\boxed{\overline{BA} = -\overline{AB}}$ et $\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$

1° ***Le rapport de deux vecteurs de même direction est égal au rapport de leurs mesures algébriques sur tout axe parallèle.***

Soit $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{i} = m\vec{i}$ et $\overrightarrow{CD} = \overline{CD}\,\vec{i} = p\vec{i}$. On a donc : $\vec{i} = \dfrac{1}{p}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} = \dfrac{m}{p}\overrightarrow{CD}$.

Soit (fig. 29) : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{m}{p}$ ou $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}}$

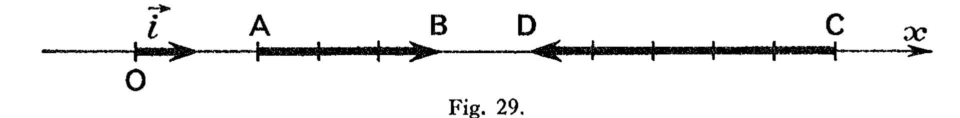


Fig. 29.

2° ***Relation de Chasles.*** — Si les trois points A, B, C appartiennent à un même axe, l'un des trois nombres $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ est du signe opposé à celui des deux autres et a pour valeur absolue la somme de leurs valeurs absolues. On en déduit que (fig. 30) :

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0} \iff \boxed{\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}}$$

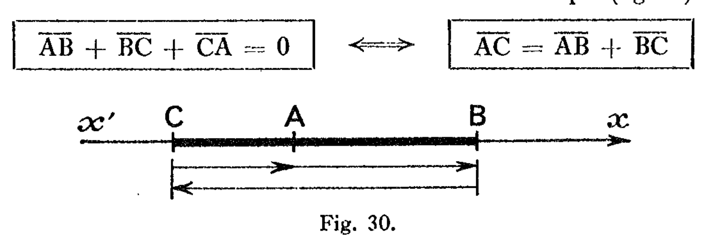


Fig. 30.

3° ***La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine.***

Si A (a) et B (b) sont deux points de l'axe Ox (fig. 31) :

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \iff \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} \quad \text{ou} \quad \boxed{\overline{AB} = b - a}$$

Enfin si M(x) est le milieu de AB (fig. 31), l'égalité : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ entraîne :

$$x - a = b - x \quad \text{ou} \quad 2x = a + b \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{OM} = \frac{1}{2}(a + b)}$$

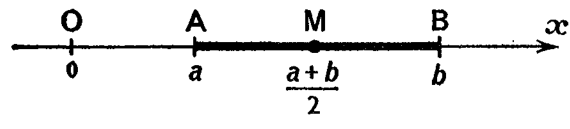


Fig. 31.

L'abscisse du milieu d'un segment est la demi-somme des abscisses de ses extrémités.

EXERCICES

116. On pose $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}$.

1° Démontrer que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. En déduire que les deux ensembles $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont adjacents et définissent un nombre réel : $e = (a_n \mid b_n)$.

2° Calculer effectivement a_{10} et b_{10} et en déduire une valeur décimale approchée de e avec 6 déci males exactes (e est la base des logarithmes népériens : 19[e] leçon).

117. Soit θ un angle donné compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ · On pose $a_0 = \operatorname{tg} \theta$, $b_0 = \sin \theta$

puis :
$$a_{n+1} = \frac{2\, a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

a_{n+1} est la moyenne harmonique de a_n et b_n tandis que b_{n+1} est la moyenne géométrique de a_{n+1} et b_n.

1° Démontrer que $a_n = 2^n \operatorname{tg} \frac{\theta}{2^n}$, $b_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$ et compte tenu de la relation :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

établir que :
$$b_n < b_{n+1} < \theta < a_{n+1} < a_n.$$

2° Démontrer par récurrence que $2^n > n$ et établir que : $a_n - b_n < a_0 \frac{\theta^2}{2^{n+1}}$. En déduire que les deux ensembles $\{b_n\}$ et $\{a_n\}$ sont adjacents et définissent un nombre réel $(b_n \mid a_n) = \theta$.

3° Si $\theta = \frac{\pi}{k}$ avec k entier supérieur à 2, démontrer que ka_n et kb_n sont les périmètres des polygones réguliers convexes de $2^n k$ côtés circonscrit et inscrit à un cercle de diamètre $2\,R = 1$. Retrouver ainsi dans ce cas la valeur de $(b_n \mid a_n)$.

118. Reprendre l'exercice précédent (1° et 2°) en posant cette fois :

$$a_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}, \quad b_0 = \frac{1}{\sin \theta}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} \cdot b_n}.$$

(Toutes les valeurs sont remplacées par leurs inverses.)

119. 1° Démontrer que pour a, b, m entiers et $\sqrt{m}$ irrationnel :

$$a = b\sqrt{m} \iff a = 0, \quad b = 0$$

2° En déduire que si a, b, c, d, m sont des rationnels et $\sqrt{m}$ irrationnel

$$a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{m} \iff a = c \quad \text{et} \quad b = d.$$

120. 1° Si des entiers naturels a, b, c, vérifient la relation : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ les produits ab, bc et ca sont des carrés parfaits. En déduire qu'il existe des entiers α, β et k tels que : $a = k\alpha^2$, $b = k\beta^2$ et $c = k(\alpha + \beta)^2$.

2° La relation $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ est-elle possible si a et b ne sont pas carrés parfaits ?

121. 1° Si les entiers a, b, c vérifient la relation : $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = c$, ils sont de la forme : $a = 2k^2 - m$, $b = 4k^2(k^2 - m)$ et $c = 2k$ avec k et $m \in \mathrm{N}$.

2° Déterminer de même la forme de a, b, c pour : $\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = c$.

122. On se propose de résoudre en entiers : $x^2 = y^2 + z^2$ ou $z = \sqrt{(x+y)(x-y)}$.

1° Montrer que $x + y$ et $x - y$ sont de même parité. S'ils sont tous deux impairs montrer que x et z sont impairs et y pair. Dans ce cas on échange y et z.

2° On peut donc supposer $x + y$ et $x - y$ pairs et désigner par $2k$ leur P. G.C.D.
En déduire que : $x + y = 2k\alpha^2$, $x - y = 2k\beta^2$ avec $\alpha, \beta \in \mathrm{N}$
et que : $x = k(\alpha^2 + \beta^2)$, $y = k(\alpha^2 - \beta^2)$, $z = 2k\alpha\beta$

3° Rechercher, dans N, les 5 solutions les plus simples où x, y, z sont premiers entre eux.

123. Si m est un entier naturel non carré parfait, on désigne par P_m l'ensemble des réels

$$z = a + b\sqrt{m} \quad \text{où} \quad a \in \mathrm{N},\ b \in \mathrm{Z} \quad \text{tels que :} \quad a^2 - mb^2 = 1.$$

1° Montrer que la multiplication dans P_m est une loi de groupe abélien. Pour $z = a + b\sqrt{m}$ et $z' = a' + b'\sqrt{m}$, calculer le produit zz', le quotient $\frac{z}{z'}$, et $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Démontrer que z est positif, $z - 1$ du signe de b et que : $a > a' \Longleftrightarrow |b| > |b'| \Longleftrightarrow \frac{|b|}{a} > \frac{|b'|}{a'}$.

2° Soit $u = \alpha + \beta\sqrt{m}$ le plus petit élément de P_m supérieur à 1. Montrer que $z > u$ équivaut à $\frac{z}{u} \geqslant u$. En déduire que tout $z \in \mathrm{P}_m$ est égal à u^n avec $n \in \mathrm{Z}$ (groupe monogène). Calculer u^2, u^3, u^4 et u^5 ainsi que leurs inverses.

3° En déduire que si l'on connaît dans N, la solution la plus simple, autre que (1, 0) de l'*équation de Pell* : $x^2 - my^2 = 1$, on peut obtenir toutes les autres.

124. 1° Établir pour n et k éléments de N, les identités :

$k^2 - (k^2 - 1)\,1^2 = 1$; $\quad (2k + 1)^2 - (k^2 + k)\,2^2 = 1$;
$(k^2 \pm 1)^2 - (k^2 \pm 2)\,k^2 = 1$; $\quad (2k^2 \pm 1)^2 - (k^2 \pm 1)\,2^2k^2 = 1$.

2° En déduire une solution de l'équation de Pell : $x^2 - my^2 = 1$ pour :
$m = k^2 \pm 1$, $m = k^2 \pm 2$, $m = 4(k^2 \pm 1)$ et $m = k(k+1)$ ou $4k(k+1)$.

3° Trouver ainsi la première solution après (1, 0) de l'équation $x^2 - my^2 = 1$ pour
$m = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 23, 24, 26, 27$ et 30.
Y a-t-il des solutions autre que (1, 0) pour $m = k^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36$, etc.

125. On développe $\sqrt{28}$ en fraction continue (voir ex. n° 95) en écrivant :

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{28} - 5} = \frac{\sqrt{28} + 5}{3} = 3 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{28} + 4}{4} = 2 + \frac{1}{x_3} \text{ etc.}$$

1° Montrer que $x_4 = 5 + \sqrt{28} = 10 + \frac{1}{x_1}$, que $x_{n+4p} = x_n$ et que l'on obtient une fraction continue périodique illimitée : (5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10...). Établir que ses différentes réduites $r_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$ vérifient $r_{2n} < \sqrt{28} < r_{2n+1}$ et que $\mathrm{Q}_{4n} > a_1a_2a_3 \ldots a_{4n} > 10^{2n}$. En déduire que $\{r_{2n}\}$ et $\{r_{2n+1}\}$ sont deux ensembles adjacents qui définissent un réel $x = (r_{2n} \mid r_{2n+1}) = \sqrt{28}$ et on écrit :

$$\sqrt{28} = (5, \overline{3, 2, 3, 10}).$$

2° Calculer les différentes réduites $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ de (5, 3, 2, 3, 5). Montrer que :

$\sqrt{28} = (5, 3, 2, 3, 5 + \sqrt{28}) = \dfrac{\alpha_4 + \alpha_3\sqrt{28}}{\beta_4 + \beta_3\sqrt{28}}$ et (cf. ex. n° 119) que $\beta_4 = \alpha_3$, $\alpha_4 = 28\,\beta_3$.

3° La relation $(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3) = (-1)^4$ donne donc : $\alpha_3^2 - 28\,\beta_3^2 = 1$ et fournit, dans N, la solution la plus simple (α_3, β_3) ou (P_3, Q_3) de l'équation $x^2 - 28\,y^2 = 1$. Peut-on en trouver d'autres (cf. ex. n° 123) ?

126. 1° Vérifier sur des exemples que si m est un entier positif, $\sqrt{m}$ se développe en fraction continue périodique $(a, \overline{a_1, a_2 \dots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n})$ où $a_n = 2a$ et $a_{n-p} = a_p$ et que les deux termes de la réduite $r_{n-1} = \frac{\alpha}{\beta}$ constituent une solution (α, β) de l'équation $x^2 - my^2 = (-1)^n$ tandis que r_{2n-1} égal à $\dfrac{\alpha^2 + m\beta^2}{2\alpha\beta}$ donne toujours une solution $(\alpha^2 + m\beta^2, 2\alpha\beta)$ de l'équation $x^2 - my^2 = 1$ et une solution $(\alpha^2 + m\beta^2, \alpha\beta)$ de l'équation $x^2 - 4\,my^2 = 1$.

2° Résoudre ainsi l'équation $x^2 - my^2 = 1$ pour l'une des valeurs de m suivantes :

$m = 13, 19, 21, 22, 29, 31, 33, 39, 41, 43$ ou 46

ou pour $m = 12, 20, 28, 40, 44, 52$, et 56.

127. 1° Démontrer que si les réels a, b, c sont tels que a^2 soit la moyenne arithmétique de b^2 et c^2 la somme $b + c$ est la moyenne harmonique de $b + a$ et $c + a$ ainsi que de $b - a$ et $c - a$.

$$a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \implies \frac{2}{b+c} = \frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{c-a}.$$

2° Établir les trois réciproques.

128. Étant donné un réel positif α, montrer que l'on peut déterminer deux réels positifs a et b tels que :

$$ab = \alpha \text{ et } 0 < \frac{b-a}{4a} < \frac{1}{10}$$

2° On considère les deux ensembles $A = \{a_n\}$ et $B = \{b_n\}$ tels que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Démontrer que : $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ et $b_n - a_n < \dfrac{b-a}{10^n}$.

3° En déduire que les deux ensembles A et B sont adjacents et définissent le réel $x = \sqrt{\alpha}$, moyenne géométrique de a et b.

129. 1° Montrer que $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b$ pour $a, b \in R^+$.

2° Quel est le plus grand des deux nombres 24 335 et $3\,588\sqrt{46}$?

— Comparer les nombres suivants :

130. 18 et $5\sqrt{13}$ **131.** 23 et $4\sqrt{33}$ **132.** 25 et $4\sqrt{39}$

133. 32 et $5\sqrt{41}$ **134.** 55 et $12\sqrt{21}$ **135.** 70 et $13\sqrt{29}$

136. 127 et $24\sqrt{28}$ **137.** 161 et $24\sqrt{45}$ **138.** 170 et $39\sqrt{19}$

139. 197 et $42\sqrt{22}$ **140.** 1 520 et $273\sqrt{31}$ **141.** 3 482 et $531\sqrt{43}$.

142. Établir l'égalité :

$$\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

143. Calculer les nombres suivants : $x = \sqrt[6]{a}.\ \sqrt[10]{a^7}.\ \sqrt[15]{a^2}$;

$$y = \sqrt[12]{a^7}.\ \sqrt[20]{a^3}.\ \sqrt[15]{a^4} \quad \text{et} \quad z = \sqrt[20]{a^3}.\ \sqrt[28]{a^5}.\ \sqrt[35]{a^6}.$$

144. Écrire : $\dfrac{\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[4]{64}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{16}}}$ sous la forme 2^m avec $m \in \mathbb{Q}$.

145. $\dfrac{\sqrt[10]{81}.\ \sqrt[15]{3}.\ \sqrt[3]{9}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt[5]{27}}$ sous la forme 3^n avec $n \in \mathbb{Q}$.

146. $\dfrac{\left(\sqrt[10]{\sqrt{49}}\right)^5.\ \left(\sqrt[5]{\sqrt{343}}\right)^3.\ \sqrt[4]{\sqrt[5]{7^{11}}}}{\sqrt[20]{7^4}}$ s'écrit : 7^p avec $p \in \mathbb{Q}$.

147. $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{80\times 6^7}}\cdot\sqrt[10]{8\times 6}\cdot\sqrt[9]{\sqrt[5]{64\times 125}}}{\sqrt[5]{2}\cdot\left(\sqrt[6]{\sqrt{5\times 30}}\right)^4}$ s'écrit $2^m\ 3^n\ 5^p$ avec $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

148. Écrire sous la forme 2^m et ranger par ordre de grandeur croissante :

$$A = \sqrt[16]{64},\quad B = \sqrt[7]{2}.\ \sqrt[8]{4} \quad \text{et} \quad C = \frac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[10]{8}}.$$

149. Si a et b sont des rationnels positifs avec $\sqrt{b}$ irrationnel et $a^2 - b = c^2$ on a :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+c)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-c)} \quad \text{et} \quad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+c)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-c)}$$

— Utiliser les formules précédentes pour écrire sous la forme $x \pm \sqrt{y}$ les radicaux :

150. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ **151.** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ **152.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

153. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ **154.** $\sqrt{41+12\sqrt{5}}$ **155.** $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

156. $\sqrt{73+12\sqrt{35}}$ **157.** $\sqrt{23-6\sqrt{10}}$ **158.** $\sqrt{2a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}}$

— Montrer que les nombres suivants sont entiers :

159. $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ **160.** $\sqrt{2}\,\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{2}\,\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$

161. $\sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-1)$ **162.** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,(2+\sqrt{3})\,\sqrt{2-\sqrt{3}}.$

163. $\sqrt[3]{a+\dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a-\dfrac{a+1}{3}\sqrt{\dfrac{8a-1}{3}}}.$ Poser $8a = 3b^2 + 1$.

164. Soient sur un axe d'origine O, quatre points A (a), B (b), C (c) et D (d). On désigne par I et J les milieux de AB et CD, par K et L les milieux de AC et BD et par M et N les milieux de AD et BC. Démontrer les relations :

1° $\overline{AB}.\ \overline{CD} + \overline{AC}.\ \overline{DB} + \overline{AD}.\ \overline{BC} = 0.$

2° $\overline{DA}^2.\ \overline{BC} + \overline{DB}^2.\ \overline{CA} + \overline{DC}^2.\ \overline{AB} + \overline{AB}.\ \overline{BC}.\ \overline{CA} = 0.$

3° $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{CB} = 2\,\overline{KL}$ (donner deux autres relations analogues).

165. On donne sur un axe deux points A (a) et B (b).

1° Déterminer les abscisses des points C (c) et D (d) tels que : $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = k \neq 1.$

Montrer que, quel que soit k on a : $2\,(ab + cd) = (a + b)\,(c + d)$ *(Division harmonique)*. Soient et J les milieux de AB et CD. Calculer en fonction de k les rapports :

$$\frac{\overline{JA}}{\overline{JC}},\ \frac{\overline{JC}}{\overline{JB}},\ \frac{\overline{JA}}{\overline{JD}},\ \frac{\overline{JD}}{\overline{JB}} \text{ et } \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}}.$$

3° En posant $m = \frac{k-1}{k+1}$ calculer en fonction de m les rapports :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}, \frac{\overline{IC}}{\overline{IA}}, \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}}, \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}}, \frac{\overline{IB}}{\overline{ID}} \text{ et } \frac{\overline{IC}}{\overline{ID}}.$$

166. Soient quatre points A (a), B (b), C (c) et D (d) d'un axe. On pose : $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = m$.

1° Déterminer les abscisses x et y des points E et F tels que $\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FB}} = k$.

2° Calculer en fonction de m les rapports $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$ et $\frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$.

3° Montrer que CD et EF ont même milieu I.

167. On considère sur un axe Ox deux points fixes A (a) et B $(-a)$ ainsi que deux points variables M (x) et N (y) tels que $\overline{AM}.\overline{BN} = k > -a^2$.

1° Démontrer qu'il existe sur Ox deux points E et F symétriques par rapport à O et tels que :

$$\overline{AE}.\overline{BE} = \overline{AF}.\overline{BF} = k.$$

2° Comparer les rapports $\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}, \frac{\overline{BE}}{\overline{BN}}$ et $\frac{\overline{FM}}{\overline{FN}}$ ainsi que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AF}}, \frac{\overline{BF}}{\overline{BN}}$ et $\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}}$.

3° Soit R le point de Ox tel que $\frac{\overline{RM}}{\overline{RN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$. Nature de la division (EFMR)?

LE CORPS C DES NOMBRES COMPLEXES

146. Introduction. — Quel que soit le nombre réel b il est impossible de trouver un nombre réel x tel que $x^2 = -b^2$ car cela conduirait à écrire : $x = \pm b\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-1} \notin R$. C'est pour résoudre l'équation $(x-a)^2 + b^2 = 0$ que l'italien Bombelli (vers 1560) eut l'idée d'envisager des *nombres imaginaires* de la forme $a + b\sqrt{-1}$ auxquels il appliqua sans rencontrer d'inconvénient, les règles du calcul algébrique. Or ces nombres appelés maintenant *nombres complexes* ont puissamment contribué au développement actuel des Mathématiques et même de la Physique.

147. Définition. — ***On appelle nombre complexe tout couple ordonné de nombres réels $[a, b]$ satisfaisant aux axiomes suivants :***

1° *Égalité :* $[a, b] = [a', b'] \Longleftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

2° *Addition :* $[a, b] + [a', b'] = [a + a', b + b']$

3° *Multiplication* : $[a, b] \cdot [a', b'] = [aa' - bb', ab' + ba']$.

L'ensemble C *des nombres complexes* n'est donc autre que l'ensemble R^2 muni des lois d'égalité, d'addition et de multiplication ci-dessus.

Si on pose : $z = [a, b]$, $z' = [a', b']$ ... on voit que :

Toute égalité entre deux nombres complexes $z = z'$ équivaut à deux égalités $a = a'$ et $b = b'$ entre les composants de ces nombres.

On vérifie aisément les propriétés de réflexivité, symétrie et transivité de l'égalité des nombres complexes :

$$1^\circ\ z = z \qquad 2^\circ\ z = z' \Longrightarrow z' = z \qquad 3^\circ\ z = z' \text{ et } z' = z'' \Longrightarrow z = z''$$

148. Propriétés de l'addition des nombres complexes.

1° *Elle est associative* car $[a + a', b + b'] + [a'', b'']$ et $[a, b] + [a' + a'', b' + b'']$ sont égaux à $[a + a' + a'', b + b' + b'']$.

Donc : $$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

2° *Elle est commutative* car $[a + a', b + b'] = [a' + a, b' + b]$ c'est dire : $$z + z' = z' + z.$$

3° *Elle admet un élément neutre* $[0, 0]$ car $[a, b] + [0, 0] = [a, b]$.

Cet élément neutre $[0, 0]$ appelé *complexe nul* est unique (n° 27, 1°).

4° *Tout complexe* $[a, b]$ *admet pour opposé* $[-a, -b]$ *car* $[a, b] + [-a, -b] = [0, 0]$.

L'opposé $\tilde{z} = [-a, -b]$ du complexe $z = [a, b]$ est unique (n° 27, 2°).

L'ensemble* C *des nombres complexes a une structure de groupe additif abélien.

On en déduit l'existence et l'unicité de la différence $z - z'$ (n° 33) :

$$z'' = z - z' = [a, b] - [a', b'] = [a, b] + [-a', -b'] = [a - a', b - b'].$$

149. Propriétés de la multiplication.

1° *Elle est associative* : $(zz')\,z'' = z\,(z'z'')$ car les deux produits : $[aa' - bb', ab' + ba'].[a'', b'']$ et $[a, b]\,[a'a'' - b'b'', a'b'' + b'a'']$ sont tous deux égaux à :

$$[aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - bb'a'', aa'b'' + ba'a'' + ab'a'' - bb'b''].$$

2° *Elle est commutative* : $zz' = z'z$ car :

$$[aa' - bb', ab' + ba'] = [a'a - b'b, a'b + b'a].$$

3° *Elle admet un élément neutre* $[1, 0]$ car $[a, b]\,[1, 0] = [a, b]$.
Cet élément neutre est unique (n° 27, 1°).

4° *Tout complexe non nul* $[a, b]$ *admet pour inverse* $\left[\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right]$ car :

$$[a, b]\left[\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right] = \left[\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2}\right] = [1, 0].$$ Cet inverse est unique (n° 27,2°)

5° *La multiplication est distributive par rapport à l'addition.* En effet :

$$\begin{aligned} z\,(z' + z'') &= [a, b]\,[a' + a'', b' + b''] \\ &= [a\,(a' + a'') - b\,(b' + b''), a\,(b' + b'') + b\,(a' + a'')] \\ &= [(aa' - bb') + (aa'' - bb''), (ab' + ba') + (ab'' + ba'')] \\ &= [aa' - bb', ab' + ba'] + [aa'' - bb'', ab'' + ba''] \end{aligned}$$

donc : $z\,(z' + z'') = zz' + zz''$.

L'ensemble* C* *des complexes non nuls constitue un groupe multiplicatif abélien.

On en déduit l'existence et l'unicité du rapport $z'' = \frac{z}{z'} \Longleftrightarrow z = z'z''$ pour tout élément (z, z') de l'ensemble $C \times C^*$. On peut définir $z^2 = z.z$, puis par la formule de récurrence $z^{p+1} = z^p.\,z$ et par $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ toute puissance entière de z.

150. Conclusion. — ***L'ensemble* C *des nombres complexes a une structure de corps commutatif.*** — En effet (n° 36) :

1° L'ensemble C est un groupe additif abélien (n° 148).

2° L'ensemble C* est un groupe multiplicatif abélien (n° 149).

3° La multiplication est distributive par rapport à l'addition (n° 149, 5°).

Montrons que l'on peut, dans C, *inclure le corps* R *des nombres réels.* Pour cela associons au nombre complexe $[a, 0]$, le nombre réel a. Dans cette correspondance bijective :

1° La somme $[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0]$ est associée à la somme $a + b$.

2° Le produit $[a, 0] \cdot [b, 0] = [ab, 0]$ est associé au produit ab.

L'ensemble des nombres complexes de la forme $[a, 0]$ et l'ensemble R des nombres réels sont donc isomorphes pour l'addition, la multiplication et par suite pour la soustraction, la division ou l'élévation à une puissance. C'est pourquoi on identifie ces deux ensembles.

***Tout nombre complexe* $[a, 0]$ *est identique au nombre réel* a.**

Autrement dit, le corps des nombres réels est un sous-corps du corps C des nombres complexes et on peut écrire : $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

151. Notations définitives. — 1° ***Le nombre complexe réel*** $[a, 0]$ ***s'écrit*** a.

Le nombre complexe $[0, 0]$ s'écrit 0 *(zéro)*.

Le nombre complexe $[1, 0]$ s'écrit 1 *(unité)*.

L'opposé du nombre complexe z soit $0 - z$ s'écrit $-z$ et son inverse s'écrit : $\frac{1}{z} = z^{-1}$.

2° ***Le nombre complexe*** $[0,1]$ ***est symbolisé par la lettre*** i.

On voit que $i^2 = i \times i = [0, 1].[0, 1] = [-1, 0] = -1$. *Le carré de* i *est* -1.

Le nombre complexe $[0, b] = [b, 0].[0, 1]$ s'écrit bi *ou* ib *et est dit imaginaire pur.* Notons que $(ib)^2 = i^2b^2 = -b^2$.

3° ***Tout nombre complexe*** $z = [a, b] = [a, 0] + [0, b]$ ***s'écrit*** $z = a + bi$ ***ou*** $a + ib$.

Les nombres a et bi sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $a + ib$. On dit aussi que a est le composant réel et b le composant imaginaire de $a + ib$. Donc (n° 145) :

$$\boxed{a + bi = a' + b'i} \iff \boxed{a = a' ;\ b = b'}$$

4° ***Les nombres complexes*** $z = a + ib$ ***et*** $\bar{z} = a - ib$ ***sont dits complexes conjugués.***

Ils ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées. Notons que :

$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{et} \quad z - \bar{z} = 2ib \quad \text{soit} \quad a = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

152. Règle. — ***Les opérations sur les nombres complexes sont soumises aux mêmes règles que les opérations sur des nombres réels à condition de remplacer chaque fois que cela est possible*** i^2 ***par*** -1.

Ceci en ce qui concerne les *égalités, les sommes algébriques, les produits, les rapports et les puissances entières.*

Ainsi : $$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$
$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa - bb') + i(ab' + ba').$$

On retrouve les règles d'addition et de multiplication. Notons que :

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2abi + i^2b^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$
$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

On en déduit que : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

153. Représentation géométrique des nombres complexes. — Dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy (fig. 32), de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut associer à tout nombre complexe $z = a + ib$ le point M (a, b) de coordonnées $x = a$, $y = b$ et réciproquement :

***Le point* M *est l'image (ou point représentatif) du nombre complexe* $z = a + ib$. *Le nombre complexe* $z = a + ib$ *est l'affixe du point* M (a, b) *ou* M (z).**

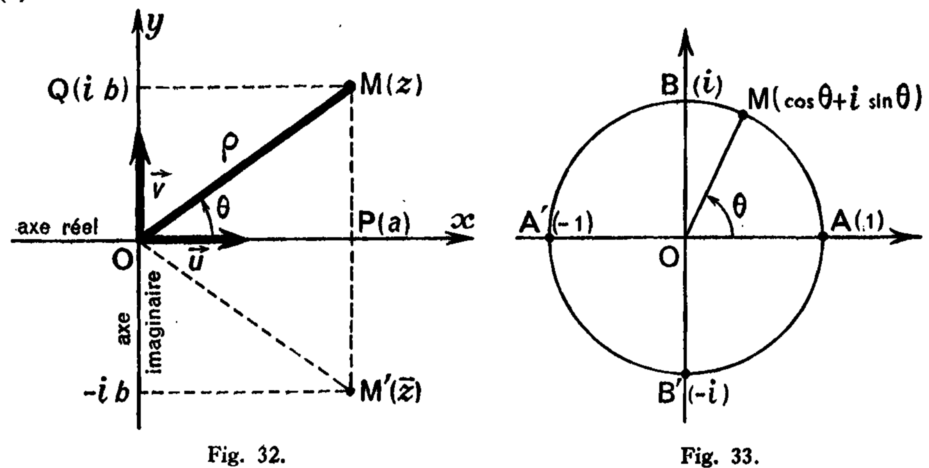


Fig. 32. Fig. 33.

On dit également que $\overrightarrow{OM}$ est le *vecteur-image* du nombre complexe z et que z est la *mesure complexe* du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Il y a donc une correspondance bijective entre l'ensemble des nombres complexes et l'ensemble des points M (ou des vecteurs $\overrightarrow{OM}$) du plan. Notons que :

Tout point P d'affixe réel $z = a$ se place sur Ox, appelé *axe réel* tandis que tout point Q d'affixe imaginaire $z = ib$ se place sur Oy appelé *axe imaginaire.*

On appelle plan complexe tout plan dans lequel chaque point* M (z) *est déterminé par son affixe* z *par rapport à un repère orthonormé* xOy *ainsi défini.

Dans le plan complexe deux points M et M_1 symétriques par rapport à O ont des affixes opposés $z = a + ib$ et $z_1 = -a - ib = -z$. Deux points M et M′ symétriques par rapport à l'axe réel Ox ont des affixes $z = a + ib$ et $z' = a - ib = \bar{z}$ complexes conjugués. Deux points M et M″ symétriques par rapport à Oy ont des affixes $z = a + ib$ et $z'' = -a + ib$ tels que $z'' = -\bar{z}$. On désigne le plus souvent par A, A′, B, B′ les points d'affixes respectifs $+1$, -1, $+i$ et $-i$ situés sur le cercle trigonométrique (fig. 33).

154. Définition. — ***On appelle module et argument du nombre complexe*** z, ***affixe du point*** M, ***le module*** ρ ***et l'angle polaire*** θ ***du vecteur*** $\overrightarrow{OM}$ (fig. 32).

$$\boxed{\rho = |z| = OM} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})} \quad \text{en radians (mod } 2\pi).$$

Tout nombre réel x a pour module $|x|$ et pour argument $\theta = 0$ pour $x > 0$, $\theta = \pi$ pour $x < 0$. Tout nombre imaginaire iy a pour module $|y|$ et pour argument $\theta = +\frac{\pi}{2}$ pour $y > 0$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ pour $y < 0$. L'origine O a pour affixe $z = 0$, de module $\rho = 0$ et d'argument indéterminé. Notons que :

$$z' = z \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} \Longleftrightarrow \rho' = \rho \quad \text{et} \quad \theta' = \theta \ (\text{mod } 2\pi)$$

Pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même module et des arguments égaux à $2k\pi$ près.

Les relations évidentes : $\boxed{a = \rho\cos\theta}$ et $\boxed{b = \rho\sin\theta}$

montrent que $z = a + ib$ peut s'écrire sous la forme trigonométrique :

$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ soit en abrégé $z = (\rho, \theta)$ ou $z(\rho, \theta)$.

Pour $\rho = 1$, le point M d'affixe $z = (1, \theta)$ est, sur le cercle trigonométrique, l'extrémité de l'arc $\widehat{AM} = \theta$ (fig. 33). Ainsi A, B, A', B' ont pour arguments respectifs : 0, $\frac{\pi}{2}$, π, et $-\frac{\pi}{2}$.

Inversement, si $z = a + ib$ est donné sous forme algébrique, ρ et θ sont déterminés par :

$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\rho},\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}}$

Ces deux dernières relations sont compatibles et déterminent θ à $2k\pi$ près. On peut aussi utiliser $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ en tenant compte du signe de a ou $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\rho - a}{b}$.

Notons que :

$z' = -z \Longleftrightarrow \rho' = \rho;\ \theta' = \theta + \pi$ (mod 2π).

$z' = \bar{z} \Longleftrightarrow \rho' = \rho;\ \theta' = -\theta$ (mod 2π).

Si : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,

on a $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$

d'où : $z + \bar{z} = 2\rho\cos\theta$

et $z - \bar{z} = 2\rho i\sin\theta$.

Remarque. — Pour calculer le module ρ du nombre complexe z, il est parfois commode d'utiliser le complexe conjugué $\bar{z}$ car :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = \rho^2$$

donc : $\boxed{\rho = \sqrt{z\bar{z}}}$

Fig. 34.

155. Interprétation de l'addition. — Soient (fig. 34) M_1 et M_2 les points d'affixes :

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2 + ib_2.$$

Construisons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (a_1\vec{u} + b_1\vec{v}) + (a_2\vec{u} + b_2\vec{v})$

$$= (a_1 + a_2)\vec{u} + (b_1 + b_2)\vec{v}$$

On voit que M a pour affixe $z = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) = z_1 + z_2$. Donc :

$$\boxed{z = z_1 + z_2} \iff \boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}$$

L'addition de deux nombres complexes équivaut à l'addition de leurs vecteurs-images.

$z(\rho, \theta) = z_1(\rho_1, \theta_1) + z_2(\rho_2, \theta_2) = (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2) + i(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)$
entraîne :

$$\rho^2 = (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2)^2 + (\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

soit : $(\rho_1 - \rho_2)^2 \leqslant \rho^2 \leqslant (\rho_1 + \rho_2)^2 \iff \boxed{|\rho_1 - \rho_2| \leqslant \rho \leqslant \rho_1 + \rho_2}$

Notons que : $\rho = \rho_1 + \rho_2$ pour $\theta_1 = \theta_2 \pmod{2\pi}$. Puis de proche en proche (cf. n°106):

Le module de la somme de plusieurs complexes est au plus égal à la somme des modules de chacun d'eux.

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Si les nombres complexes z et z_1, affixes de M et M_1, sont donnés, la différence $z_2 = z - z_1$ est l'affixe de M_2 tel que $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M}$.

156. Interprétation de la multiplication. — Si $z(\rho, \theta) = z_1(\rho_1, \theta_1) \times z_2(\rho_2, \theta_2)$
on obtient : $z = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \times \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$,
soit : $z = \rho_1\rho_2[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1)]$.
ou : $z = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = z(\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2)$.

Donc : $\boxed{z = z_1 z_2} \iff \boxed{\rho = \rho_1 \rho_2 ; \quad \theta = \theta_1 + \theta_2}$

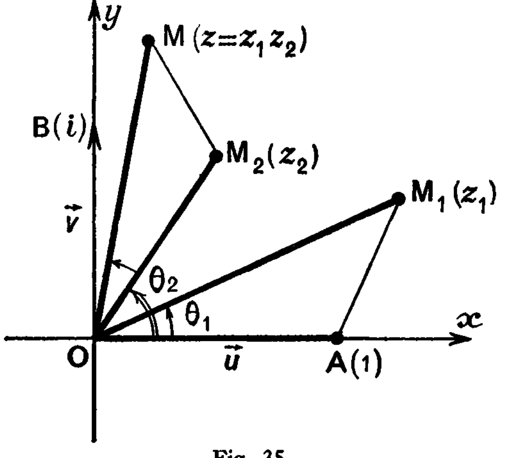


Fig. 35.

et de proche en proche :

$z = z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n$ entraîne
$\rho = \rho_1\rho_2 \dots \rho_n$ et $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots \theta_n$.

Le module et l'argument d'un produit de facteurs complexes sont respectivement le produit des modules et la somme des arguments de chacun des facteurs.

On met ainsi en évidence les propriétés d'associativité et de commutativité d'un tel produit.

Notons que le produit z_1z_2 est réel et positif si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$, réel et négatif si $\theta_1 + \theta_2 = \pi \pmod{2\pi}$ et que $z_1z_2 = 0 \iff z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.

Construisons dans le plan complexe (fig. 35) les points A (1), $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et M $(z = z_1z_2)$:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta = \theta_1 + \theta_2 = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_2})$$

donc :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_2}) \Longrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM}) \quad (1)$$

$$OM = \rho_1\rho_2 \Longrightarrow OA.\,OM = OM_1.\,OM_2 \Longrightarrow \frac{OA}{OM_1} = \frac{OM_2}{OM} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) montrent que les deux triangles OAM_1 et OM_2M sont directement semblables. Il en est de même de OAM_2 et OM_1M.

***La similitude directe de centre* O, *de rapport* ρ_1 *et d'angle* θ_1 *qui transforme* A *en* M_1 *transforme* M_2 *en* M.**

Cette similitude se réduit à une homothétie positive si $\theta_1 = 0$, négative si $\theta_1 = \pi$. Elle se réduit à une rotation d'angle θ_1 pour $\rho_1 = 1$. *Ainsi* P *image de* iz *se déduit de* M, *image de* z *par une rotation de centre* O *et d'angle* $+\frac{\pi}{2}$ (fig. 36).

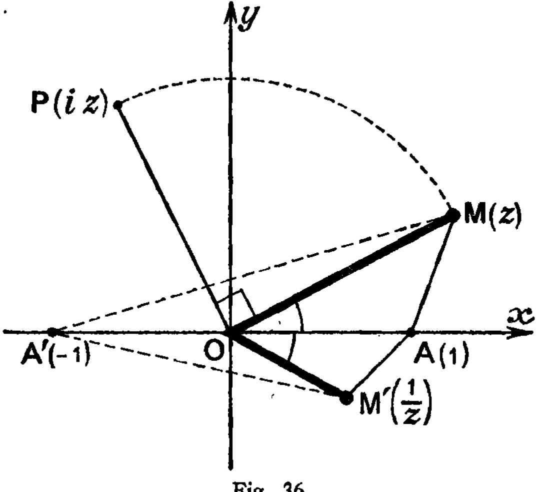


Fig. 36.

Si les nombres complexes z et z_1, affixes de M et M_1, sont donnés, le quotient $z_2 = \frac{z}{z_1}$ est l'affixe du point M_2 tel que le triangle OMM_2 soit directement semblable au triangle OM_1A.

157. Nombres inverses. — D'après ce qui précède :

$$zz' = 1 \Longleftrightarrow \rho\rho' = 1 \quad \text{et} \quad \theta + \theta' = 0 \Longrightarrow z' = \left(\frac{1}{\rho}, -\theta\right)$$

Deux nombres complexes inverses ont des modules inverses et des arguments opposés.

Construisons (fig. 36) les points A (1), A' (— 1), M (z) et M' $\left(\frac{1}{z}\right)$. Les relations $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA}) = \theta$ et $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OM'} = \rho$ entraînent la similitude directe des triangles OAM et OM'A. Ainsi d'ailleurs que celle des triangles OA'M et OM'A'. Si $z = a + ib$, $z' = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. On retrouve ainsi l'expression (n° de 148, 4°) de l'inverse de z.

158. Rapport de deux nombres complexes. $z = \frac{z_1}{z_2} \Longleftrightarrow zz_2 = z_1$.

Soit : $\rho\rho_2 = \rho_1$ et $\theta + \theta_2 = \theta_1 \Longleftrightarrow$ $\boxed{\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \ \theta = \theta_1 - \theta_2}$

Le module et l'argument d'un rapport sont respectivement égaux au rapport des modules et à la différence des arguments du numérateur et du dénominateur.

Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$, $\rho = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|\dfrac{a + ib}{c + id}\right| = \dfrac{|a + ib|}{|c + id|} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Pour mettre un rapport sous la forme $x + iy$ il suffit de multiplier ses deux termes par le complexe conjugué du dénominateur.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

REMARQUE. — Éviter d'utiliser cette dernière expression pour calculer le module du rapport $\dfrac{a + ib}{c + id}$ car : $\dfrac{\sqrt{(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2}}{c^2 + d^2}$ est moins simple que : $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$.

PUISSANCES ET RACINES

159. Puissances entières. — Pour $z = (\rho, \theta)$ on obtient $z^2 = (\rho^2, 2\,\theta)$, $z^3 = (\rho^3, 3\,\theta)$ et par récurrence : $z^n = (\rho^n, n\theta)$ et $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (\rho^{-n}, -n\,\theta)$,

Pour tout exposant entier $m \in \mathbb{Z}$ on obtient : $z^m = (\rho^m, m\,\theta)$,

donc : $$[\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)]^m = \rho^m\,(\cos m\theta + i\sin m\theta).$$

Pour $\rho = 1$, on obtient la *formule de Moivre :*

$$\boxed{\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$

dont les applications trigonométriques seront étudiées dans la prochaine leçon.

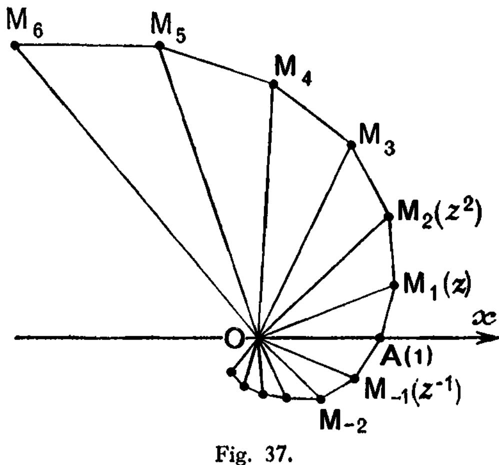


Fig. 37.

Construisons dans le plan complexe les points A(1) ou A(z^0), $M_1(z)$, $M_2(z^2)$... et d'une façon générale $M_n(z^n)$. La relation $z^{n+1} = z^n \cdot z$ montre (nº 156) que :

Le triangle OM_nM_{n+1} *est directement semblable au triangle* OAM_1. Les images des nombres z^n présentent donc la disposition de la figure 37.

Si $\rho = 1$, ces images sont diposées sur le cercle trigonométrique, aux sommets d'un contour polygonal régulier, d'angle au centre θ, qui peut se fermer lorsque θ est un sous-multiple de $2\,k\pi$. Ainsi les images de i, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ sont respectivement les points B, A′, B′ et A (fig. 33).

De même les images de $z = \left(1, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, z^2, z^3, z^4, z^5, $z^6 = 1$ sont les sommets de l'hexagone régulier $M_1M_2A'M_{-2}M_{-1}A$ (fig. 38).

160. Racines d'un nombre complexe. — Soit $Z = (r, \alpha) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ un nombre complexe donné, affixe du point P et un nombre réel positif $n \in N$:

On appelle racine $n^{ième}$ du nombre complexe Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Si $z = (\rho, \theta)$, $z^n = Z \Longleftrightarrow (\rho^n, n\theta) = (r, \alpha)$ c'est-à-dire (n° 154) :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

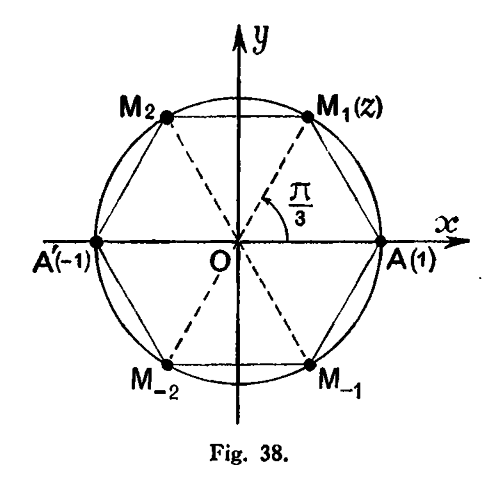


Fig. 38.

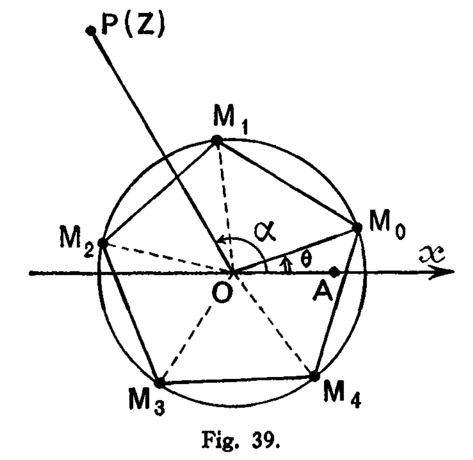


Fig. 39.

Le module ρ de la racine z est bien déterminé, mais on peut prendre pour son argument θ les n valeurs suivantes, distinctes, modulo 2π :

$$\theta_0 = \frac{\alpha}{n}, \quad \theta_1 = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n} \quad \cdots \quad \theta_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Tout nombre complexe non nul admet n racines $n^{ièmes}$ distinctes de même module et dont les arguments successifs diffèrent de $\frac{2\pi}{n}$.

Les images M_0 (ou M_n), M_1, M_2 ... M_{n-1} des n racines z_0, z_1 ... z_{n-1} de Z (r, α) (fig. 39) sont donc disposées sur un cercle de centre O, de rayon $\rho = \sqrt[n]{r}$, aux sommets d'un polygone régulier convexe de n côtés inscrit dans ce cercle. La construction de ces images à partir du point $P(z)$ ne peut en général se faire qu'au rapporteur et au double décimètre $\left(\text{après le calcul de } \sqrt[n]{r}\right)$ sauf cependant si $n = 2$, 4, ou 2^p. En particulier :

161. Racines carrées. — ***Tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées.***

1° Pour calculer ces racines, on peut opérer algébriquement car si $Z = A + iB$ admet pour racine carrée : $z = x + iy$, la relation $(x + iy)^2 = A + iB$ donne :

$$x^2 - y^2 = A \quad (1) \qquad \text{et} \qquad 2xy = B \quad (2)$$

D'où : $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = A^2 + B^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{A^2 + B^2} = r$ (3)
Cette relation (3) exprime que le module $r = \sqrt{A^2 + B^2}$ de Z est égal à $\rho^2 = x^2 + y^2$

carré du module de z. Soit d'après (1) et (3) :

$$x^2 = \frac{r+A}{2}, \qquad y^2 = \frac{r-A}{2} \implies x = \pm\sqrt{\frac{r+A}{2}}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{r-A}{2}} \quad (4)$$

D'après (2), il faut associer les valeurs de x et y de même signe pour $B > 0$, de signes différents pour $B < 0$; d'où deux valeurs opposées pour $z = x + iy$. Notons que (2) :

$$2\,xy = B \implies \frac{y}{x} = \frac{B}{2x^2} = \frac{B}{r+A} \quad \text{et} \quad z = x\left(1 + i\frac{y}{x}\right) \quad \text{donne sans ambiguïté :}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{r+A}{2}}\left(1 + \frac{iB}{r+A}\right). \quad (5)$$

2° Trigonométriquement le module r et l'argument α de $Z = A + iB$ vérifient :

$$r = \sqrt{A^2+B^2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{A}{r}, \ \sin\alpha = \frac{B}{r} \implies \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{B}{r+A} \quad (6)$$

D'où : $$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{r+A}{2r}, \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{r-A}{2r} \quad (7)$$

Soit : $z = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ en prenant $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ de même signe ou de signes contraires suivant que l'on a $B > 0$ ou $B < 0$. On peut aussi écrire :

$$z = \pm\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) \implies z = \pm\sqrt{\frac{r+A}{2}}\left(1 + i\frac{B}{r+A}\right). \quad (5)$$

162. Exemples. — 1° *Racines carrées de* $Z = 5 - 12\,i$.

Il faut : $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2\,ixy = 5 - 12\,i \implies x^2 - y^2 = 5$; $xy = -6$. Comme $x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$, on obtient $x^2 = 9$, $y^2 = 4$, ce qui, compte tenu de $xy = -6$ donne les 2 solutions : $z = \pm(3 - 2\,i)$.

Les formules (5) permettent de vérifier : $z = \pm\sqrt{\frac{13+5}{2}}\left(1 + i\frac{-12}{13+5}\right) = \pm 3\left(1 - \frac{2i}{3}\right)$.

2° *Racines carrées de* $Z = 18\,(-1 + i\sqrt{3})$.

On obtient : $r = |z| = 18\sqrt{1+3} = 36$ d'où : $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Une des racines a pour module $\rho = 6$ et pour argument $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$ d'où :

$$z = \pm 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \implies z = \pm 3\,(1 + i\sqrt{3})$$

Ce que vérifie les formules (5) : $z = \pm\sqrt{\frac{36-18}{2}}\left(1 + i\frac{18\sqrt{3}}{36-18}\right) = \pm 3\,(1 + i\sqrt{3})$.

163. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. — Si $Z = 1 = (1, 2\,k\pi)$ toute racine $n^{\text{ième}}$ de $Z = 1$, sera de la forme : $z_k = \left(1, \frac{2\,k\pi}{n}\right)$ avec $k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$.

En posant $\theta = \frac{2\pi}{n}$, on obtient :

$$z_0 = 1,\ z_1 = (1, \theta),\ z_1 = (1, 2\,\theta) \ldots z_{n-1} = [1, (n-1)\theta] \implies z_k = (z_1)^k.$$

Les différentes racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les n premières puissances entières de la racine complexe $z_1 = \left(1, \frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

Ainsi les 4 racines quatrièmes de $+1$ sont : 1, i, -1 et $-i$ (fig. 40).

Les trois racines cubiques de l'unité sont : $1, j, j^2$ avec : $j = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$.

soit : 1, $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ (fig. 41). Notons que $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$.

164. Théorème. — ***Les différentes racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe Z s'obtiennent en multipliant l'une d'elles z par les différentes racines $n^{ièmes}$ de l'unité.***

Désignons par $1, r_1 = \left(1, \frac{2\pi}{n}\right), r_2, \ldots r_{n-1}$ les n racines de $+1$. Les n nombres distincts : $z_0 = z \times 1$, $z_1 = zr_1 \ldots z_{n-1} = zr_{n-1}$ sont les n racines de Z car

$$z^n = Z \text{ et } (r_k)^n = 1 \Longrightarrow (z_k)^n = z^n r_k^n = Z.1 = Z.$$

Ainsi puisque $(-1)^3 = -1$, les 3 racines cubiques de -1 sont -1, $-j$ et $-j^2$ (fig. 42).

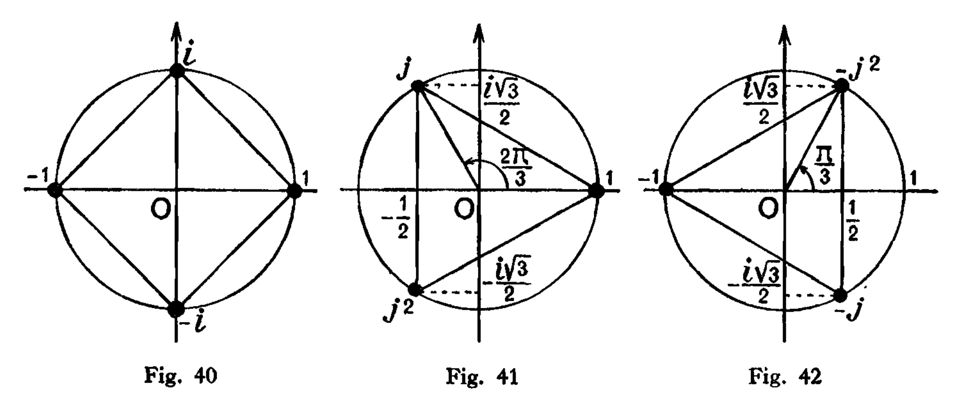


Fig. 40 Fig. 41 Fig. 42

165. Exemples. — 1° *Racines quatrièmes de* -4.

Comme $-4 = (4, \pi)$, l'une des racines est $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$.

Les racines quatrièmes de $+1$ étant $1, i, -1, -i$ on obtient pour racines de -4 :
$1 + i$, $(1 - i)i$, $(1 + i)(-1)$ et $(1 + i)(-i)$ soit $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, et $1 - i$.

2° *Racines cubiques de* $2 - 11i$.

Lorsqu'on ne peut pas opérer trigonométriquement on essaie dans les cas simples de déterminer d'abord une des racines en utilisant la valeur du module.

Le module de $2 - 11i$ est $\sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = \sqrt{5^3}$, celui de ses racines cubiques est donc $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$, donc celui de $2 + i$ ou $1 + 2i$. On voit que $(2 - i)^3 = 2 - 11i$. Les racines cubiques de $2 - 11i$ sont donc :

$$2 - i,\ (2 - i)j = \frac{-2 - \sqrt{3} + i(1 + 2\sqrt{3})}{2} \text{ et } (2 - i)j^2 = \frac{-(2 + \sqrt{3}) + i(1 - 2\sqrt{3})}{2}.$$

Remarque. — On ne peut fixer un sens précis au symbole $\sqrt[n]{z}$ pour $z \in C$ et on évite autant que possible d'en faire usage. Parfois on utilise le symbole $\sqrt[n]{\vec{z}}$ qui indique *une quelconque des racines $n^{ièmes}$ de z*, même lorsque z est réel, sans qu'on puisse spécifier de quelle racine il s'agit.

EXERCICES

— Calculer les nombres suivants :

168. $(3 + i)(5 - 2i)$.

169. $(1 + i)(2 + i)(3 + i)$.

170. $(6 - 5i)(4 + 3i)$.

171. $(1 - 2i)(3 - 4i)(5 - 6i)$.

172. $(7 + 2i)(5 + 3i)$.

173. $(5 - 2i)(4 + 3i)(3 + 4i)(2 - 5i)$.

— Calculer sous la forme $x + iy$ les nombres complexes (ρ, θ) suivants :

174. $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(2\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$.

175. $\left(2, +\frac{\pi}{8}\right)$ et $\left(4, -\frac{3\pi}{8}\right)$.

176. $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$.

177. $\left(1, -\frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$.

178. $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{12}\right)$ et $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right)$.

179. $\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ et $\left(12, -\frac{3\pi}{10}\right)$.

— Écrire sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ les complexes suivants :

180. $1 - i$ et $-4 + 4i$.

181. $\sqrt{2} + 1 + i$ et $\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2)i$.

182. $-1 + i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} + 3i$.

183. $\sqrt{3} - i$ et $-3 - i\sqrt{3}$.

184. $2 - \sqrt{3} - i$ et $1 + (2 + \sqrt{3})i$.

185. $\sqrt{5} + 1 + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

186. $1 + i \operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{cotg}\varphi - i$.

187. $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$.

188. $\dfrac{1 + i \operatorname{tg}\varphi}{1 - i \operatorname{tg}\varphi}$.

189. $\dfrac{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi}{\sin\varphi - i(1 - \cos\varphi)}$.

190. Sachant que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$, trouver les racines carrées de $a + ib$, $-a - ib$, $a - ib$ et $-a + ib$. En déduire une relation entre les racines carrées de deux complexes opposés, conjugués ou tels que l'un est l'opposé du conjugué de l'autre.

191. 1° Calculer les racines carrées de $2i$ et $-2i$.

2° Sachant que $(\alpha + i\beta)^2 = a + ib$, trouver les racines carrées de $2b + 2ia$ et de $\frac{1}{2}(b - ia)$.

— Calculer les racines carrées des nombres suivants :

192. $3 + 4i$ et $5 - 12i$

193. $-8 + 6i$ et $-15 - 8i$

194. $7 - 24i$ et $24 + 10i$

195. $-21 - 20i$ et $-35 + 12i$

196. $-9 + 40i$ et $-26 - 30i$

197. $11 + 60i$ et $48 - 14i$

198. $-40 - 42i$ et $-33 + 56i$

199. $24 - 70i$ et $13 + 84i$

200. $55 - 48i$ et $-63 + 16i$

201. $-39 + 80i$ et $77 - 36i$

202. $1 + 4i\sqrt{3}$ et $13 - 8i\sqrt{3}$

203. $1 - 2i\sqrt{2}$ et $-7 + 6i\sqrt{2}$

204. $11 - 8i\sqrt{5}$ et $31 + 12i\sqrt{5}$

205. $5 + 4i\sqrt{6}$ et $-19 + 12i\sqrt{6}$

206. $3 + 2i\sqrt{10}$ et $27 - 8i\sqrt{10}$

207. $17 + 4i\sqrt{15}$ et $22 - 6i\sqrt{15}$

— Calculer les racines cubiques des nombres suivants :

208. -1	**209.** i	**210.** $-i$
211. $2+2i$	**212.** $11-2i$	**213.** $18+26i$
214. $-9+46i$	**215.** $52+47i$	**216.** $-44+117i$.

— Calculer les racines quatrièmes des nombres suivants :

217. 625	**218.** -4	**219.** $8i(3+\sqrt{2})$
220. $8(-1+i\sqrt{3})$.	**221.** $-7+24i$.	**222.** $28-96i$.
223. $-119+120i$.	**224.** $161-240i$.	**225.** $-527+336i$.

226. Mettre $(1+i\sqrt{3})^{10}$ sous la forme $a+ib$.

227. Calculer $(2\sqrt{3}+i)^3$ et en déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^3 = 18\sqrt{3}+35i$.

228. Établir l'identité : $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$. En déduire les solutions de l'équation : $z^3-3abz+a^3+b^3=0$.

229. 1° Vérifier que tout nombre premier de la forme $4n+1$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme $(a+ib)(a-ib)$ avec a et $b \in \mathrm{N}$.

2° Mettre le nombre $1105 = 5\times 13\times 17$ de 4 façons sous la forme $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$.

230. On pose : $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$ et :

$$z < z' \quad \text{si} \quad x < x' \quad \text{ou si} \quad x = x', y < y'.$$

1° Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre total sur C.

2° Étudier les propriétés des inégalités ainsi définies dans C. Interpréter géométriquement dans le plan complexe les inégalités $z > a$ et $az > b$ où $a, b, z \in \mathrm{C}$.

231. 1° Si n est un entier positif, calculer le module et l'argument des nombres complexes $z = (1+i)^n$ et $z' = (1-i)^n$. Montrer que $z' = \bar{z}$ et calculer $z+z'$ et $z-z'$.

2° En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\mathrm{S} = 1 - \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^6 \dots \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_1 = \mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 - \dots$$

232. On désigne par A, B, C les sommes suivantes :

$$\mathrm{A} = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^6 + \dots \qquad \mathrm{B} = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^4 + \mathrm{C}_n^7 + \dots \qquad \mathrm{C} = \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^5 + \mathrm{C}_n^8 + \dots$$

1° En désignant par $j = \left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ une racine cubique de l'unité, démontrer que :

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C} = 2^n \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B}j+\mathrm{C}j^2) = (1+j)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

2° Établir les formules suivantes :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]; \quad \mathrm{B} = \frac{1}{3}\left[2^n - 2\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right]; \quad \mathrm{C} = \frac{1}{3}\left[2^n - 2\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right]$$

233. Calculer sous forme algébrique les nombres complexes $z_1 = \left(1, \frac{\pi}{8}\right)$ et $z_2 = \left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$. Vérifier que $z_1^8 = z_2^8 = 1$ et $z_1 z_2 = i$. Calculer $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ et $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

234. Former le rapport des nombres complexes $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ algébriquement puis trigonométriquement. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$. Vérifier en utilisant les formules donnant $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. Résoudre l'équation $z^{12} = 1$.

235. 1° Résoudre l'équation : $\cos 4x + \cos x = 0$. Exprimer cette équation en fonction de $\cos x$. En déduire l'équation dont les racines sont $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{3\pi}{5}$ que l'on résoudra :

2° Trouver les rapports trigonométriques de $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{3\pi}{10}$.

236. On considère dans C la relation homographique :

$$xy - \alpha y - \beta x + \gamma = 0 \iff (x - \alpha)(y - \beta) = \alpha\beta - \gamma = k \qquad (1)$$

1° Montrer en écrivant cette relation sous la forme $y = f(x)$ que le birapport

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}$$

est égal au birapport $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ des valeurs correspondantes de x.

2° Démontrer qu'il existe deux valeurs a et b distinctes ou confondues telles $a = f(a)$, $b = f(b)$ avec $a + b = \alpha + \beta$.

3° Si a et b sont distincts : $(xyab) = (x_1 y_1 ab)$ et avec λ constant la relation (1) s'écrit :

$\frac{y - a}{y - b} = \lambda \frac{x - a}{x - b}$. Si $a = b = \frac{\alpha + \beta}{2}$ on a alors : $\frac{1}{y - a} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{\lambda}$.

APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE C

166. Addition des arcs. — Le produit de plusieurs nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs θ_1, θ_2 ... θ_n est le nombre complexe de module 1 et d'arguments : $\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$.

Donc :

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + ... \theta_n)$$
$$= (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) ... (\cos\theta_n + i \sin\theta_n).$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient les valeurs de $\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$ et de $\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)$.

Ainsi :

$$\cos(a + b + c) + i \sin(a + b + c) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$$

D'où :

$$\cos(a + b + c) = \left| \begin{array}{l} \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c \\ - \cos b \sin c \sin a - \cos c \sin a \sin b \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\sin(a + b + c) = \left| \begin{array}{l} \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a \\ + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c. \end{array} \right. \quad (2)$$

En simplifiant par $\cos a \cos b \cos c$ les deux termes de $\dfrac{\sin(a + b + c)}{\cos(a + b + c)}$ on obtient :

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Pour $c = 0$, $\sin c = 0$, $\cos c = 1$ et $\operatorname{tg} c = 0$, on retrouve :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (4)$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

En changeant b en $-b$, il vient :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (7)$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

167. Multiplication des arcs. — Elle est basée sur la *formule de Moivre* (n° 159) :

$\forall m \in Z$: $$\boxed{\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin m\theta)^m} \qquad (1)$$

Rappelons que : $z = (1, \theta) \Longrightarrow z^m = (1, m\theta)$ et $z^{-m} = (1, -m\theta)$.

Lorsque m est un entier naturel, on peut développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^m$ par la formule du binôme de Newton (n° 67) :

$$\cos m\theta + i\sin m\theta = \cos^m\theta + i\,C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta + i^2C_m^2\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + i^3C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta\ldots$$

Ce qui donne, dans R, les deux relations :

$$\cos m\theta = \cos^m\theta - C_m^2\cos^{m-2}\theta\sin^2\theta + C_m^4\cos^{m-4}\theta\sin^4\theta\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$
$$\sin m\theta = C_m^1\cos^{m-1}\theta\sin\theta - C_m^3\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + C_m^5\cos^{m-5}\theta\sin^5\theta\ldots \qquad (3)$$

En simplifiant, par $\cos^m\theta$, les deux termes du rapport $\frac{\sin m\theta}{\cos m\theta}$ on obtient :

$$\boxed{\operatorname{tg} m\theta = \frac{C_m^1\operatorname{tg}\theta - C_m^3\operatorname{tg}^3\theta + C_m^5\operatorname{tg}^5\theta\ldots}{1 - C_m^2\operatorname{tg}^2\theta + C_m^4\operatorname{tg}^4\theta\ldots}} \qquad (4)$$

Les formules (2) et (3) montrent que $\cos m\theta$ et $\sin m\theta$ sont des polynômes homogènes de degré m en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Les relations $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ ou $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ permettent d'écrire :

$\cos m\theta = F(\cos\theta)$; $\qquad \cos 2m\theta = G(\cos^2\theta) = H(\sin^2\theta)$.

$\sin m\theta = \sin\theta\, P(\cos\theta)$ $\qquad \sin(2m+1)\theta = \sin\theta\, Q(\cos^2\theta) = R(\sin\theta)$.

168. Applications. — En remplaçant θ par a on obtient :

1° Pour $m = 2$:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad (1)$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}. \qquad (2)\ (3)$$

2° Pour $m = 3$:

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a\cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a \qquad (4)$$
$$\sin 3a = 3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad (5)$$
$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a}{\cos^3 a - 3\sin^2 a\cos\theta} = \frac{3\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} \qquad (6)$$

3° Pour $m = 4$:

$$\cos 4a = \cos^4 a - 6\sin^2 a\cos^2 a + \sin^4 a = 2\cos^2 2a - 1$$
$$= 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1 = 8\sin^4 a - 8\sin^2 a + 1 \qquad (7)$$
$$\sin 4a = 4\sin a\cos^3 a - 4\sin^3 a\cos a = 2\sin 2a\cos 2a. \qquad (8)$$
$$\operatorname{tg} 4a = \frac{4\operatorname{tg}a - 4\operatorname{tg}^3 a}{1 - 6\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}^4 a} = \frac{2\operatorname{tg}2a}{1-\operatorname{tg}^2 2a}. \qquad (9)$$

169. Linéarisation de $\cos^m\theta$ et de $\sin^m\theta$. — Il s'agit d'écrire $\cos^m\theta$ et $\sin^m\theta$ sous forme d'une combinaison linéaire de sinus ou de cosinus. Le problème se résout aisément pour $m = 2$, 3 ou 4 en utilisant les formules obtenues au paragraphe précédent.

1° De $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ on déduit :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \qquad (1)$$

Notons également que :

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \implies \sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a \qquad (2)$$

2° $$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \implies \cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a \qquad (3)$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \implies \sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin 3a \qquad (4)$$

3° Compte tenu des formules (1), on peut écrire :

$$\cos 4a = 8\cos^4 a - 4(1 + \cos 2a) + 1 = 8\sin^4 a - 4(1 - \cos 2a) + 1$$

d'où :

$$8\cos^4 a = \cos 4a + 4\cos 2a + 3 \implies \cos^4 a = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a \qquad (5)$$

$$8\sin^4 a = \cos 4a - 4\cos 2a + 3 \implies \sin^4 a = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a \qquad (6)$$

Remarque. — En posant $a = \frac{x}{2}$ les formules (1) et (2) donnent :

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x); \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x); \qquad \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x \qquad (7)$$

On en déduit que :

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \implies t^2 = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \qquad (8)$$

D'où : $$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\ ; \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}. \qquad (9)$$

170. Cas général. — Montrons que l'on peut obtenir directement les expressions de $\cos^m\theta$ ou $\sin^m\theta$, quel que soit l'entier positif m :

Posons : $$\lambda = \cos\theta + i\sin\theta \implies \frac{1}{\lambda} = \cos\theta - i\sin\theta;$$

$$\lambda^p = \cos p\theta + i\sin p\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda^p} = \cos p\theta - i\sin p\theta.$$

D'où :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right); \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

$$\cos p\theta = \frac{1}{2}\left(\lambda^p + \frac{1}{\lambda^p}\right); \quad \sin p\theta = \frac{1}{2i}\left(\lambda^p - \frac{1}{\lambda^p}\right) \qquad (2)$$

D'après la formule du binôme de Newton, compte tenu de $C_m^p = C_m^{m-p}$, on obtient en groupant les termes équidistants des extrêmes dans les développements de $\cos^m \theta = \left[\frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right]^m$ et $\sin^m \theta = \left[\frac{1}{2i}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right]^m$.

1° *Pour m pair : $m = 2n$*

$$\cos^{2n}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\left[\left(\lambda^{2n} + \frac{1}{\lambda^{2n}}\right) + C_{2n}^1\left(\lambda^{2n-2} + \frac{1}{\lambda^{2n-2}}\right) + \dots + C_{2n}^{n-1}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + C_{2n}^n\right]$$

$$\sin^{2n}\theta = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\left(\lambda^{2n} + \frac{1}{\lambda^{2n}}\right) - C_{2n}^1\left(\lambda^{2n-2} + \frac{1}{\lambda^{2n-2}}\right) + \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{n-1}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + (-1)^n C_{2n}^n\right]$$

D'où : $$\cos^{2n}\theta = \frac{1}{2^{2n-1}}\left[\cos 2n\theta + C_{2n}^1 \cos(2n-2)\theta + \dots + C_{2n}^{n-1}\cos 2\theta\right] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \quad (3)$$

$$\sin^{2n}\theta = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left[\cos 2n\theta - C_{2n}^1 \cos(2n-2)\theta + \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{n-1}\cos 2\theta\right] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n \quad (4)$$

2° *Pour m impair : $m = 2n + 1$.*

$$\cos^{2n+1}\theta = \frac{1}{2^{2n+1}}\left[\left(\lambda^{2n+1} + \frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right) + C_{2n+1}^1\left(\lambda^{2n-1} + \frac{1}{\lambda^{2n-1}}\right) + \dots + C_{2n+1}^n\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$\sin^{2n+1}\theta = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}i}\left[\left(\lambda^{2n+1} - \frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right) - C_{2n+1}^1\left(\lambda^{2n-1} - \frac{1}{\lambda^{2n-1}}\right) + \dots + (-1)^n C_{2n+1}^n\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

D'où :

$$\cos^{2n+1}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\left[\cos(2n+1)\theta + C_{2n+1}^1 \cos(2n-1)\theta + \dots + C_{2n+1}^n \cos\theta\right] \quad (5)$$

$$\sin^{2n+1}\theta = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\sin(2n+1)\theta - C_{2n+1}^1 \sin(2n-1)\theta + \dots + (-1)^n C_{2n+1}^n \sin\theta\right] \quad (6)$$

Ces formules qui vérifient pour $m = 3$ ou 4 les résultats du paragraphe précédent, donnent pour $m = 5$ et $m = 6$:

$$\cos^5\theta = \frac{1}{16}[\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta]$$

$$\sin^5\theta = \frac{1}{16}[\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta]$$

$$\cos^6\theta = \frac{1}{32}[\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10]$$

$$\sin^6\theta = \frac{1}{32}[-\cos 6\theta + 6\cos 4\theta - 15\cos 2\theta + 10]$$

171. Produits de sinus et de cosinus. — D'après les formules 4, 5, 7, 8 du n° 166 :

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a\cos b$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

Soit : $$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad (1)$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad (2)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \quad (3)$$

On peut donc linéariser un produit de deux sinus ou cosinus et par suite de proche en proche un produit d'un nombre quelconque de tels facteurs. Rappelons que pour $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$, on obtient les formules donnant inversement la transformation d'une somme en produit :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad ; \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (4)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad ; \quad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (5)$$

172. Linéarisation d'un polynôme P $(\cos\theta, \sin\theta)$. — Un tel polynôme est la somme de termes monômes de la forme : $a \cos^m \theta \sin^p \theta$.

On commence par linéariser chacun des facteurs $\cos^m \theta$ et $\sin^p \theta$. Le polynôme P devient alors une combinaison de termes contenant au plus deux facteurs tels que $\cos m\theta$ et $\sin p\theta$. Les formules (1), (2), (3), du paragraphe permettent d'achever la transformation.

Exemple. — *Linéariser l'expression :* $A = 16 \sin^3 x \cos^2 x$.

D'après les formules (4) et (1) du n° 169, on obtient :

$$A = 16 . \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) . \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$
$$= (6 \sin x - 2 \sin 3x) + 6 \sin x \cos 2x - 2 \sin 3x \cos 2x.$$

Or : $6 \sin x \cos 2x = 3 [\sin 3x + \sin(-x)]$ et $-2 \sin 3x \cos 2x = -(\sin 5x + \sin x)$.

Soit : $A = (6 - 3 - 1) \sin x + (-2 + 3) \sin 3x - \sin 5x$

Donc : $\underline{A = 2 \sin x + \sin 3x - \sin 5x.}$

Remarquons que l'on pouvait écrire :

$$A = 4 \sin x (2 \sin x \cos x)^2 = 4 \sin x \sin^2 2x = 2 \sin x (1 - \cos 4x).$$
$$= 2 \sin x - 2 \sin x \cos 4x = 2 \sin x - [\sin 5x + \sin(-3)x].$$

Soit : $A = 2 \sin x + \sin 3x - \sin 5x.$

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS C

173. Définitions. — Un polynôme à une indéterminée X :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

est dit ***réel*** si tous ses coefficients sont réels, *complexe* lorsque certains de ses coefficients sont complexes.

Lorsqu'on donne à X une valeur numérique complexe $z \in C$, le polynôme (réel ou complexe) $P(x)$ prend une valeur $P(z) \in C$. Toute valeur $a \in C$ telle que $P(a) = 0$ est un zéro (ou une *racine*) dans C, du polynôme $P(x)$, ou de l'équation $P(X) = 0$.

Ainsi pour $a \neq 0$, l'équation du 1er degré : $az + b = 0$ admet la racine : $z' = -\frac{b}{a}$ et le binôme $az + b$ s'écrit $a(z - z')$.

174. Équation du second degré à coefficients complexes : $az^2 + bz + c = 0$ (1)

Nous supposons $a \neq 0$. Le trinôme $f(z) = az^2 + bz + c$ s'écrit :

$$f(z) = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] \iff f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (2)$$

et l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de $f(z)$.

1er **Cas** : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. — Le trinôme $f(z) = a\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, admet la racine double

$$z' = -\frac{b}{2a} \quad \text{et s'écrit :} \quad f(z) = a(z - z')^2 \qquad (3)$$

2e **Cas** : $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$. Le nombre Δ admet toujours dans C, deux racines opposées $\pm r$ et on obtient :

$$f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{r^2}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b+r}{2a}\right)\left(z + \frac{b-r}{2a}\right)$$

Le trinôme $f(z)$ admet deux racines distinctes :

$$z' = \frac{-b-r}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b+r}{2a} \iff \boxed{z = \frac{-b \pm r}{2a}} \qquad (4)$$

et s'écrit sous la forme : $\boxed{f(z) = a(z - z')(z - z'')}$ (5)

175. Équation à coefficients réels. — Dans ce cas le discriminant du trinôme $f(z) = az^2 + bz + c$ est un nombre réel : $\Delta = b^2 - 4ac$, nul, positif ou négatif.

1° $\Delta = 0$. On obtient comme ci-dessus la *racine double réelle* : $z' = -\dfrac{b}{2a}$.

2° $\Delta > 0$. Le nombre réel positif Δ est le carré du nombre réel $r = \sqrt{\Delta}$ et le trinôme $f(z)$ admet *deux racines réelles distinctes*.

$$z' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \iff z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (6)$$

3° $\Delta < 0$. Le nombre réel négatif Δ admet, dans C, deux racines imaginaires opposées $\pm i\sqrt{-\Delta}$ et pour $r = i\sqrt{-\Delta}$, on voit (formules 4) que le trinôme admet *deux racines distinctes complexes conjuguées* :

$$z' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \iff z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \qquad (7)$$

En résumé :

176. Théorème. — ***Toute équation du second degré $f(z) = az^2 + bz + c = 0$ admet dans C, deux racines distinctes ou confondues z' et z'' et le trinôme $f(z)$ sécrit : $f(z) = a(z - z')(z - z'')$.***

Notons que si $b = 2b'$, on pose $\Delta' = b'^2 - ac = r'^2$ et les formules (4) du n° 174 deviennent : $z = -\dfrac{b' \pm r'}{a}$. (8)

D'autre part l'identité :

$$(z - z')(z - z'') \equiv \frac{f(z)}{a} \quad \text{ou} \quad z^2 - (z' + z'')z + z'z'' \equiv z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}$$

implique : $\boxed{z' + z'' = -\frac{b}{a} \quad \Big| \quad z'z'' = \frac{c}{a}}$ (9)

et réciproquement : si deux nombres complexes z' et z'' vérifient ces relations (9); ce sont les racines du trinôme : $f(z) = az^2 + bz + c$.

177. Exemples. — 1° *Résoudre l'équation :* $z^2 - (6 - 4i)z + 5 - 12i = 0$.

On calcule : $\Delta' = (3 - 2i)^2 - (5 - 12i) = 9 - 4 - 12i - 5 + 12i = 0$.
L'équation admet la racine double : $z = 3 - 2i$.

2° *Résoudre l'équation réelle :* $x^2 - 6x + 13 = 0$.

On obtient : $\Delta' = 9 - 13 = -4 = (2i)^2$
L'équation réelle $x^2 - 6x + 13$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$x' = 3 - 2i \quad \text{et} \quad x'' = 3 + 2i.$$

On vérifie que : $x' + x'' = 6$ et $x'x'' = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$.

[Se rappeler que : $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$].

3° *Résoudre* : $(1 + i)z^2 - 4(1 + 2i)z + 25 + 21i = 0$.

Commençons par simplifier en multipliant par $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$. On obtient :

$$z^2 - 2(3 + i)z + 23 - 2i = 0.$$
$$\Delta' = (3 + i)^2 - (23 - 2i) = 8 + 6i - 23 + 2i = -15 + 8i.$$

Cherchons une racine carrée $\alpha + i\beta$ de Δ' :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -15, \alpha\beta = 4 \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \Longrightarrow \alpha^2 = 1, \beta^2 = 16$$

Soit : $\alpha = 1$; $\beta = 4$ et $\Delta' = (1 + 4i)^2$. Les racines sont donc :

$$z = 3 + i \pm (1 + 4i) \Longrightarrow z' = 4 + 5i;\ z'' = 2 - 3i.$$

178. Généralisation. — Les principes de factorisation dans R d'un polynôme réel, s'étendent dans C, aux polynômes à coefficients complexes :

$$P(a) = 0 \Longrightarrow P(z) = (z - a)Q(z).$$

On pourra vérifier que tout polynôme réel qui admet une racine complexe α et admet la racine complexe conjuguée $\bar{\alpha}$ et est divisible par le produit réel : $(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})$. Il est donc possible de résoudre dans C toute équation ou système se ramenant au second degré. Se rappeler que l'équation binôme $z^n - a^n = 0$ admet dans C les n racines : a, ak, ak^2..., ak^{n-1} où $k = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ (n° 164).

EXEMPLES : 1° *Résoudre l'équation :* $z^3 - 3z^2 + 3z - 9 = 0$.

Cette équation s'écrit : $(z - 1)^3 = 8 = 2^3$. En désignant par 1, j et j^2 les racines cubiques de l'unité, on obtient pour $z - 1$ les trois valeurs 2, $2j = -1 + i\sqrt{3}$, $2j^2 = -1 - i\sqrt{3}$. D'où les trois racines en z :

$$z' = 3;\ z'' = i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z''' = -i\sqrt{3}.$$

2° *Résoudre l'équation :* $f(z) \equiv z^3 - 6z^2 + 13z - 10 = 0$.

On vérifie que $f(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$ et que $f(z) \equiv (z-2)(z^2 - 4z + 5)$.
D'où les 3 racines : 2, $2 + i$ et $2 - i$.

3° *Résoudre l'équation :* $z^4 - (11 - 10i)z^2 - 50i = 0$.

$$\Delta = (11 - 10i)^2 + 200i = 21 - 20i = (5 - 2i)^2 \Longrightarrow z^2 = \frac{11 - 10i \pm (5 - 2i)}{2}$$

soit : $z^2 = 8 - 6i$ ou $3 - 4i \Longrightarrow$ 4 racines $\pm(3 - 2i)$ et $\pm(2 - i)$.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE C

179. Mesure complexe d'un vecteur. — Par définition, dans le plan complexe, la mesure complexe [AB] du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'affixe Z du point M tel que (fig. 43) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
Or l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ montre que :

$$[AB] = Z = X + iY = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

D'autre part, le module ρ de [AB] est égal à OM = AB et l'argument θ de [AB] est l'angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = \theta_{\overrightarrow{AB}}$.

La mesure complexe [AB] ***d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ ***du plan complexe est égale à l'affixe de son extrémité, diminué de l'affixe de son origine. Elle a pour module*** $\rho = AB$ ***et pour argument*** $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = \theta_{\overrightarrow{AB}}$.

$$\boxed{[AB] = z_B - z_A = (AB, \theta_{\overrightarrow{AB}})}$$

On dit que $\rho = AB$ et $\theta_{\overrightarrow{AB}} = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ sont le module et l'argument du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Toutes les relations entre des mesures algébriques de vecteurs sur un axe se généralisent pour des mesures complexes de vecteurs dans le plan complexe.

Quels que soient A, B, C, D ou M dans ce plan, on obtient ainsi :

$$[AB] + [BC] + [CA] = 0 \quad \text{et} \quad [AD] = [AB] + [BC] + [CD] \ \textit{(Chasles)}.$$

$$[AB]\,[CD] + [AC]\,[DB] + [AD]\,[BC] = 0 \ \textit{(Euler)}.$$

$$[MA]^2 . [BC] + [MB]^2 . [CA] + [MC]^2 . [AB] + [BC] . [CA] . [AB] = 0 \ \textit{(Stewart)}.$$

Si M est le milieu du segment AB, on obtient : $[OM] = \frac{1}{2}([OA] + [OB])$.

L'affixe z du point $M(z)$ est la mesure complexe [OM] du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si A et B sont les points d'affixes 1 et i, on obtient : $[\vec{u}] = [OA] = 1$ et $[\vec{v}] = [OB] = i$.

180. Rapport complexe de deux vecteurs. — Le rapport de deux vecteurs du plan complexe est par définition le rapport de leurs mesures complexes. Donc (fig. 43) :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{[AB]}{[CD]} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{(AB\,;\,\theta_{\overrightarrow{AB}})}{(CD\,;\,\theta_{\overrightarrow{CD}})} = \left(\frac{AB}{CD}\,;\,(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})\right).$$

Le rapport complexe $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ ***a pour module*** $\rho = \dfrac{AB}{CD}$ ***et pour argument*** $\theta = \theta_{\overrightarrow{AB}} - \theta_{\overrightarrow{CD}} = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$.

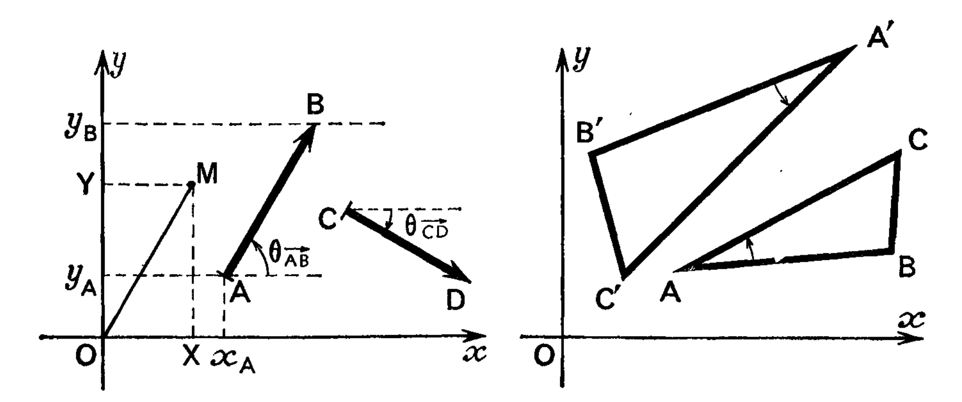


Fig. 43. Fig. 44.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, on retrouve la définition connue. D'autre part :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}} \iff \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \text{ (fig. 44).}$$

Ces relations ne sont autres que les relations caractéristiques de la similitude directe des triangles ABC et A′B′C′.

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k \iff \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$. *On dit que* $\overrightarrow{AB}$ *est le produit de* $\overrightarrow{CD}$ *par le complexe* k.

Donc (fig. 32) : $\vec{v} = i\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} = (x + iy)\vec{u} \implies \boxed{\overrightarrow{OM} = z\vec{u}}$

De même (fig. 35) : $\overrightarrow{OM} = z_1 z_2 \vec{u} = z_1 \overrightarrow{OM_2} = z_2 \overrightarrow{OM_1}$.

Si $k = (\rho, \theta)$ *le vecteur* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *est le transformé de* $\overrightarrow{OM}$ *dans la similitude directe* (O, ρ, θ) *ou* (O, k) *de centre* O, *de rapport* ρ *et d'angle* θ (fig. 45).

— Soient C et D deux points donnés du plan complexe (fig. 46). Coupons en A et B la bissectrice intérieure $O\lambda$ de l'angle COD par le cercle centré en ω sur sa bissectrice extérieure $O\mu$ et passant par C et D. Ce cercle recoupe la droite OC en D′ symétrique de D par rapport à $O\mu$. Les similitudes inverses $\begin{cases} OAC \\ OD'B \end{cases}$ et $\begin{cases} OBC \\ OD'A \end{cases}$ entraînent les similitudes directes : $\begin{cases} OAC \\ ODA \end{cases}$ et $\begin{cases} OBC \\ ODB \end{cases}$

soit $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}} = \dfrac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OA}}$ et $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}} = \dfrac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OB}}$ ce qui équivaut à $[OA]^2 = [OB]^2 = [OC].[OD]$.

Les vecteurs opposés $\overrightarrow{OA}$ ***et*** $\overrightarrow{OB}$ ***sont dits moyens proportionnels entre*** $\overrightarrow{OC}$ ***et*** $\overrightarrow{OD}$.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces notions qui permettent de remarquables démonstrations de géométrie plane et dont on trouvera quelques exemples en exercices (nos 268 à 280).

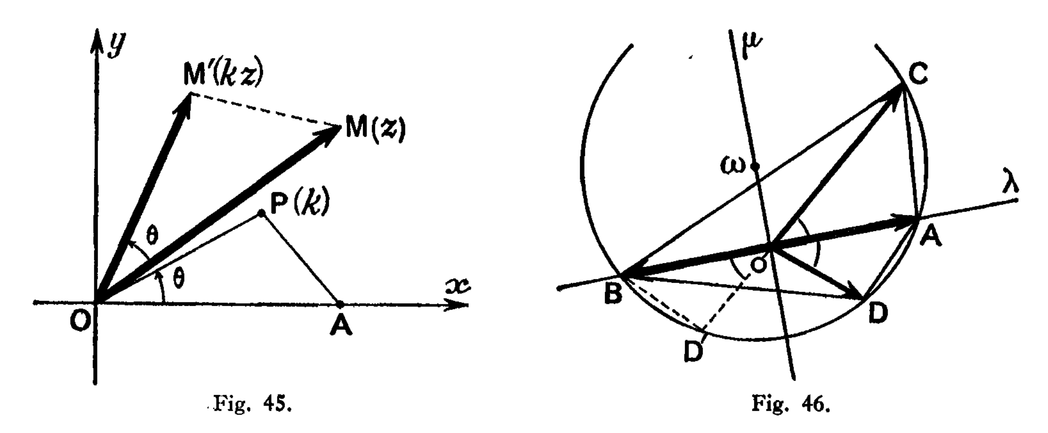


Fig. 45. Fig. 46.

181. Conclusion. — Dans la théorie des nombres que nous achevons ici, nous sommes partis d'un ensemble N dans lequel étaient définies les trois opérations algébriques directes : addition, multiplication, élévation à la puissance n. Afin d'obtenir un ensemble admettant dans tous les cas les opérations inverses : soustraction, division et extraction d'une racine $n^{\text{ième}}$, nous avons été amenés à définir successivement l'anneau Z puis les corps Q et R et enfin le corps C dans lequel toutes ces opérations sont définies. On ne peut aller plus loin et étendre le corps C. On dit qu'il est algébriquement clos.

EXERCICES

237. Linéariser $\cos^7 x$, $\sin^7 x$, $\cos^8 x$ et $\sin^8 x$.

— Linéariser les expressions :

238.• 1° $8 \sin^2 x \cos x$ • 2° $12 \sin x \cos^3 x$ • 3° $24 \sin^3 x \cos x$

239.• 1° $32 \sin^3 x \cos^2 x$ 2°• $64 \sin^2 x \cos^3 x$ • 3° $80 \sin^4 x \cos^3 x$

240.• 1° $16 \cos^4 x \sin^4 x$ 2°• $32 \cos^5 x \sin^2 x$ • 3° $128 \sin^5 x \cos^3 x$

241. On considère les deux sommes :

$$P = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$
$$Q = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx.$$

1° Linéariser chacun des produits partiels de $2\,P \sin \frac{x}{2}$ et $2\,Q \sin \frac{x}{2}$. Écrire chacune de ces expressions sous la forme d'un produit.

2° En déduire P et Q. Vérifier par récurrence les résultats trouvés.

242.• 1° Démontrer que : $P = (1 + \cos x + i \sin x)^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2}\left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2}\right)$.

2° On considère les deux sommes :

$$A = 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx.$$
$$B = C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin nx.$$

Établir que $A + iB = P$ et trouver les valeurs de A et B. Vérifier par récurrence.

3° En déduire une expression de tg $\frac{nx}{2}$. Vérifier la valeur trouvée pour $n = 3$.

243. Résoudre les équations où $z \in C$.
1° $z^3 - i = 0$ 2° $z^3 - 2(1+i) = 0$ 3° $z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

244. Démontrer que l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ équivaut au système $z^4 - 1 = 0$; $z \neq 1$. Résoudre cette équation.

245. Résoudre d'une façon analogue à celle de l'exercice précédent les équations suivantes :
1° $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$. 2° $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
3° $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$. 4° $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
5° $z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$. 6° $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

246. Résoudre l'équation : $P(x) \equiv x^4 - 8x^2 - 8x + 15 = 0$ sachant qu'elle admet deux racines entières et décomposer $P(x)$ en un produit de quatre facteurs du 1er degré.

— Résoudre les équations suivantes où $z \in C$:

247. $(3 - i)z + 2 - 3i = 0$.

248. $(5 - 2i)z + 4 - 7i = 0$.

249. $z^2 + (3 - i)z + 2(1 - i) = 0$.

250. $z^2 - 2(1 + i)z + 2i - 1 = 0$.

251. $z^2 - (4 - i)z + 10 - 7i = 0$.

252. $2z^2 - (1 - i)z + 1 + i = 0$.

253. $z^2 - (11 + 5i)z + 24 - 27i = 0$.

254. $z^2 - 3(1 + i)z + 3i - 2 = 0$.

255. $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - i = 0$.

256. $z^3 - 3z - 2i = 0$.

257. $z^4 - 2z^2 \cos\varphi + 1 = 0$.

258. $iz^3 + (1 - 5i)z^2 + (6i - 2)z = 0$.

259. $(z^2 - 8z)^2 + 40(z^2 - 8z) + 375 = 0$.

260. $5(z^4 + 1) - 4(3 + i)(z^3 + z) + 10z^2 = 0$.

261. Résoudre le système où φ désigne un angle donné.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2\cos\varphi. \end{cases}$$

262. 1° Démontrer que l'équation : $(z - i)^n - (z + i)^n = 0$ est une équation de degré $n - 1$ admettant $(n - 1)$ racines réelles. Déterminer ces racines et construire leurs images.
2° En est-il de même de l'équation $(z - i)^n + (z + i)^n = 0$? Interpréter le résultat en considérant l'équation $(z - i)^{2n} - (z + i)^{2n} = 0$.
3° Résoudre les équations obtenues pour $n = 4$, 6 et 12.

263. On considère le système :
$$x + y + z = a; \qquad yz + zx + xy = b \qquad xyz = c \qquad (1)$$
1° Démontrer que les 3 nombres x, y, z sont les racines de la même équation en Z :
$$z^3 - az^2 + bz - c = 0 \qquad (2)$$
2° On suppose $a = b = 0$; $c = -8$. Calculer x, y et z.

264. On donne le système :
$$x + y + z = 4 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \qquad \text{et} \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 12.$$
Calculer les expressions $xy + yz + zx$ et xyz pour se ramener au système (1) de l'exercice précédent, et en déduire l'ensemble des 3 nombres x, y, z.

265. 1° Résoudre l'équation : $z^4 - 2mz^3 + 2mk^2z - k^4 = 0$.
Montrer que ces racines a, b, c, d vérifient la double relation
$$a^2 = b^2 = cd.$$
2° Construire les images de ces racines connaissant les images A, B et I des nombres complexes k, $-k$ et m.

266. Soient $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ les affixes des points distincts M et $\overline{\text{M}}$. Pour a réel,

déterminer le lieu de des deux points lorsque :

$$z^3 - 3\,az^2 + 4\,a^2z = \bar{z}^3 - 3\,a\bar{z}^2 + 4\,a^2\bar{z}.$$

267. 1° Calculer les puissances successives de $z = x + iy$. En déduire les puissances de $\bar{z} = x - iy$.

2° Soit $P(z) = az^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$ un polynôme à coefficients réels; montrer que $P(x + iy)$ et $P(x - iy)$ s'écrivent :

$$P(x + iy) = A(x, y^2) + iy\,B(x, y^2) \quad \text{et} \quad P(x - iy) = A(x, y^2) - iy\,B(x, y^2).$$

3° En déduire que si $z_1 = \alpha + i\beta$ est une racine de $P(z)$, il en est de même de $\bar{z}_1 = \alpha - i\beta$. En posant $P(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)\,Q(z)$ montrer que les racines z et $\bar{z}_1$ ont même ordre de multiplicité.

268. On donne dans le plan complexe les points A et B d'affixes a et b.

1° Trouver le lieu géométrique de M (z) lorsque le rapport complexe $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$ a un module constant k ou lorsqu'il a un argument constant θ.

2° Construire le point M sachant que $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda(k, \theta) \neq 1$.

269. Soient A (a) et B (b) deux points donnés dans le plan complexe.

1° Construire C (c) et D (d) tels que : $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}$.

2° Montrer que A et D sont symétriques par rapport à O et que les trois triangles OAB, COB et CDO sont directement semblables.

3° On pose $b = a + \lambda u$ où $u \in C$ et où λ est un paramètre réel. Trouver les lieux de B et C et montrer que la droite BC enveloppe un cercle de centre O.

270. On considère dans le plan complexe un triangle équilatéral de sens direct ABC. On désigne par a, b, c les affixes de A, B, C et par 1, j et j^2 les racines cubiques de l'unité : $j = \left(1, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

1° Établir la relation $a + jb + j^2c = 0$. Étudier la réciproque.

2° On construit les triangles équilatéraux de sens direct BOD et OCE. Quelle est la nature du quadrilatère ADOE ?

3° Montrer que les trois triangles OBC, DBA et EAC sont directement semblables.

271. En utilisant la propriété établie au 1° de l'exercice précédent :

1° Déterminer z de façon que les images de i, z et iz soient les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct.

2° Établir l'identité : $a^3 + b^3 + z^3 - 3\,abz = (z + a + b)\,(z + ja + j^2b)\,(z + j^2a + jb)$. Connaissant les points A et B d'affixes a et b, construire les images des racines de l'équation : $z^3 - 3\,abz + a^3 + b^3 = 0$. Peut-on ramener à cette forme l'équation $z^3 + pz + q = 0$ où p et $q \in C$?

272. Soient trois nombres complexes α, β, γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1° Pour qu'un triangle ABC ait ses côtés $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ proportionnels à α, β, et γ il faut et il suffit que : $\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC} = 0$.

2° On suppose cette relation vérifiée et on construit : $\overrightarrow{OD} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OE} = -\dfrac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{OC}$. Quelle est la nature du quadrilatère ODAE ?

3° Comparer les trois triangles ABC, DBO et EOC ainsi que les trois triangles OBC, DBA et EAC.

273. 1° Démontrer que la condition pour que les points A (a), B (b) et C (c) du plan complexe soient alignés s'écrit : $a + \lambda b - (1 + \lambda) c = 0$ avec $\lambda \in R$.

2° On considère les points fixes A (1), A′(— 1), B (i) et les deux points variables M (z) et P (iz) alignés avec B. Calculer les rapports $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$ et $\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PA'}}$ et en déduire les lieux géométriques de M et de P.

3° Trouver les lieux de $N\left(\dfrac{1}{z}\right)$, de $Q\left(\dfrac{1}{iz}\right)$, de R milieu de NQ, et montrer que le vecteur $\overrightarrow{QN}$ a une projection constante sur Ox.

274. Soient D, E, F les milieux des côtés BC, CA et AB du triangle ABC (de sens rétrograde). On pose : $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = 2\vec{b}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\vec{c}$ et on construit les vecteurs $\overrightarrow{DM} = i\vec{a}$, $\overrightarrow{EN} = i\vec{b}$ et $\overrightarrow{FP} = i\vec{c}$.

1° Calculer en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DP}$, puis leur rapport.

2° Même problème pour les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{NP}$. En déduire que les trois droites AM, BN et CP sont concourantes.

3° Montrer que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité G.

275. On considère un triangle ABC et une transversale A′B′C′ coupant respectivement BC, CA et AB en A′, B′ et C′. Soient a, b, c, a', b', c', les affixes des six points A, B, C, A′, B′, C′.

1° Montrer qu'il existe un point unique ω (z) tel que : $(z - a)(z - a') = (z - b)(z - b')$.

2° Comparer les triangles ωAB et ωB′A′ (ou ωAB′ et ωBA′) et montrer que les 4 cercles ABC, AB′C′, A′BC′ et A′B′C concourent en ω.

3° Comparer les triangles ωCA et ωA′C′ (ou ωCA′ et ωAC′) et démontrer que :

$$\omega A . \omega A' = \omega B . \omega B' = \omega C . \omega C'$$

et que les 3 angles $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'})$, $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega B'})$ et $(\overrightarrow{\omega C}, \overrightarrow{\omega C'})$ ont même bissectrice intérieure.

276. On désigne dans le plan par [ABCD] le *birapport complexe* $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$.

1° Exprimer ce birapport en fonction des affixes a, b, c, d des 4 points A, B, C, D. Démontrer qu'il a pour module $\dfrac{AC.BD}{AD.BC}$ et pour argument $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Comparer ce dernier à l'angle en A des arcs orientés $\overset{\frown}{ADB}$ et $\overset{\frown}{ACB}$.

2° Si [ABCD] est réel, les points A, B, C, D sont cocycliques (ou alignés) et si [ABCD] est imaginaire pur, les cercles ABC et ABD (ainsi que les cercles ACD et BCD) sont orthogonaux.

3° Construire D connaissant A, B et C et le birapport [ABCD] = $\overset{\frown}{k}$ ($k \in C$).

277. *Quadrangle harmonique.* — Si $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$, le birapport complexe [ABCD] est égal à — 1 et le quadrangle ABCD est dit harmonique.

1° Montrer que A, B, C, D sont cocycliques (ou alignés) et que leurs affixes a, b, c, d vérifient la relation : $(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$.

2° Soient I et J les milieux respectifs de AB et de CD. Établir les relations entre mesures complexes :

$$\frac{2}{[AB]} = \frac{1}{[AC]} + \frac{1}{[AD]}; \quad [IA]^2 = [IB]^2 = [IC]\cdot[ID]; \quad \frac{[JA]}{[JB]} = \frac{[CA]^2}{[CB]^2} = \frac{[DA]^2}{[DB]^2}$$

$$[CA][CB] = [CI][CD]; \quad [AC]^2 + 2[AJ][CI] = 0; \quad [AB]^2 + [CD]^2 = 4[IJ]^2$$

et leurs conséquences métriques ou angulaires. Étudier les réciproques.

3° Établir la similitude directe des trois triangles IAC, IDA et BDC. Donner trois autres groupes de triangles analogues.

4° On pose $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}) = \theta$. Établir que $\overline{CA}^2 = 2\,IC.JA$ et $\overline{CB}^2 = 2\,IC.JB$ et en déduire que : $JA + JB = IC + ID$ et $JA - JB = AB \cos \theta$.

278. On donne l'équation à coefficients complexes : $az^2 + bz + c = 0$ (1)

1° Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme $z^2 - 2mz + k^2 = 0$ et qu'elle admet deux racines z' et z'' égales à $m \pm p$ en posant $p^2 = m^2 - k^2$.

2° On désigne par M, I, A et B les points d'affixes respectives z, m, k et $-k$. Montrer que l'équation (1) équivaut à : $[IM]^2 = [IA][IB]$.

3° En déduire une construction géométrique des images M' et M" des racines z' et z''.

279. On considère deux points fixes A et B d'affixes réels $+a$ et $-a$ et deux points variables $M(z)$ et $N(z')$ tels que : $[AM][BN] = k$ (constante complexe donnée).

1° Démontrer qu'il existe 2 points E et F symétriques par rapport à O milieu de AB, tels que : $[AE][BE] = [AF][BF] = k$. Nature du quadrilatère AEBF ?

2° Comparer les triangles AME, BEN et FMN ainsi que les triangles AMF, BFN et EMN.

3° Soit R le point tel que $[MO][MR] = [MA][MN]$. Démontrer que : $[OE]^2 = [OM][OR]$ et en déduire une construction géométrique de E et F.

280. Dans le plan complexe on considère les points F (c) et F' $(-c)$ de l'axe réel avec $c > 0$ et deux points variables $P(z)$ et $Q(z')$ tels que $zz' = c^2$ avec $z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$.

1° Si M désigne le milieu de PQ établir que : $[PF]^2 = 2[OP][FM]$ et $[PF']^2 = 2[OP][F'M]$. En déduire que : $MF + MF' = OP + OQ = \lambda + \dfrac{c^2}{\lambda}$ et $|MF - MF'| = 2c\cos\theta$.

2° On suppose que $MF + MF' = 2a$ (constante réelle) et on pose $b^2 = a^2 - c^2$. Déterminer en fonction de a, b, θ les affixes de P, Q et M puis les lieux de P et de Q.

3° On suppose que $|MF - MF'| = 2a$ (constante réelle) et on pose $b^2 = c^2 - a^2$. Déterminer en fonction de a, b, c, λ les affixes de P et Q, les lieux de P et Q et enfin, en posant $\lambda = c\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ déterminer l'affixe de M.

LIVRE II : ARITHMÉTIQUE

9e Leçon

CONGRUENCES DANS Z

182. Divisibilité dans Z. — Si $a \in Z$ et si $b \in Z^*$, il n'existe, en général, aucun entier relatif q, tel que $a = bq$ (n° 58, 10). Lorsqu'il en existe un, il est unique; on dit alors que q est le *quotient exact* du dividende a par le diviseur b, que a est un *multiple* de b, que b est un *diviseur* de a ou que b divise a, ce qu'on note : $b|a$. Ainsi : $-5|35$ car $35 = (-5) \times 7$, mais la division de 36 par (— 5) est impossible. Remarquons que $b|a \Longleftrightarrow |b| \mid |a|$.

183. Propriétés de la divisibilité dans Z.

1° ***Tout entier relatif qui divise les termes d'une somme algébrique d'entiers relatifs divise cette somme.***

Soit dans Z : $s = (a + b - c)$. Les relations : $a = xq$; $b = xq'$; $c = xq''$ où $q, q', q'' \in Z$ et $x \in Z^*$ entraînent : $s = x(q + q' - q'')$. Donc :

$$x|a; \quad x|b; \quad x|c \Longrightarrow x \mid a + b - c.$$

2° ***Si l'entier relatif x divise l'entier relatif a, il divise tout multiple de a.***

Les relations : $b = aq'$ et $a = xq$ entraînent : $b = x(q'q)$. Donc :

$$x|a \text{ et } a|b \Longrightarrow x|b.$$

Il en résulte que si x divise à la fois a et b, il divise tout entier relatif de la forme : $\alpha a + \beta b$ où α et $\beta \in Z$.

184. Remarque. — 1° Les définitions et propriétés précédentes restent valables dans l'ensemble N des entiers naturels.

2° Si q est le quotient exact de a par b, c'est aussi celui de $(-a)$ par $(-b)$. En ce qui concerne la divisibilité dans Z, on peut donc supposer que le diviseur b appartient à N^*.

185. Ensemble des multiples de n dans Z. — Si $n = 1$, l'ensemble des multiples de 1 est l'ensemble Z lui-même. Supposons que n soit un entier naturel supérieur à 1. L'ensemble E de ses multiples dans Z est la suite :

$$\ldots -kn; \; -(k-1)n \ldots -2n; \; -n; \; 0; \; n; \; 2n; \; 3n \ldots kn; \; (k+1)\,n, \ldots \quad k \in Z$$

Tout entier relatif a, ou bien appartient à E, ou bien est compris entre deux éléments successifs de E : $\forall a \in Z$: $\exists q \in Z$:

$$nq \leqslant a < n(q+1) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant a - nq < n.$$

L'entier naturel $r = a - nq$ et l'entier relatif q sont respectivement le reste et le quotient à une unité près par défaut, de la division de a par n.

Le reste r n'admet que n valeurs distinctes : $0; 1; 2; 3;... n-2; n-1$.

Ainsi pour $n = 5$, tout entier relatif a est de la forme :

$$a = 5q;\ a = 5q + 1;\ a = 5q + 2;\ a = 5q + 3 \text{ ou } a = 5q + 4.$$

186. Congruence, modulo n, dans Z. — ***Les entiers relatifs a et b sont congrus (modulo n) si la différence $(a - b)$ est divisible par l'entier naturel n.***

On note : $a \equiv b$ (modulo n) « a congru à b, modulo n » et :

$$\boxed{a \equiv b \pmod n \iff a - b = nq} \qquad q \in \mathbb{Z}$$

L'entier naturel n est le module de la congruence.

Ainsi : $52 \equiv 17$ (modulo 7) car : $52 - 17 = 35 = 7 \times 5$.

La relation de congruence $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans Z (nº 6) :

1º Elle est réflexive : $a - a = n \times 0$.

2º Elle est symétrique : $(a - b) = nq \Longrightarrow (b - a) = n(-q)$.

3º Elle est transitive : $(a - b) = nq$ et $(b - c) = nq' \Longrightarrow a - c = n(q + q')$.

Notons que : $\boxed{n \mid a \iff a \equiv 0 \pmod n}$

187. Théorèmes. — 1º ***Tout entier relatif a est congru, modulo n, au reste de sa division par n.***

Car : $a - r = nq$ (nº 185).

Ainsi : $-45 = 6 \times (-8) + 3 \Longrightarrow -45 \equiv 3 \pmod 6$.

2º ***Pour que deux entiers relatifs soient congrus, modulo n, il faut et il suffit que leurs restes dans la division par n soient égaux.***

En effet : $a \equiv b; a \equiv r$ et $b \equiv r' \Longrightarrow r \equiv r' \Longrightarrow r - r' = nk$;

et : $r \equiv r'; a \equiv r; b \equiv r' \Longrightarrow a \equiv b$.

Mais : $0 \leqslant |r - r'| \leqslant n - 1$ montre que : $r - r' = nk \iff k = 0$, donc que $r \equiv r' \iff r = r'$.

188. Ensemble des classes résiduelles, modulo n. — La relation $\mathcal{R}$, de congruence modulo n, détermine une partition de Z en classes d'équivalence dont l'ensemble est l'ensemble-quotient $\frac{\mathbb{Z}}{\mathcal{R}}$, que l'on note $\frac{\mathbb{Z}}{n}$ et que l'on nomme « *ensemble des classes résiduelles modulo n* ».

En effet, tout entier relatif est congru (modulo n) à son reste r dans la division par n. L'ensemble $\frac{\mathbb{Z}}{n}$ contient donc n éléments distincts que l'on note : $\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}... \overline{n-1}$.

Ainsi : $a \in \overline{n-p} \iff a \equiv n - p \pmod n$.

Plus généralement, les n classes résiduelles modulo n peuvent être définies par n entiers relatifs successifs : $\frac{\mathbb{Z}}{5}$ est défini par 0, 1, 2, 3, 4 ou par $-2, -1, 0, 1, 2$ car : $\overline{-2} = \bar{3}$ et $\overline{-1} = \bar{4}$ puisque $-2 \equiv 3$ et $-1 \equiv 4 \pmod 5$.

Notons que, dans une suite de n entiers consécutifs, il en existe un et un seul congru à 0 modulo n, donc un seul divisible par n.

ADDITION DANS $\frac{Z}{n}$.

189. Théorème. — ***La somme membre à membre de deux congruences modulo n, est une congruence de même module.***

Soient : $a \equiv a' \pmod n$ (1) et $b \equiv b' \pmod n$ (2).

Le module n divise $a - a'$ et $b - b'$ (n° 186), donc leur somme $(a + b) - (a' + b')$, ce qui montre que : $a + b \equiv a' + b' \pmod n$. On peut donc ajouter membre à membre les congruences (1) et (2). Plus généralement :

$$a \equiv a',\ b \equiv b',\ c \equiv c' \Longrightarrow a + b + c \equiv a' + b' + c' \pmod n.$$

En particulier, si r et r' sont les restes de la division de a et b par n :

$$a + b \equiv r + r' \pmod n.$$

Il en résulte (n° 187) que $a + b$ et $r + r'$ ont même reste dans la division par n; cette propriété s'étend aisément aux sommes de plusieurs termes :

190. Théorème. — ***Le reste de la division d'une somme par l'entier relatif n est le même que celui de la somme des restes de chaque terme par n.***

De $249 \equiv 6 \pmod 9$ et $41 \equiv 5 \pmod 9$ on déduit : $290 \equiv 6 + 5 \equiv 2 \pmod 9$.

191. Addition dans $\frac{Z}{n}$. — Soient $\bar{1}, \bar{2}, \ldots \bar{\alpha}, \ldots, \bar{\beta}, \ldots \overline{n-1}$ les éléments de $\frac{Z}{n}$:

$$a \in \bar{\alpha};\ b \in \bar{\beta} \Longleftrightarrow a \equiv \alpha \text{ et } b \equiv \beta \pmod n \Longrightarrow a + b \equiv \alpha + \beta.$$

Donc, $a + b$ et $\alpha + \beta$ appartiennent à la même classe résiduelle $\bar{\gamma}$. On note $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$. A toute addition de deux entiers relatifs a et b, on associe ainsi l'addition des éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ correspondant à a et b dans $\frac{Z}{n}$.

Exemple : Pour $n = 6$ $\bar{8} \in \bar{2}$ et $10 \in \bar{4} \Longrightarrow 8 + 10 \in \bar{0}$ car : $8 + 10 \equiv 2 + 4 \equiv 0$. On en déduit : $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$.

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Fig. 47.

Il en résulte que l'addition dans $\frac{Z}{n}$ est une loi de composition interne possédant les mêmes propriétés que l'addition dans Z; elle est commutative, associative; l'élément neutre de l'addition est $\bar{0}$ et l'opposé de $\bar{\alpha}$ est $\overline{n - \alpha}$.

L'addition confère à l'ensemble $\frac{Z}{n}$ une structure de groupe abélien.

On peut vérifier ces propriétés à la lecture de la table d'addition dans $\frac{Z}{6}$ (fig. 47). On y lit par exemple :

$$(\bar{2}) + (\bar{4}) = (\bar{4}) + (\bar{2}) = \bar{0}$$
$$[(\bar{2}) + (\bar{4})] + (\bar{1}) = \bar{2} + [\bar{4} + \bar{1}] = \bar{1}.$$

MULTIPLICATION DANS $\frac{Z}{n}$.

192. Théorème. — ***Le produit membre à membre de deux congruences, modulo n, est une congruence de même module.***

Soient : $a \equiv a'$ (mod n) (1) et $b \equiv b'$ (mod n) (2).

On peut écrire : $ab - a'b' = a(b - b') + b'(a - a')$.

Le module n divise $(b - b')$ et $(a - a')$ (nº 185), donc aussi $a(b - b') + b'(a - a')$ (nº 103).

Donc : $ab \equiv a'b'$ (mod n). On peut donc multiplier membre à membre les congruences (1) et (2). Plus généralement : $a \equiv a'$, $b' \equiv b$; $c \equiv c' \Longrightarrow abc \equiv a'b'c'$ (mod n).

En particulier si r et r' sont les restes respectifs de a et b par n :

$$ab \equiv rr' \quad (\text{mod } n).$$

Il en résulte que ab et rr' ont même reste dans la division par n; cette propriété s'étend aisément à un produit de plusieurs facteurs.

193. Théorème. — ***Le reste de la division d'un produit par n est le même que celui du produit des restes de chaque facteur par n.***

Exemple : De $47 \equiv 2$ (mod 5) et $113 \equiv 3$ (mod 5), on déduit : $47 \times 113 \equiv 2 \times 3 \equiv 1$ (mod 5).

194. Corollaire. — ***En élevant à la puissance p les deux membres d'une congruence, on obtient une congruence de même module.***

En effet : $a \equiv b$ (mod n) $\Longrightarrow a^p \equiv b^p$ (mod n).

Exemples.

1º $\forall p \in N$: $10 \equiv 1$ (mod 9) $\Longrightarrow 10^p \equiv 1$ (mod 9).

2º $\forall p \in N$: $10 \equiv -1$ (mod 11) $\Longrightarrow 10^p \equiv (-1)^p$ (mod 11).

3º $a \equiv \pm 2$ (mod 5) $\Longrightarrow a^4 \equiv 1$ (mod 5) et $a \equiv \pm 1$ (mod 5) $\Longrightarrow a^4 \equiv 1$ (mod 5).

Donc $\forall a \in Z$: $a^4 \equiv 1$ (mod 5) ou $a^4 \equiv 0$ (mod 5).

195. Multiplication dans $\frac{Z}{n}$. — Soient $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ... $\bar{\alpha}$, ..., $\bar{\beta}$, ...$\overline{n-1}$ les éléments de $\frac{Z}{n}$.

$$a \in \bar{\alpha} \text{ et } b \in \bar{\beta} \Longleftrightarrow a \equiv \alpha \text{ et } b \equiv \beta \ (\text{mod } n) \Longrightarrow ab \equiv (\alpha\beta) \ (\text{mod } n).$$

Donc, ab et $\alpha\beta$ appartiennent à la même classe résiduelle $\bar{\gamma}$, ce qu'on note $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$.

A toute multiplication de deux entiers relatifs a et b on associe ainsi la multiplication des éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ correspondant à a et b dans $\frac{Z}{n}$.

Exemple : Si $n = 6$: $8 \times 10 \equiv 2 \times 4 = 8 \equiv 2$. On en déduit $\bar{2} \times \bar{4} = \bar{2}$.

Il en résulte que la multiplication dans $\frac{Z}{n}$ est une loi interne possédant les mêmes propriétés que la multiplication dans Z ; elle est commutative, associative, l'élément neutre est $\bar{1}$ et la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

L'addition et la multiplication confèrent à l'ensemble $\frac{Z}{n}$ une structure d'anneau commutatif et unitaire.

On la vérifie à la lecture de la table de multiplication dans $\frac{Z}{6}$ établie (fig. 48) ci-dessous.

On y lit par exemple :

$$\bar{2} \times \bar{4} = \bar{4} \times \bar{2} = \bar{2};$$

$$\bar{2} \times \bar{4} \times \bar{3} = \bar{2} \times (\bar{4} \times \bar{3}) = \bar{0}$$

$$(\bar{1} + \bar{3}) \times \bar{5} = (\bar{1} \times \bar{5}) + (\bar{3} \times \bar{5}) = \bar{2}.$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Fig. 48.

On vérifie aussi qu'un élément de $\frac{Z}{6}$ ne possède pas toujours un inverse (c'est le cas de $\bar{2}$, de $\bar{3}$ et de $\bar{4}$) et qu'un produit peut être nul sans qu'aucun facteur le soit (c'est le cas de $\bar{3} \times \bar{4}$ par exemple).

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

196. Par 2 **ou** 5. — Si α désigne le nombre des dizaines et u le chiffre des unités d'un entier naturel n, on obtient $n = 10d + u$ et $10 \equiv 0$ (mod 2 ou 5) $\Longrightarrow n \equiv u$ (mod 2 ou 5).

***Pour qu'un entier naturel soit divisible par* 2 *ou* 5, *il faut et il suffit que le chiffre de ses unités soit divisible par* 2 *ou* 5.**

197. Par 25 **ou** 4. — Désignons par c le nombre des centaines, par d le chiffre des dizaines, par u le chiffre des unités d'un entier naturel n :

$$n = 100\,c + 10\,d + u \text{ et } 100 \equiv 0 \text{ (mod 4 ou 25)} \Longrightarrow n \equiv 10\,d + u \text{ (mod 4 ou 25)}:$$

Pour qu'un entier naturel soit divisible par 4 *ou* 25, ***il faut et il suffit que le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite soit divisible par*** 4 ***ou*** 25.

198. Par 9 **ou** 3. — Soient a_0, a_1, a_2... a_p les chiffres successifs, à partir de la droite, de l'entier naturel n. On sait que (nº 194) : $\forall p \in N$: $10^p \equiv 1$ (mod 9 ou 3). Donc :

$$n = 10^p a_p + 10^{p-1} a_{p-1} \ldots \times 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10\,a_1 + a_0 \equiv$$

$$a_p + a_{p-1} + a_{p-2} \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \text{ (mod 9 ou 3).}$$

***Pour qu'un nombre entier soit divisible par* 9 *ou* 3, *il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par* 9 *ou* 3.**

199. Par 11. — Avec les mêmes notations que ci-dessus, on sait que (nº 194) :

$$\forall p \in \mathrm{N} : 10^p \equiv (-1)^p \pmod{11}.$$

Donc :

$$n = a_p \times 10^p + a^p_{-1} \times 10^{p-1} \dots + a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \equiv$$

$$\sum_{i=0}^{=p} (a_i)(-1)^i \pmod{11}$$

Pour qu'un entier naturel soit divisible par 11, *il faut et il suffit que l'entier relatif obtenu en retranchant la somme des chiffres de rang pair de celle des chiffres de rang impair à partir de la droite, soit divisible par* 11.

Ainsi : $908\,160 \equiv (0 + 1 + 0) - (6 + 8 + 9) \pmod{11}$ soit $908\,160 \equiv -22 \pmod{11}$
$908\,160 \equiv 0 \pmod{11}$. Donc 908 160 est divisible par 11.

DIVISION EUCLIDIENNE DANS N

200. Quotient entier de deux entiers naturels. — Soit $b \in \mathrm{N}^*$, tout multiple de b s'écrit bq où $q \in \mathrm{N}$ (nº 182). L'ensemble E des multiples de b est un sous-ensemble de N qui constitue la suite suivante :

$$\mathrm{E} = \{\, 0;\, b;\, 2\,b;\, 3\,b;\, \dots\, bq;\, b(q + 1;) \dots \}$$

E est strictement inclus dans N sauf si $b = 1$; dans ce cas E = N.

Tout entier naturel a appartient à E ou est compris entre deux éléments successifs de E, tels que bq et $b(q + 1)$:

$$\boxed{bq \leqslant a < b\,(q + 1)} \qquad (1)$$

L'entier naturel q se nomme *quotient entier* de a par b. Dans le cas particulier où $a = bq$, ce quotient coïncide avec le quotient exact de a par b. L'opération qui permet de trouver q connaissant le *dividende* a et le diviseur b se nomme *division euclidienne* (ou division) de a par b et la différence : $r = a - bq$ se nomme *reste*.

201. Définitions. — 1º ***Le quotient entier de a par b est le plus grand entier naturel q dont le produit par b soit inférieur ou égal à a.***

2º ***La différence $a - bq = r$ est le reste de la division de a par b.***

Exemple : La double inégalité : $7 \times 8 < 60 < 7 \times 9$ montre que 8 est le quotient entier de 60 par 7. Le reste est : $r = 60 - (7 \times 8) = 4$.

202. Théorème. — ***Dans toute division euclidienne le reste est inférieur au diviseur.***

Les relations (1) entraînent :

$$0 \leqslant a - bq < b \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant r < b \Longleftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant b - 1.$$

Donc : $bq \leqslant a < b\,(q + 1) \Longrightarrow a = bq + r$ et $r < b$.

Réciproquement, $a = bq + r$ et $r < b \Longrightarrow bq + r < bq + b$ et $bq \leqslant a < b\,(q + 1)$.

L'ensemble des relations (1) équivaut donc à: $\boxed{a = bq + r\,;\ r < b}$

203. Division par un produit de facteurs. — Soit à diviser dans N l'entier n par le produit ab. Supposons $a < n$ sinon le quotient de n par $ab > n$ est égal à 0. Désignons par q le quotient entier de n par a $(q \geqslant 1)$ et par q' celui de q par b :

$$aq \leqslant n < a(q+1) \quad \text{et} \quad bq' \leqslant q < b'(q'+1).$$

En multipliant nombre à nombre les inégalités : $aq \leqslant n$ et $bq' \leqslant q$, on obtient :

$$a\,b\,q\,q' \leqslant nq \Longrightarrow a\,b\,q' \leqslant n \qquad (1)$$

En multipliant membre à membre les inégalités : $n < a(q+1)$ et $q+1 \leqslant b(q'+1)$ on obtient :

$$n(q+1) \leqslant a\,b(q+1)(q'+1) \Longrightarrow n < ab(q'+1) \qquad (2)$$

En définitive :

$$a\,b\,q' \leqslant n < ab(q'+1).$$

Le quotient cherché est le même que celui de q par q', même si $q = 0$. Cette propriété s'étend d'un nombre quelconque de facteurs :

Pour obtenir le quotient entier de n par un produit de facteurs, on peut chercher celui de n par le premier facteur, puis celui du quotient obtenu par le second facteur et ainsi de suite. Le dernier quotient obtenu est le quotient cherché.

EXEMPLE : *Chercher le quotient entier de 2 527 par 300.*

Le quotient entier de 2 527 par 100 est 25 car : $2\,500 < 2\,527 < 2\,600$.

Le quotient entier de 25 par 3 est 8; c'est aussi celui de 2 527 par 300.

204. Nombre des chiffres du quotient. — Soit q le quotient entier de a par b :

$$q' \leqslant q \Longrightarrow bq' \leqslant bq \Longrightarrow bq' \leqslant a \qquad (1)$$

$$q' > q \Longrightarrow q' \geqslant q+1 \Longrightarrow bq' \geqslant b(q+1) \Longrightarrow bq' > a \qquad (2)$$

D'après le principe de réciprocité :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} bq' \leqslant a & \Longleftrightarrow & q' \leqslant q \\ bq' > a & \Longleftrightarrow & q' > q \end{array}} \qquad (3)$$

En particulier :

$$10^{n-1}\,b \leqslant a < 10^n\,b \Longleftrightarrow 10^{n-1} \leqslant q \leqslant 10^n$$

Ceci montre que le quotient q est compris entre le plus petit et le plus grand nombre de n chiffres :

Le nombre des chiffres du quotient est égal au plus petit nombre de zéros qu'il faut écrire à la droite du diviseur pour obtenir un nombre supérieur au dividende.

EXEMPLE. — $251 \times 10 < 4\,372 < 251 \times 100 \Longleftrightarrow 10 < q < 100$. Le quotient q de 4 372 par 251 a 2 chiffres.

205. Variation du quotient quand le dividende ou le diviseur varient seuls.

1° *Si a varie, b restant constant, la définition du quotient entier (n° 200) montre que le quotient reste constant si $bq < a < b\,(q+1)$ ou qu'il varie dans le même sens que a.*

2° Soient q et q' les quotients respectifs de a par b et par b' :

$bq \leqslant a < b\,(q+1)$; $\quad b'q' \leqslant a < b'\,(q'+1)$; $\quad b' < b$ entraînent :

$$bq \leqslant a < b'\,(q'+1) < b\,(q'+1) \Longrightarrow bq < b\,(q'+1).$$

Donc : $b' < b \Longrightarrow q < q' + 1 \Longrightarrow q \leqslant q'$; le dividende restant constant.

Si le diviseur diminue, le quotient reste constant ou augmente, si le diviseur augmente le quotient reste constant ou diminue.

EXEMPLE. — Le quotient entier de 2 527 par 300 est 8 (nº 203). Celui de 2 527 par 341 est donc inférieur ou égal à 8; or $341 \times 8 = 2\,728 > 2\,527$ et $341 \times 7 = 2\,387$. Le quotient est donc 7.

206. Théorèmes. — 1° ***Tout diviseur commun au dividende et au diviseur d'une division est un diviseur du reste.***

2° ***Tout diviseur commun au diviseur et au reste d'une division est un diviseur du dividende.***

1° $d|b \Longrightarrow d|bq$ (nº 183) et $d|a$; $d|bq \Longrightarrow d|a - bq = r$ (nº 183).

2° $d|b \Longrightarrow d|bq$ (nº 183) et $d|bq$; $d|r \Longrightarrow d|a = bq + r$ (nº 183).

207. Théorèmes. — 1° ***Si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas mais le reste est multiplié par ce nombre.***

2° ***Si on divise le dividende et le diviseur par un de leurs diviseurs communs, le quotient ne change pas mais le reste est divisé par ce diviseur.***

Les relations (1) : $a = bq + r$; $r < b$ entraînent :

$$\forall\, n \in \mathrm{N}^* : \qquad an = (bn)\,q + rn \qquad rn < bn \tag{2}$$

Donc q est le quotient entier de an par bn et le reste est rn.

De même, si n est un diviseur de an et bn, il est aussi un diviseur du reste de an par bn, qui s'écrit donc rn et les relations (1) sont conséquences des relations (2).

EXERCICES

— Résoudre dans Z les équations suivantes :

281. $x \equiv 3 \pmod 2$.
282. $x + 2 \equiv 4 \pmod 5$.
283. $x + 11 \equiv 2 \pmod 9$.
284. $5x \equiv 1 \pmod 2$.
285. $7x \equiv 2 \pmod 3$.
286. $13x \equiv 1 \pmod 7$.
287. $3x + 5 \equiv 0 \pmod 2$.
288. $4x - 3 \equiv 7 \pmod 6$.
289. $5x - 9 \equiv 13 \pmod{11}$.
290. $x^3 \equiv 1 \pmod 3$.
291. $x^6 \equiv -1 \pmod 5$.
292. $x^5 \equiv -1 \pmod 4$.
293. $x^2 - 3x + 2 \equiv 1 \pmod 2$.
294. $x^2 - 5x + 7 \equiv 0 \pmod 3$.
295. $x^3 - x \equiv 1 \pmod 5$.
296. $x^3 + x + 2 \equiv 0 \pmod 7$.

— Démontrer que pour tout entier naturel n :

297. $(2n + 1)^2 \equiv 1 \pmod 8$.
298. $n^3 - n \equiv 0 \pmod 3$.
299. $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$.
300. $n^7 - n \equiv 0 \pmod 7$.
301. $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 \pmod 7$.
302. $n(n + 1)(2n + 1) \equiv 0 \pmod 6$.
303. $n(n - 1)(n - 2) \equiv 0 \pmod 6$.
304. $n(n^2 + 2) \equiv 0 \pmod 3$.

305. Démontrer que dans une suite de n entiers naturels consécutifs, il en existe un et un seul divisible par n.

306. On donne dans N : $a = b + n$. Démontrer que les restes de la division de a et b par n sont égaux.

307. Déterminer x pour que le nombre qui s'écrit $\overline{x\,2\,x\,31}$ dans le système décimal soit divisible par 11.

308. 1° Déterminer x et y pour que le nombre qui s'écrit $\overline{28\,x\,y\,5}$ dans le système décimal soit divisible par 11.

2° Même question pour que le nombre $\overline{34\,x\,5\,y}$ soit divisible par 4 et par 9.

309. On donne dans N les nombres a et b tels que $a \geqslant b$. Démontrer l'inégalité $a > 2\,r$ où r désigne le reste de la disision de a par b.

310. On effectue la division euclidienne de a par b.

1° Comment sont modifiés le quotient q et le reste r lorsqu'on effectue la division de $a + x$ par b ? ($x \in$ Z).

2° Quel est le plus grand nombre entier qu'on puisse ajouter au dividende a sans changer le quotient ?

3° Quel est le plus grand nombre entier qu'on puisse retrancher au dividende sans changer le quotient ?

311. 1° Dans la division euclidienne de a par b, comment sont modifiés le quotient q et le reste r lorsqu'on ajoute l'entier relatif x au diviseur b ?

2° Quel est le plus grand entier naturel qu'on puisse ajouter au diviseur sans changer le quotient ?

3° Quel est le plus grand entier naturel qu'on puisse retrancher au diviseur sans changer le quotient ?

312. Établir la table d'addition et la table de multiplication dans $\frac{Z}{5}$ puis dans $\frac{Z}{8}$.

313. En utilisant la théorie des congruences, trouver la forme générale des nombres entiers positifs n tels que l'entier $n^2 + n + 1$ soit multiple de 13.

314. 1° Déterminer aussi simplement que possible les restes de la division par 7 des sept premières puissances de 5 : $5, \quad 5^2, \quad 5^3, \quad \ldots, \quad 5^7$.

2° En déduire la détermination des entiers naturels n pour lesquels la division de 19^n par 7 donne pour reste 2.

3° Calculer le reste de la division de 19^{64} par 7.

315. Comment faut-il choisir l'entier n pour que $10^n + 1$ soit divisible par 11 ?

316. Trouver deux nombres entiers positifs, sachant que leur somme est un multiple de 3 et que la différence de leurs carrés est égale à 48.

317. Trouver, sans faire l'opération, le reste de la division de 314 352 par 11. Indiquer et justifier la méthode employée.

318. En utilisant la théorie des congruences, déterminer la forme générale des entiers naturels n tels que l'entier $n^3 - n + 1$ soit divisible par 7.

319. La division d'un nombre entier a par 64 donne un quotient entier q et un reste q^3. Déterminer les nombres a possédant cette propriété.

320. Trouver le reste de la division par 8 des nombres : $A = 19^{52}$ et $B = 13^{23} \times 27^{41}$.

321. Chercher tous les ensembles de trois nombres entiers naturels x, y et z tels que

$$\begin{cases} 2x = y + z, \\ x + y + z = xyz. \end{cases}$$

322. 1° Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est multiple de 3.

2° Étudier le reste de la division de la somme des n premiers nombres entiers par 3.

3° Quel est le reste par 3 de $\dfrac{n(n+1)}{2}$?

323. 1° Quels sont les restes de la division par 4 des puissances successives de 3 ?
Combien existe-t-il de restes distincts ?
Comment chacun d'eux se déduit-il du précédent ?

2° Comment la suite des restes successifs se présente-t-elle ?

324. 1° Montrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1, module 8.

2° Résoudre dans N l'équation : $8x + 1 = y^2$.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

I. — P.G.C.D. DE DEUX ENTIERS NATURELS

208. Ensemble des diviseurs communs à deux entiers naturels. — Désignons respectivement par A l'ensemble des diviseurs de l'entier naturel a et par B l'ensemble des diviseurs de l'entier naturel b. Si $a = 0$ l'ensemble A coïncide avec N^*, car tout entier divise 0. Si $a \in N^*$, l'ensemble A comporte un nombre fini d'éléments dont le plus petit est 1 et le plus grand a lui-même :

***L'ensemble* D *des diviseurs communs à* a *et* b *est l'ensemble des entiers naturels qui divisent à la fois* a *et* b.**

$$D = A \cap B = B \cap A$$

L'ensemble D n'est pas vide car $1 \in D$. Si $a = 0; b > 0 : A \cap B = N^* \cap B = B$.

Quels que soient a et b, non nuls tous deux, D admet un élément d supérieur à tous les autres, que l'on nomme plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) des nombres a et b et que nous symboliserons dans cette leçon par : $d = (a; b)$. En particulier : $(a; 0) = a$.

Dans ce qui suit, nous supposerons que a et b sont strictement positifs.

209. Définitions. — 1° ***Le* P.G.C.D. *de deux entiers naturels est le plus grand de leurs diviseurs communs.***

Exemple. — Les diviseurs de 12 sont : 1, 2; 3; 4; 6 et 12. Ceux de 18 sont : 1; 2; 3; 6; 9; 18. Le P.G.C.D. de 12 et 18 est 6 :

$$(12; 18) = (18; 12) = 6.$$

2° ***Deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque leur* P.G.C.D. *est égal à* 1.**

a et b premiers entre eux équivaut à : $(a, b) = 1$. Les nombres 8 et 15 sont premiers entre eux. Ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

210. P.G.C.D. de deux nombres dont l'un est multiple de l'autre.

Soit : $a = kb$ où $k \in N^*$. Tout diviseur de b est un diviseur de a (n° 183).
Donc : $B \subset A \Longrightarrow D = A \cap B = B \Longrightarrow d = (a; b) = b$.

Si b divise a, les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de b et le* P.G.C.D. *de a et b est b.

Exemple. — Les diviseurs communs à 108 et 12 sont ceux de 12 et le P.G.C.D. de 108 et 12 est 12.

211. Théorème. — ***L'ensemble des diviseurs communs à deux nombres coïncide avec l'ensemble des diviseurs communs au plus petit d'entre eux et au reste de leur division.***

Soit : $a = bq + r$; $r < b$. Il résulte du nº 206 que tout élément de A ∩ B est un élément de B ∩ R et que, réciproquement tout élément de B ∩ R est un élément de A ∩ R. Donc : A ∩ B = B ∩ R.

EXEMPLE. — 684 = (252 × 2) + 180. Les diviseurs communs à 684 et 252 sont les mêmes que les diviseurs communs à 252 et 180. Les deux couples 684; 252 et 252; 180 ont donc même P.G.C.D.

212. Recherche des diviseurs communs à deux nombres (Algorithme d'Euclide).

Soit r le reste de la division de a par b, r_1 celui de b par r, r_2 celui de r par r_1 et ainsi de suite. On a : $r < b$; $r_1 < r$; $r_2 < r_3$... Les restes successifs r_1, r_2, r_3 forment une suite d'entiers décroissants. L'un deux soit r_{k+1} finit par être nul :

$$a = bq + r; \quad r < b$$
$$b = rq_1 + r_1; \quad r_1 < r$$
$$r = r_1q_2 + r_2; \quad r_2 < r_1$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3; \quad r_3 < r_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k; \quad r_k < r_{k-1}$$
$$r_{k-1} = r_k q_{k+1}.$$

Il résulte du théorème précédent que les diviseurs communs à a et b sont les mêmes que ceux de b et r, puis de r et r_1 et ainsi de suite. Ce sont donc les mêmes que les diviseurs communs à r_{k-1} et à r_k, donc les diviseurs de r_k. Le plus grand d'entre eux est donc r_k; c'est-à-dire le dernier diviseur utilisé. Cette méthode de recherche des diviseurs communs à deux nombres et de leur P.G.C.D. se nomme *méthode des divisions successives* ou *algorithme d'Euclide.*

213. Règle. — ***Pour trouver le* P.G.C.D. *de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit, puis le plus petit par le reste, puis le premier reste par le second et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste nul. Le* P.G.C.D. *est le dernier diviseur utilisé.***

EXEMPLE. — Soit à chercher le P.G.C.D. de 684 et 252. On dispose les calculs de la façon suivante :

	2	1	2	2
684	252	180	72	36
180	072	36	0	

Le P.G.C.D. de 684 et 252 est celui de 72 et 36 soit 36.

214. Théorème. — ***Les diviseurs communs à deux nombres sont ceux de leur* P.G.C.D.**

Cela résulte de ce que $A \cap B = R_{k-1} \cap R_k = R_k$.

Les diviseurs communs à 684 et 252 sont donc :

1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 et 36.

215. Théorème. — ***Si d est le* P.G.C.D. *de a et b, celui de ka et kb est kd.***

En effet, d'après le n° 207, les restes successifs dans la méthode des divisions successives sont multipliés par l'entier k. Il en est de même de l'avant-dernier reste $d = r_k$; donc : $(ka, kb) = k\ (a, b)$.

Ainsi le P.G.C.D. de 6 840 et de 2 520 est $36 \times 10 = 360$.

216. Théorème. — ***Si d est le* P.G.C.D. *de a et b et k un diviseur commun à a et b, le* P.G.C.D. *de $\frac{a}{k}$ et $\frac{b}{k}$ est $\frac{d}{k}$.***

Les restes successifs et en particulier r_k sont divisés par k (n° 207).

$$k \mid a\,;\, k \mid b \implies \left(\frac{a}{k}\,;\,\frac{b}{k}\right) = \frac{1}{k}(a\,;\,b)$$

Ainsi le P.G.C.D. de $\frac{684}{6} = 114$ et de $\frac{252}{6} = 42$ et $\frac{36}{6} = 6$.

217. Théorème. — ***Pour qu'un diviseur commun à deux entiers naturels soit leur* P.G.C.D., *il faut et il suffit que les quotients de ces nombres par ce diviseur commun soient premiers entre eux.***

1° Si $d = (a\,;\,b)$: $\left(\frac{a}{d}\,;\,\frac{b}{d}\right) = \frac{d}{d} = 1$ (n° 216)

Les quotients de deux nombres par leur P.G.C.D. *sont premiers entre eux.*

2° Si $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$ sont premiers entre eux :

$(a';\, b') = 1 \implies (a'd;\, b'd) = d$ (n° 215), donc $(a;\, b) = d$.

II. P.G.C.D DE PLUSIEURS ENTIERS NATURELS

218. Définition. — ***Le* P.G.C.D. *de plusieurs entiers naturels a, b, c... est le plus grand de leurs diviseurs communs.***

Si A, B, C désignent respectivement l'ensemble des diviseurs de a, l'ensemble des diviseurs de b et l'ensemble des diviseurs de c, leur intersection $A \cap B \cap C$ est l'ensemble des diviseurs communs à a, b, c. Cet ensemble n'est pas vide (il admet 1 comme élément) et il admet un élément supérieur à tous les autres, nommé P.G.C.D. de a, b, c et noté dans cette leçon $(a;\, b;\, c)$.

219. Théorème. — ***Dans la recherche du* P.G.C.D. *de plusieurs nombres on peut remplacer deux d'entre eux par leur* P.G.C.D.**

Soit $u = (a;\, b)$. Montrons que $(a;\, b;\, c) = (u;\, c)$.

Tout diviseur commun à a, b et c divise a et b, donc divise u (n° 216). Réciproquement, tout diviseur commun à u et c divise a et b (multiples de u), donc divise a, b et c. Les diviseurs communs à a, b, c sont les mêmes que ceux de u et c. Le P.G.C.D. de a, b et c est donc celui de u et c. Ces propriétés résultent aussi de ce que la loi $\cap$ est associative :

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = U \cap C.$$

Exemple. — Le P.G.C.D. des nombres 684; 252 et 27 est le même que celui de 36 et 27.

Donc : $(684; 252; 27) = (36; 27) = 9$. Les diviseurs communs à 684; 252 et 27 sont 1; 3 et 9.

Cette propriété s'étend à un nombre quelconque d'entiers naturels. Ainsi :

$(a; b; c; d) = (u; c; d)$ avec $u = (a; b)$ $(u; c; d) = (v; d)$ avec $v = (u; c)$.

Enfin : $(a; b; c; d) = (v, d) = \delta$.

220. Théorème. — ***Les diviseurs communs à plusieurs entiers naturels sont les diviseurs de leur* P.G.C.D.**

En effet : $A \cap B \cap C \cap D = U \cap C \cap D = V \cap D$ et les diviseurs communs à v et d sont ceux de leur P.G.C.D. : $\delta = (a; b; c; d)$.

221. Théorème. — ***Si* δ *est le* P.G.C.D. *de* $a; b; c$; *celui de* $ka; kb; kc$ *est* $k\delta$.**

Le P.G.C.D. de ka et kb est ku (n° 215); celui de ku et kd est $k\delta = k(a; b; c)$. Cette propriété s'étend aisément à un nombre quelconque d'entiers naturels.

222. Théorème. — ***Si* δ *est le* P.G.C.D. *de* $a; b; c$ *et si* k *est un diviseur commun à* $a; b; c$ *le* P.G.C.D. *de* $\frac{a}{k}; \frac{b}{k}$ *et* $\frac{c}{k}$ *est* $\frac{\delta}{k}$.**

Le P.G.C.D. de $\frac{a}{k}$ et $\frac{b}{k}$ est $\frac{u}{k}$ (n° 216). Celui de $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}$ et $\frac{c}{k}$ est aussi celui de $\frac{u}{k}$ et $\frac{c}{k}$, donc $\frac{\delta}{k}$.

223. Nombres premiers entre eux dans leur ensemble. — ***Plusieurs nombres sont premiers entre eux dans leur ensemble lorsque leur* P.G.C.D. *est égal à 1.***

Les nombres 8; 15 et 16 sont premiers entre eux dans leur ensemble. Remarquons qu'ils ne sont pas premiers entre eux deux à deux (car 8 et 16 par exemple ne le sont pas).

224. Théorème. — ***Pour qu'un diviseur commun à plusieurs entiers naturels soit leur* P.G.C.D., *il faut et il suffit que les quotients de ces nombres par ce diviseur commun soient premiers entre eux dans leur ensemble.***

1° Si $\delta = (a; b; c)$: $\left(\frac{a}{\delta}; \frac{b}{\delta}; \frac{c}{\delta}\right) = 1$ (n° 222).

Les quotients de plusieurs nombres par leur P.G.C.D. sont premiers entre eux dans leur ensemble.

2° Si $a' = \frac{a}{\delta}; b' = \frac{b}{\delta}; c' = \frac{c}{\delta}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble :

$(a'; b'; c') = 1 \Longrightarrow (a'\delta; b'\delta; c'\delta) = \delta$ (n° 221) donc : $(a; b; c) = \delta$.

Exemple. — $8 \times 7 = 56$; $15 \times 7 = 105$ et $16 \times 7 = 112$ ont pour P.G.C.D. 7.

225. Conclusion. — Il résulte de ce qui précède que la loi de composition P.G.C.D. possède les propriétés suivantes :

Elle est commutative : $(a; b) = (b; a)$ (n° 209).

Elle possède un élément neutre 0 : $\forall a \in N^*$: $(a; 0) = a$ (n° 208).

Elle est associative : $(a; b; c) = ((a; b); c) = (a; (b; c))$ (n° 219).

La multiplication est distributive par rapport à la loi de composition P.G.C.D.

$$(ka;\, kb) = k\,(a;\, b) \text{ (n° 215).}$$

III. APPLICATIONS A LA DIVISIBILITÉ

226. Théorème de Gauss. — ***Si un entier naturel divise un produit de deux facteurs et s'il est premier avec l'un, il divise l'autre.***

L'entier a divise bc et il est premier avec b :

$$(a;\, b) = 1 \Longrightarrow (ac;\, bc) = c$$

a divise ac (n° 183) et bc, donc il divise leur P.G.C.D. qui est c.

227. Exercice. — *Trouver les entiers naturels x et y tels que :* $5\,x - 7\,y = 1$.

On constate que $x_0 = 3$; $y_0 = 2$ est une solution :

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 7y = 1 \\ 5.3 - 7.2 = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 5\,(x-3) - 7\,(y-2) = 0 \Longleftrightarrow 5\,(x-3) = 7\,(y-2).$$

L'entier 5 divise le produit $7\,(y-2)$; il est premier avec 7. Donc il divise $(y-2)$;

$y - 2 = 5\,k$, ce qui entraîne : $5\,x = 35\,k + 15$ soit $x = 7\,k + 3$.

Les solutions cherchées sont : $x = 7\,k + 3$; $y = 5\,k + 2$ où $k \in \mathrm{N}$.

228. Théorème. — ***Pour qu'un entier naturel soit divisible par un produit de facteurs premiers entre eux deux à deux, il faut et il suffit qu'il soit divisible par chacun de ces facteurs.***

1° Si n est divisible par abc, il l'est aussi par a, par b et par c car

$$n = abcq \Longrightarrow n = a(bcq) \Longrightarrow n = b(acq) \Longrightarrow n = c(abq).$$

2° Supposons que les nombres a, b, c premiers entre eux deux à deux divisent n : $n = aq_1$; b premier avec a divise n, donc aq_1; il divise q_1 (n° 226) et : $q_1 = bq_2 \Longrightarrow n = abq_2$; c divise abq_2; il est premier avec a, donc il divise bq_2, il est premier avec b, donc il divise q_2 et :

$$q_2 = cq \Longrightarrow n = abcq \text{ et } n \text{ est divisible par } abc.$$

La démonstration s'étend de même à un nombre quelconque de facteurs :

Exemples : 1° $6|n \Longleftrightarrow 2|n$ et $3|n$.

2° $60|n \Longleftrightarrow 3|n;\ 4|n;\ 5|n$.

229. Théorème. — ***Si un nombre est premier avec plusieurs autres, il est premier avec leur produit.***

Soit n premier avec a et avec b : $(n;\, a) = 1 \Longrightarrow (nb;\, ab) = b$. Tout diviseur commun à n et ab est un diviseur commun à nb et ab, donc un diviseur de b (n° 214), donc un diviseur commun à n et b. Ce diviseur ne peut être que 1 puisque n et b sont premiers entre eux. Les nombres n et ab sont premiers entre eux. Si n est premier avec c, étant premier avec ab, il l'est avec $a(bc) = abc$ et ainsi de suite.

Exemple. — 8 premier avec chacun des nombres 7, 9 et 15 est premier avec $7.9.15 = 945$.

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

I. P.P.C.M. DE DEUX ENTIERS NATURELS

230. Ensemble de multiples communs à deux entiers naturels. — Désignons respectivement par A l'ensemble des multiples de l'entier naturel a et par B l'ensemble des multiples de l'entier naturel b. Écartons le cas où $a = 0$ qui entraîne $A = \{0\}$. Si $a \in N^*$, A admet a comme plus petit élément et si $b \in N^*$, B admet b comme plus petit élément. L'ensemble des multiples p communs à a et à b est : $M = A \cap B$. Cet ensemble M n'est pas vide car il admet pour éléments le produit ab et ses multiples. Soit m son plus petit élément. Ce nombre m se nomme *plus petit commun multiple* (P.P.C.M.) de a et b que nous symboliserons dans cette leçon par :

$$m = [a;\ b].$$

231. Définition. — ***Le* P.P.C.M. *de deux entiers positifs est le plus petit de leurs multiples communs.***

EXEMPLE. — Les multiples de 12 sont : 12, 24; 36; 48...; ceux de 18 sont : 18; 36; 54... Le P.P.C.M. de 12 et 18 est 36 :

$$36 = [12;\ 18].$$

232. Théorème. — ***Le* P.P.C.M. *de deux entiers positifs est égal au quotient exact de leur produit par leur* P.G.C.D.**

Désignons par p un multiple commun à a et b, par a' et b' les quotients respectifs de a et b par leur P.G.C.D., d :

$$p = aq = bq' \Longleftrightarrow p = da'q = db'q' \Longrightarrow a'q = b'q'.$$

b' est premier avec a' (nº 217) et divise $a'q$. Donc b' divise q (nº 226) :

$$q = b'k; \qquad k \in N^* \qquad \text{et} \qquad p = da'b'k.$$

Tout multiple commun à a et b est de la forme : $\boxed{p = da'b'k = k\dfrac{ab}{d}}$ (1)

Le P.P.C.M. de a et b s'obtient en donnant à k la valeur 1 :

$$\boxed{m = [a;\ b] = \frac{ab}{d}} \qquad (2)$$

EXEMPLE. — Le P.P.C.M. des nombres 684 et 252 est (nº 213) :

$$m = \frac{684 \times 252}{36} = 4\,788.$$

233. Corollaire. — ***Le* P.P.C.M. *de deux nombres premiers entre eux est égal à leur produit.***

Si $d = 1$, la relation (2) entraîne : $m = ab$.

234. Théorème. — ***Les multiples communs à deux nombres sont les multiples de leur*** P.P.C.M.

La relation (1) montre que tout multiple p commun à a et b est de la forme : $p = k\frac{ab}{d} = km$; réciproquement : $p = km \Longrightarrow p = kab' = kba'$; donc p est un multiple commun à a et b.

Ainsi les multiples communs à 684 et 252 sont : 4 788; 4 788 × 2; 4 788 × 3... et ainsi de suite.

235. Théorème. — ***Pour qu'un multiple commun à deux entiers positifs soit leur*** P.P.C.M. ***il faut et il suffit que les quotients de ce multiple commun par ces deux entiers soient premiers entre eux.***

Si a' et b' sont les quotients, premiers entre eux, de deux entiers a et b par leur P.G.C.D. d, tout multiple commun p à a et b est tel que : $p = da'b'k = ab'k = a'bk$ (n° 232).

Donc : $\frac{p}{a} = b'k$ et $\frac{p}{b} = a'k$. Le P.G.C.D. de $\frac{p}{a}$ et $\frac{p}{b}$ est donc $k = \frac{p}{m}$.

Pour que p soit égal au P.P.C.M. m de a et b, il faut et il suffit que $k = 1$, donc que les quotients $\frac{p}{a}$ et $\frac{p}{b}$ soient premiers entre eux.

Exemple. — Les quotients de 1 470 par 42 et 245 sont respectivement 35 et 6, nombres premiers entre eux. Donc 1 470 est le P.P.C.M. de 42 et 245.

236. Théorème. — ***Si m est le*** P.P.C.M. ***des nombres a et b, celui de ka et kb est km.***

En effet : $[ka\,;\,kb] = \frac{k^2ab}{(ka\,;\,kb)}$ Or $(ka\,;\,kb) = kd$ (n° 215)

et : $[ka\,;\,kb] = \frac{k^2ab}{kd} = \frac{kab}{d} = km.$

237. Théorème. — ***Si m est le*** P.G.C.D. ***des nombres a et b et k un diviseur commun à a et b le*** P.P.C.M. ***des nombres $\frac{a}{k}$ et $\frac{b}{k}$ est $\frac{m}{k}$.***

En effet : $\left(\frac{a}{k}\,;\,\frac{b}{k}\right) = \frac{d}{k}$ (n° 216) et $\left[\frac{a}{k}\,;\,\frac{b}{k}\right] = \frac{ab}{k^2} \times \frac{k}{d} = \frac{ab}{kd} = \frac{m}{k}.$

II. P.P.C.M. DE PLUSIEURS ENTIERS NATURELS

238. Définition. — ***Le*** P.P.C.M. ***de plusieurs entiers positifs a, b, c... est le plus petit de leurs multiples communs.***

Si A, B, C désignent respectivement l'ensemble des multiples de a, l'ensemble des multiples de b et l'ensemble des multiples de c, leur intersection $A \cap B \cap C$ est l'ensemble des multiples p communs à a, b et c. Cet ensemble n'est pas vide car il admet l'élément abc et ses multiples. Désignons par m son plus petit élément. Ce nombre m se nomme P.P.C.M. de a, b, c et se note :

$$m = [a; b; c].$$

239. Théorème. — ***Dans la recherche du* P.P.C.M. *de plusieurs nombres, on peut remplacer deux d'entre eux par leur* P.P.C.M..**

Soit $u = [a; b]$. Montrons que : $[a; b; c]$ est égal à $[u; c]$:

Tout multiple commun à a, b, c est un multiple commun à a et b donc un multiple de u (nº 234). Réciproquement, tout multiple commun à u et c est un multiple de a et b (nº 183), donc un multiple commun à a, b et c. Les multiples communs à a, b, c sont les mêmes que les multiples communs à u et c. Ces propriétés résultent aussi de ce que la loi $\cap$ est associative.

EXEMPLE. — Le P.P.C.M. des nombres 12; 18 et 42 est le même que celui de 36 et 42, soit 252.

Cette propriété s'étend à un nombre quelconque d'entiers positifs; ainsi :

$$[a; b] = u \Longrightarrow [a; b; c; d] = [u; c; d].$$

puis :
$$[u; c] = v \Longrightarrow [u; c; d] = [v; d] = m.$$

soit :
$$[a; b; c; d] = m.$$

240. Théorème. — ***Les multiples communs à plusieurs entiers positifs sont les multiples de leur* P.P.C.M.**

En effet : $A \cap B \cap C \cap D = U \cap C \cap D = V \cap D.$

où : $u = [a; b]$ et $v = [u; c]$ et les multiples communs à a, b, c, d sont ceux de m, P.P.C.M. de v et d (nº 243).

241. Théorème. — ***Si m est le* P.P.C.M. *des nombres a, b, c celui des nombres ka, kb, kc est km.***

$[a; b] = u \Longrightarrow [ka, kb] = ku$ et $[u; c] = m \Longrightarrow [ku, kc] = km$ (nº 236).

242. Théorème. — ***Si m est le* P.P.C.M. *des nombres a, b, c et k un de leurs diviseurs communs, le* P.P.C.M. *des nombres $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$ et $\frac{c}{k}$ est $\frac{m}{k}$.***

$$[a ; b] = u \Longrightarrow \left[\frac{a}{k} ; \frac{b}{k}\right] = \frac{u}{k} \quad \text{et} \quad [u ; c] = m \Longrightarrow \left[\frac{u}{k} ; \frac{c}{k}\right] = \frac{m}{k} \quad (\text{n}^\text{o}\ 237).$$

243. Théorème. — ***Pour qu'un multiple commun à plusieurs nombres soit leur* P.P.C.M., *il faut et il suffit que les quotients de ce multiple commun par ces nombres soient premiers entre eux dans leur ensemble.***

1º Soit m le P.P.C.M. des nombres a, b, c : $m = aa' = bb' = cc'$.

Si a', b', c' n'étaient pas premiers entre eux dans leur ensemble, ils admettraient un diviseur commun $d > 1$, qui serait un diviseur de m et :

$$m = dm' = ada_1 = bdb_1 = cdc_1 \Longrightarrow m' = aa_1 = bb_1 = cc_1$$

$m' < m$ serait un multiple commun à a, b, c, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2º Soit $p = mk$ un multiple commun à a, b, c et supposons que les quotients a_1, b_1, c_1 de p par a, b, et c soient premiers entre eux dans leur ensemble.

On a :
$$p = mk = aa_1 = bb_1 = cc_1$$

et :
$$m = aa' = bb' = cc'$$

qui entraînent :
$$a_1 = ka'; \quad b_1 = kb' \text{ et } c_1 = kc'.$$

k diviseur commun à a_1, b_1 et c_1 ne peut être que 1. Donc $p = m$.

244. Conclusion. — Il résulte de ce qui précède que la loi de composition P.P.C.M. possède les propriétés suivantes dans N^* :

Elle est commutative : $[a; b] = [b; a]$ (nº 230).

Elle possède un élément neutre : $[a; 1] = a$.

Elle est associative : $[a; b; c] = [(a; b); c] = [a; (b; c)]$ (nº 239).

La multiplication est distributive par rapport à loi de composition P.P.C.M.

$$[ka; kb] = k\,[a; b] \text{ (nº 236).}$$

EXERCICES

— Trouver le P.G.C.D. des nombres suivants, puis leur P.P.C.M. :

325. 17 640 et 6 288. **326.** 3 575 et 2 730. **327.** 63 083 et 36 455.

328. 9 807 et 6 974. **329.** 84 et 30. **330.** 2 427 et 1 845.

331. 3 604, 4 452 et 12 296. **332.** 24×70; 30×84 et 35×120.

333. Démontrer que le P.G.C.D. des nombres a et b est aussi celui des nombres a et $a + b$ et celui des nombres a et $a - b$.

334. Soit d le P.G.C.D. des nombres a et b et p un entier premier avec a.

1º Montrer que d est le P.G.C.D. des nombres a et pb.

2º Si m est le P.P.C.M. de a et b, celui des nombres a et pb est pm.

335. 1º Trouver deux nombres connaissant leur somme s et leur P.G.C.D. d. Discuter.

2º Application : $s = 420$ et $d = 35$.

336. 1º Trouver deux nombres connaissant leur produit p et leur P.G.C.D. d. Discuter.

2º Application : $p = 10\,164$ et $d = 11$.

337. 1º Calculer le P.G.C.D. de 18 018 et 11 781.

2º Résoudre dans N l'équation : $26x - 17y = 1$ en remarquant que $x = 2$; $y = 3$ est solution.

3º Résoudre dans N l'équation : $18\,018\,x - 11\,781\,y = 693$.

338. 1º Calculer le P.G.C.D. de 8866; 2728 et 21142.

2º En remarquant que $x = 3$; $y = 2$ est une solution de : $8\,866\,x - 2\,728\,y = 21\,142$, déterminer toutes les solutions dans N de cette équation.

339. 1º Calculer le P.G.C.D. de 33082 et 21406.

2º Les nombres 33 111 et 21 448 divisés par un entier naturel n de 4 chiffres donnent pour restes respectivement 29 et 42. Trouver n.

340. Le P.G.C.D. de a et b est 24; celui de b et c est 36.

1º Quel est le P.G.C.D. de a; b et c?

2º Trouver les valeurs de a, b, c sachant qu'en outre : $a + b + c = 300$.

341. Trouver deux entiers naturels premiers entre eux, inférieurs à 100 sachant que leur somme est égale à 150 et qu'ils sont congrus, modulo 7.

342. 1° Trouver le P.G.C.D. de 14 035 et 11 629.

2° Trouver deux entiers naturels connaissant leur P.P.C.M., 41 615, et leur rapport $\frac{14\,035}{11\,629}$.

3° Trouver les valeurs entières de x et y solutions de l'équation :

$14\,035\,x - 11\,629\,y = 401$. (On posera : $x = X + 5$ et $y = Y + 6$).

343. 1° Démontrer par récurrence que d désignant le P.G.C.D. des entiers a et b, il existe deux entiers x et y tels que : $|ax - by| = d$. Étudier la réciproque.

2° Pour que les entiers a et b soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers x et y tels que : $|ax - by| = 1$.

344. On considère les entiers a, b, c, d tels que $a > b > c > d$ et on désigne par r, r' et r'' les restes respectifs de a, b et c par d. Montrer que le P.G.C.D. des nombres a ; b ; c et d est le même que celui des nombres r, r', r'' et d.

345. 1° Soit d le P.G.C.D. des nombres a et b, d' celui des nombres a et c. Montrer que le P.G.C.D. des nombres a, b, c est aussi celui des nombres d et d'.

2° Soit m le P.P.C.M. des nombres a et b, m' celui des nombres a et c. Montrer que le P.P.C.M. des nombres a, b, c est aussi celui des nombres m et m'.

346. 1° Trouver le P.G.C.D. des nombres 24 101 et 18 780.

2° Trouver les valeurs entières qui vérifient l'équation :

$18\,780\,x - 24\,101\,y = 313$ sachant que $x = 9$ et $y = 7$ est une solution.

347. Soient les nombres entiers naturels a, b, c, d tels que $a > b > c > d$.

1° Montrer que, dans la recherche du plus grand commun diviseur de ces nombres, on peut remplacer a, b, c par les restes respectifs de leurs divisions par d.

2° Appliquer cette propriété autant de fois qu'il le faudra pour trouver le plus grand commun diviseur des nombres 58 212, 24 948, 21 924, 13 608.

348. 1° Trouver le P.G.C.D. des nombres 14 865 et 7 976.

2° Un terrain a la forme d'un triangle dont les côtés ont pour mesures 132 m, 156 m et 204 m. On veut planter des arbres sur son périmètre de façon qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter, si l'on veut que la distance entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètres ?

349. Trouver deux nombres ayant pour somme 96 et pour plus grand commun diviseur 12.
Combien le problème admet-il de solutions ?

350. a et b sont deux nombres premiers entre eux, m et n deux entiers quelconques. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les restes des divisions de ma et na par b soient les mêmes est que la différence des nombres m et n soit un multiple de b.
Que pouvez-vous en conclure pour les restes $r_1, r_2, ..., r_{b-1}$ des divisions de $a, 2a, 3a... (b-1)\,a$ par b ?

351. Montrer que, si un nombre est séparément divisible par des nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.
Application : 29 461 905 est divisible par 495.

352. Trouver deux nombres, connaissant leur P.G.C.D., 6, et leur produit, 2 700.

353. Soit le nombre 120 450.
Par quels chiffres doit-on remplacer les deux zéros pour que le nouveau nombre obtenu soit divisible par 99 ?

354. Trouver deux entiers naturels, connaissant leur P.G.C.D., 17, et la différence de leurs carrés, 1 445.

355. 1° Montrer que le carré d'un nombre entier pair est un multiple de 4 et le carré d'un nombre entier impair un multiple de 8 augmenté de 1.

2° On considère trois nombres entiers a, b, c satisfaisant à $a^2 = b^2 + c^2$. (1)

α) Montrer que, si a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble, b et c sont l'un pair et l'autre impair et a est impair.

β) a, b, c étant premiers entre eux dans leur ensemble et b étant celui des deux nombres b et c qui est pair, montrer que $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux et sont les carrés de deux nombres entiers impairs m et n premiers entre eux. Exprimer a, b, c en fonction de m et n.

3° Donner des formules générales fournissant toutes les solutions de l'équation (1) en nombres entiers non nécessairement premiers entre eux dans leur ensemble. (On fera intervenir leur plus grand commun diviseur δ.) Indiquer toutes les solutions formées de nombres au plus égaux à 20.

356. En désignant par n un nombre entier, démontrer que le produit $(n^2 - 1)n^2(n^2 + 1)$ est toujours divisible par 60.

357. On désigne par n et p des entiers strictement positifs. Démontrer :

1° que $n(n^4 - 1)$ est divisible par 30;

2° que n^{p+4} et n^p sont terminés (à droite) par le même chiffre.

358. Montrer que le produit de quatre nombres consécutifs est égal à un carré parfait diminué de 1.

359. Tous les nombres envisagés dans cet exercice sont entiers positifs.

1° Trouver tous les couples (a, b) vérifiant les conditions suivantes : les nombres a et b sont premiers entre eux et leur produit est 30.

[Les couples (a, b) et (b, a) ne sont pas considérés comme distincts.]

2° Trouver tous les couples (x, y) vérifiant les conditions suivantes : les nombres x et y admettent 121 pour plus grand commun diviseur et leur produit est 439 230.

360. Trouver tous les couples d'entiers dont le produit est 13 500 et le P.G.C.D. 15.

361. Trouver deux nombres dont le P.P.C.M. est 36 et dont le P.G.C.D. est 2.

362. On considère les entiers naturels x et y tels que $x > y > 0$.

1° Combien y a-t-il de couples x ; y vérifiant $x + y = 175$?

2° Déterminer tous les couples vérifiant l'équation : $xy = 175$.

3° Trouver deux nombres dont le produit est 2 800 et dont le P.G.C.D. est 4.

NOMBRES PREMIERS

245. Définition. — ***Tout nombre naturel supérieur à 1 est un nombre premier lorsqu'il n'admet pas d'autres diviseurs que lui-même et l'unité.***

Ainsi, 7; 11; 13 sont des nombres premiers tandis que 8; 15; 49 sont des nombres non premiers.

246. Théorème. — ***Tout entier non premier admet au moins un diviseur premier.***

Si n n'est pas premier, désignons par $d > 1$ le plus petit de ses diviseurs. Ce nombre d est premier; sinon il admettrait un diviseur d' tel que $1 < d' < d$ qui diviserait n (nº 183), ce qui est contraire à l'hypothèse.

247. Corollaire. — ***Pour qu'un nombre soit premier il suffit qu'il n'admette aucun diviseur premier autre que lui-même.***

Si n n'admet aucun diviseur premier $d < n$, il est premier car s'il n'était pas premier, il en admettrait un.

248. Théorème. — ***Tout nombre non premier admet un diviseur premier dont le carré est inférieur ou égal au nombre considéré.***

Soit d le plus petit diviseur de n; ce diviseur est premier (nº 246) et :
$n = dq$ montre que q est un diviseur de n supérieur ou égal à d :

$$d \leqslant q \Longrightarrow d^2 \leqslant dq \quad \text{soit} \quad d^2 \leqslant n.$$

Ainsi le plus petit diviseur de 35 autre que 1 est 5 et $5^2 < 35$.

Il en résulte que si n n'admet pas de diviseur premier d tel que $d^2 \leqslant n$, le nombre n est premier.

249. Théorème. — ***La suite des nombres premiers est illimitée.***

Soit p un nombre premier. Désignons par p' le nombre obtenu en ajoutant 1 au produit de tous les nombres premiers jusqu'à p :

$$p' = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \ldots \times p) + 1.$$

Si p' est premier, c'est un nombre premier supérieur à p. Si p' n'est pas premier, il admet un diviseur premier d qui n'est aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à p car le reste de la division de p' par l'un quelconque d'entre eux est 1. Donc d est un nombre premier supérieur à p. On peut donc trouver un nombre premier supérieur à tout nombre premier donné; la suite des nombres premiers est illimitée ou infinie.

250. Table des nombres premiers inférieurs à 100. — Il résulte du n° 248 que tout entier inférieur ou égal à 100, qui n'est divisible par aucun diviseur premier inférieur ou égal à 10, est un nombre premier. Il suffit donc, dans la suite des entiers de 2 à 100, de supprimer successivement les multiples de 2 (autres que 2), de 3 (autres que 3), de 5 (autres que 5) et de 7 (autres que 7). On remarquera que les premiers multiples de 2; 3; 5 et 7 à barrer sont respectivement 4; 9; 25 et 49. On obtient ainsi le crible d'Eratosthène :

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

251. Reconnaître si un nombre est premier. — Pour que n soit premier, il suffit qu'il n'admette pas de diviseur premier d tel que $d^2 \leqslant n$ (n° 248).

On peut aussi appliquer la règle suivante :

Pour reconnaître si un nombre n *est premier, on le divise par les nombres premiers successifs. Si aucune division ne donne un reste nul jusqu'à ce que le quotient obtenu soit inférieur ou égal au diviseur utilisé, le nombre* n *est premier.*

En effet, les diviseurs essayés forment une suite strictement croissante, les quotients successifs obtenus forment donc une suite décroissante. Soit d le premier diviseur tel que le quotient q de n par d soit inférieur ou égal à d :

$$n = dq + r \qquad 0 < r < d \quad \textit{et} \quad q \leqslant d$$

Si n admettait un diviseur premier $d' > d$:

$$n = d'q' \quad \text{et} \quad d' > d \Longrightarrow q' \leqslant q \leqslant d.$$

Le nombre n admettrait un diviseur premier $q' \leqslant d$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exemple. — Le nombre 283 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à 17 et $283 = (17 \times 16) + 11$. Le quotient 16 est inférieur au diviseur 17. Donc 283 est un nombre premier.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES PREMIERS

252. Théorème. — ***Tout nombre premier qui ne divise pas un entier naturel est premier avec cet entier naturel.***

Les diviseurs communs au nombre premier p et à l'entier a ne peuvent être que 1 et p. Puisque p ne divise pas a, le seul diviseur commun à a et p est 1.

253. Théorème. — ***Tout nombre premier qui divise un produit d'entiers naturels divise au moins l'un des facteurs de ce produit.***

Supposons que le nombre premier p divise le produit abc :

Si p ne divise pas a, il est premier avec a (n° 252). Or p divise le produit $a(bc)$; donc il divise bc (n° 226). Si p ne divise pas b, il est premier avec b (n° 252). Donc il divise c (n° 226).

254. Corollaire I. — ***Tout nombre premier qui divise un produit de facteurs premiers est égal à l'un de ces facteurs.***

Si p premier divise le produit abc où a, b, c sont premiers, ce nombre p divise l'un des facteurs du produit, soit a par exemple qui n'admet comme diviseurs que 1 et a. Donc $p = a$.

255. Corollaire II. — ***Tout nombre premier qui divise une puissance d'un entier naturel divise cet entier.***

Si p premier divise $a^n = a.a.a \dots a$, il divise l'un des facteurs, donc a.

256. Théorème. — ***Pour que plusieurs entiers naturels soient premiers entre eux dans leur ensemble, il suffit qu'ils n'admettent pas de diviseur premier commun.***

Si a, b, c n'ont pas de diviseur premier commun, ils n'en ont pas d'autre que 1, car s'ils en admettaient un non premier, soit d, ce nombre d admettrait au moins un diviseur premier p (n° 246) qui diviserait à la fois a, b et c.

257. Corollaire. — ***Si deux nombres sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de ces nombres sont premières entre elles.***

Soient a et b premiers entre eux. Si a^m et b^n admettaient un diviseur premier commun p, ce nombre p diviserait à la fois a et b (n° 255), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc a^m et b^n sont premiers entre eux.

Ainsi, 8^3 et 15^4 sont premiers entre eux, de même que 8 et 15.

DÉCOMPOSITION D'UN ENTIER EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

258. Théorème. — ***Tout entier non premier est décomposable d'une seule façon en un produit de facteurs premiers.***

1° *La décomposition est possible.* — Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier a_1 et $n = a_1 q$ avec $q < n$. Si q est premier, la décomposition est obtenue, sinon il admet un diviseur premier a_2 et :

$$q = a_2 q'; \quad q' < q \Longrightarrow n = a_1 a_2 q'.$$

Si q' est premier, la décomposition est obtenue, sinon il admet un diviseur premier a_3 et : $q' = a_3 q''$; $q'' < q' \Longrightarrow n = a_1 a_2 a_3 q''$ et ainsi de suite.

Les quotients successifs q, q', q''... forment une suite strictement décroissante. On finit par obtenir un quotient premier et la décomposition :

$$n = a_1 a_2 a_3 \dots a_k \quad \text{où } a_1\,;\ a_2;\ \dots\ a_k \text{ sont premiers.}$$

Certains facteurs pouvant figurer plusieurs fois dans la décomposition, on obtient dans ce cas : $n = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$ où a, b, ... l sont des nombres premiers différents.

2° *La décomposition est unique.* — Admettons qu'il existe deux décompositions différentes :

$$n = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda = a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \dots m'^{\mu'}.$$

Le nombre premier a divise le produit $a'^{\alpha'} b'^{\beta'} \dots m'^{\mu'}$, donc l'un des facteurs de ce produit (n° 253), soit $a'^{\alpha'}$, donc $a = a'$ (n° 255). Tout facteur premier de la première décomposition figure donc dans la seconde. De même, tout facteur premier de la seconde décomposition figure dans la première et

$$n = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda = a^{\alpha'} b^{\beta'} \dots l^{\lambda'}. \qquad (1)$$

Montrons que les exposants respectifs du même facteur dans les deux décompositions sont égaux. Si $\alpha > \alpha'$, la relation (1) entraîne :

$$a^{\alpha-\alpha'}\, b^{\beta} \,...\, l^{\lambda} = b^{\beta'} \,...\, l^{\lambda'}.$$

Le facteur premier a divise le premier membre de cette égalité, mais ne divise pas le second. Donc $\alpha > a'$ est impossible. De même $\alpha < \alpha'$ est impossible. On en déduit : $\alpha = \alpha'$ et de même $\beta = \beta'$; ...; $\lambda = \lambda'$. La décomposition est unique.

259. Disposition pratique. — On écrit à gauche d'un trait vertical le nombre n à décomposer et les différents quotients q', q', q'' obtenus en prenant comme diviseurs successifs les nombres premiers a, b, c utilisés dans l'ordre croissant. Ceux-ci s'inscrivent à droite du trait vertical. En prenant $n = 1\,400$, on trouve la disposition ci-contre et :

$$1\,400 = 2^3.5^2.7$$

1 400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

APPLICATIONS AUX ENTIERS

260. Théorème. — ***Pour que l'entier naturel p soit un diviseur de l'entier naturel n, il faut et il suffit que chaque facteur premier de p figure dans la décomposition de n avec un exposant au moins égal.***

1° *La condition est nécessaire :* soit $p = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$ et $n = kp$.

L'égalité $n = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, k$ montre que a, b, c figurent dans la décomposition de n avec des exposants respectivement supérieurs ou égaux à α, β et γ.

2° *La condition est suffisante :* soit $p = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$ et $n = a^{\alpha+\alpha'}\, b^{\beta+\beta'}\, c^{\gamma+\gamma'}\, d^{\delta}\, e^{\varepsilon}$: $n = p \times (a^{\alpha'}\, b^{\beta'}\, c^{\gamma'}\, d^{\delta'}\, e^{\varepsilon'})$. Donc p divise n.

261. Recherche des diviseurs d'un entier naturel.

Soit $n = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$. Tout diviseur d de n est de la forme :

$d = a^{x}\, b^{y}\, c^{z}$ où x, y, z sont des entiers tels que :

$$0 \leqslant n \leqslant \alpha;\quad 0 \leqslant y \leqslant \beta;\quad 0 \leqslant z \leqslant \gamma.$$

L'ensemble de ces diviseurs coïncide avec l'ensemble des termes du produit :

$$\mathrm{P} = (1 + a + a^2... + a^{\alpha})\,(1 + b + b^2... + b^{\beta})\,(1 + c + c^2... + c^{\gamma}).$$

Le nombre de ces diviseurs est : $(1 + \alpha)\,(1 + \beta)\,(1 + \gamma)$.

EXEMPLE. — *Trouver les diviseurs de* 360 :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Les diviseurs de 360 sont les termes du produit :

$$\mathrm{P} = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)\,(1 + 3 + 3^2)\,(1 + 5).$$

Ce sont les 24 nombres suivants :

1; 2; 2^2; 2^3; 3; 2×3; $2^2 \times 3$; $2^3 \times 3$; 3^2; 2×3^2; $2^2 \times 3^2$; $2^3 \times 3^2$; 5; 2×5; $2^2 \times 5$; $2^3 \times 5$; 3×5; $2 \times 3 \times 5$; $2^2 \times 3 \times 5$; $2^3 \times 3 \times 5$; $3^2 \times 5$; $2 \times 3^2 \times 5$; $2^2 \times 3^2 \times 5$ et $2^3 \times 3^2 \times 5$. Soit :

1; 2; 4; 8; 3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72; 5; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120; 45; 90; 180 et 360.

Pratiquement il est plus rapide de chercher les diviseurs associés :

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18
360	180	120	90	72	60	45	40	36	30	24	20

262. P.G.C.D. de plusieurs entiers naturels. — ***Le* P.G.C.D. *de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers est égal au produit de tous les facteurs premiers communs à chaque décomposition, tout facteur commun étant affecté de son plus faible exposant dans l'ensemble des décompositions.***

Soit d un diviseur commun aux entiers n, n', n''... Dans sa décomposition en facteurs premiers, ne doivent figurer que des facteurs appartenant à n, à n', à n''..., donc des facteurs communs à ces nombres. L'exposant α de l'un de ces facteurs, a par exemple, doit être inférieur ou égal à l'exposant de a dans n, dans n' et dans n''; sa valeur maxima est donc le plus faible exposant de a dans n, n' et n''. La règle ci-dessus en résulte.

Exemple. — *Trouver le* P.G.C.D. *des nombres* 315; 819 et 924 :

$315 = 3^2 \times 5 \times 7;$ $819 = 3^2 \times 7 \times 13;$ $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11.$

Le P.G.C.D. de ces trois nombres est $3 \times 7 = 21$.

263. P.P.C.M. de plusieurs entiers naturels. — ***Le* P.P.C.M. *de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers est égal au produit de tous les facteurs premiers figurant dans au moins une des décompositions, chacun de ces facteurs étant affecté de son plus grand exposant dans l'ensemble des décompositions.***

Soit m un multiple commun aux entiers n, n', n''... Il résulte du n° 260 que dans la décomposition de m figurent les facteurs premiers de n, de n', de n'' donc tous les facteurs communs ou non à ces nombres. L'exposant α du facteur a dans m est supérieur ou égal à l'exposant de a dans n, dans n', dans n''. La plus petite valeur de m s'obtient donc en prenant les facteurs premiers communs ou non à n, n' et n'' avec l'exposant le plus petit possible.

Exemple. — Trouver le P.P.C.M. des nombres 3780; 4320 et 5 184.

$3\,780 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7;$ $4\,320 = 2^5 \times 3^3 \times 5;$ $5\,184 = 2^6 \times 3^4.$

Le P.P.C.M. de ces trois nombres est : $2^6 \times 3^4 \times 5 \times 7 = 181\,440.$

264. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un entier.

1° Soit $N = n^p$ et $n = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$ ... où a, b, c sont les facteurs premiers de n :

$$N = (a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma)^p = a^{\alpha p}\, b^{\beta p}\, c^{\gamma p}.$$

2° Réciproquement, si $N = a^{\alpha p}\, b^{\beta p}\, c^{\gamma p}$ on a :

$$N = n^p \quad \text{avec} \quad n = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma.$$

Pour qu'un entier soit la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un entier, il faut et il suffit que les exposants des facteurs premiers de sa décomposition soient des multiples de p.

En particulier :

Pour qu'un entier soit un carré parfait, il faut et il suffit que les exposants des facteurs premiers de sa décomposition soient des nombres pairs.

Exemples. — 1° $1\,728 = 2^6 \times 3^3$ est le cube de $2^2 \times 3 = 12$.

2° $129\,600 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$ est le carré de $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$.

APPLICATION AUX FRACTIONS

265. Fractions arithmétiques. — Nous appellerons fraction arithmétique tout rationnel positif ou nul tel que $\frac{a}{b}$ ou $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}^*$ (n° 102); les *termes* de la fraction sont a et b; le ***numérateur*** est a, le ***dénominateur*** est b. L'égalité, l'addition, la soustraction, la multiplication et le quotient exact de deux fractions ont été étudiés dans la 5e leçon (n° 102).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Si d est un diviseur commun aux termes a et b de la fraction $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d} = \frac{a'}{b'}$$

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ a été simplifiée.

266. Fraction irréductible. — ***Une fraction est irréductible lorsqu'il n'existe pas de fraction égale dont les termes soient respectivement inférieurs à ceux de la fonction donnée.***

$$\frac{a}{b} \text{ est irréductible si } \forall m ; \forall n : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \implies m \geqslant a ; n \geqslant b$$

267. Théorème. — ***Pour qu'une fraction soit irréductible, il faut et il suffit que ses termes soient premiers entre eux.***

1° *Condition nécessaire :* si $\frac{a}{b}$ est irréductible, a et b sont premiers entre eux. Sinon, a et b auraient un diviseur commun $d > 1$: $\frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d} = \frac{a'}{b'}$, avec $a' < a$ et $b' < b$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° *Condition suffisante :* supposons a et b premiers entre eux :

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \iff ad = bc \qquad (\text{n° } 102).$$

a premier avec b divise bc, donc a divise c (n° 226) et :

$$c = ak \implies ad = bak \implies d = bk \quad \text{avec} \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Les égalités $c = ak$ et $d = ak$ montrent que toute fraction $\frac{c}{d}$ égale à $\frac{a}{b}$ a des termes supérieurs ou égaux à ceux de $\frac{a}{b}$. La fraction $\frac{a}{b}$ est donc irréductible.

268. Corollaire I. — ***Toute fraction a pour termes des équimultiples de ceux de la fraction irréductible égale.***

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et si $\frac{a}{b}$ est irréductible, on a : $c = ak$ et $d = bk$

Les fractions égales à $\frac{8}{15}$ sont : $\frac{8 \times 2}{15 \times 2}$; $\frac{8 \times 3}{15 \times 3}$; $\frac{8 \times 4}{15 \times 4}$

269. Corollaire II. — ***Pour obtenir la fraction irréductible égale à une fraction donnée, il suffit de diviser ses termes par leur* P.G.C.D.**

Soit d le P.G.C.D. de a et b; les quotients a' et b' de a et b par d sont premiers entre eux (nº 217) et :

$\frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d} = \frac{a'}{b'}$. La fraction $\frac{a'}{b'}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{a}{b}$. Ainsi, 23 est le P.G.C.D. de 161 et 253 et :

$$\frac{161}{253} = \frac{161 : 23}{253 : 23} = \frac{7}{11} \quad \text{fraction irréductible.}$$

270. Réduction de fractions au plus petit dénominateur commun. — Soient les fractions irréductibles $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$ et les fractions respectivement égales $\frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}, \frac{\gamma}{p}$.

Les égalités $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{p}$; $\frac{a'}{b'} = \frac{\beta}{p}$ et $\frac{a''}{b''} = \frac{\gamma}{p}$ montrent que α et p, β et p, γ et p sont respectivement des équimultiples de a et b, a' et b', a'' et b''. Donc p est un multiple commun aux dénominateurs b, b' et b''. Le plus petit dénominateur commun possible est le P.P.C.M. m de ces dénominateurs.

Soit $m = bu = b'v = b''w$; on obtient :

$$\frac{a}{b} = \frac{au}{m} \quad ; \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'v}{m} \quad \text{et} \quad \frac{a''}{b''} = \frac{a''w}{m}.$$

Pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun, on les remplace par les fractions irréductibles égales, on cherche le* P.P.C.M. *des nouveaux dénominateurs puis on multiplie les termes de chaque fraction réduite par le quotient du* P.P.C.M. *par le dénominateur de chaque fraction réduite.

Exemple. — Soient les fractions $\frac{10}{96}$; $\frac{21}{120}$ et $\frac{33}{270}$. Les fractions irréductibles égales sont : $\frac{5}{48}$; $\frac{7}{40}$ et $\frac{11}{90}$. Le P.P.C.M. de 48; 40 et 90 est 720 et :

$$\frac{10}{96} = \frac{5 \times 15}{48 \times 15} = \frac{75}{720} \quad ; \quad \frac{21}{120} = \frac{7 \times 18}{40 \times 18} = \frac{126}{720} \quad \text{et :} \quad \frac{33}{270} = \frac{11 \times 8}{90 \times 8} = \frac{88}{720}.$$

271. Théorème. — ***Toute puissance d'exposant entier et positif d'une fraction irréductible est une fraction irréductible.***

Si $\frac{a}{b}$ est irréductible : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ est irréductible car a et b étant premiers entre eux, il en est de même de a^n et b^n (nº 257).

En particulier, si $\frac{a}{b}$ est irréductible, son carré $\frac{a^2}{b^2}$ est irréductible. Ainsi : $\frac{4}{15}$ étant irréductible, il en est de même de $\left(\frac{4}{15}\right)^2 = \frac{16}{225}$.

272. Théorème. — ***Pour qu'une fraction irréductible soit la puissance $n^{ième}$ d'une fraction, il faut et il suffit que ses termes soient les puissances $n^{ièmes}$ de deux entiers naturels.***

Pour que $\frac{p}{q}$ soit la puissance $n^{ième}$ de la fraction $\frac{c}{d}$ égale à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$, il faut et il suffit que :

$$\frac{p}{q} = \frac{a^n}{b^n} \iff p = ka^n \quad ; \quad q = kb^n$$

La fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible :

$$\frac{p}{q} = \frac{a^n}{b^n} \iff p = a^n \quad ; \quad q = b^n.$$

En particulier :

Pour qu'une fraction irréductible soit le carré d'une fraction, il faut et il suffit que ses termes soient des carrés parfaits.

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \iff p = a^2 \quad ; \quad q = b^2 \quad a \text{ et } b \text{ premiers entre eux.}$$

273. Corollaire. — ***Lorsqu'un entier naturel n'est pas un carré parfait, il n'est pas non plus le carré d'une fraction.***

En effet le carré de la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible $\frac{a^2}{b^2}$ (n° 271) et ne peut être égal à un entier n.

Ainsi, les nombres 2; 3; 5... qui ne sont pas carrés d'un entier ne sont pas carrés d'une fraction. Il n'existe donc pas de rationnel dont le carré soit égal à 2, à 3 ou à 5.

EXERCICES

363. Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre qui s'écrit $\overline{5x18y2}$ dans le système décimal soit divisible par 99.

364. 1° Chercher si le nombre 517 est premier.

2° Résoudre dans N l'équation : $x^2 - y^2 = 517$.

365. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle le nombre des permutations de n objets est divisible par 10, 100, 1 000 ou 1 000 000 ?

366. 1° Soient x et y deux entiers naturels; donner les formules exprimant les solutions de l'équation $13x - 5y = 0$.

2° En déduire les solutions de l'équation : $13x - 5y = 1$. (Remarquer que $26 = 25 + 1$).

367. 1° n étant un entier naturel, montrer que les nombres $n + 1$ et $n(2n + 1)$ sont premiers entre eux.

2° Trouver une fraction égale à $\dfrac{n+1}{n(2n+1)}$ dont les deux termes aient pour somme 183 et admettent 3 pour P.G.C.D.

368. Quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles la fraction $\dfrac{3n+24}{n+4}$ est un entier naturel ?

369. Soit n un entier décomposé en facteurs premiers sous la forme : $n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots s^{\sigma}$ ou $a, b, c \dots s$ sont deux à deux distincts.

1° Démontrer que le nombre des diviseurs de n est :

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots(\sigma+1).$$

2° On suppose que le nombre des diviseurs de n est 9, y compris lui-même et l'unité. Montrer que n est de la forme : $n = a^8$ ou $n = a^2b^2$ avec $a \neq b$.

3° Déterminer n sachant qu'en outre le reste de n par 39 est 1 et le quotient est un nombre premier.

370. On considère l'identité : $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

1° En donnant à x les valeurs successives : 1; 2; 3; ...n, démontrer que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2° En déduire que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6 puis donner une démonstration directe de cette propriété.

371. 1° Pour quelles valeurs de l'entier n la fraction : $\dfrac{n^2 - 7n + 15}{n-3}$ est-elle irréductible ?

2° Peut-elle être égale à un nombre entier ?

372. Démontrer que pour tout entier n, l'entier $n^2(n^2-1)$ est divisible par 12.

373. 1° Soient deux fractions irréductibles $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ dont la somme est un entier. Montrer que le nombre b divise le produit ad et que le nombre d divise le produit bc.

2° En déduire que le nombre b divise le nombre d et que le nombre d divise le nombre b. Que peut-on dire de b et d ?

374. 1° Déterminer tous les diviseurs de 140.

2° Déterminer tous les couples d'entiers x et y vérifiant l'équation :

$$xy - 2x - 2y = 136 \qquad (1)$$

On écrira l'équation (1) sous la forme : $(x-a)(y-b) = n$; a, b, n ayant des valeurs numériques que l'on précisera.

375. 1° Construire le graphe de la fonction : $y = \dfrac{x^2 - 2ax}{a - x}$ où $a > 0$ est donné.

2° On suppose $a = 3$. Trouver les points du graphe précédent dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

376. Déterminer les points du graphe C de l'équation : $xy - 4y - 12 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

377. Démontrer que le nombre : $n(2n+1)(3n+1)(4n+1)(6n+1)$, où n est un entier naturel est divisible par 30.

378. 1° Trouver tous les diviseurs de $n = 200$ (y compris 1 et n) et les classer par ordre de grandeur croissante. Calculer le produit P de ces diviseurs et montrer que $n^N = P^2$ où N désigne le nombre des diviseurs de n.

2° Calculer N et P lorsque $n = 2^\alpha \times 5^\beta$.

3° Trouver n, de la forme $2^\alpha \times 5^\beta$ sachant que $P = 20^{42}$.

379. Reconnaître si 401 est un nombre premier. Résoudre en nombres entiers positifs l'équation
$$x^2 - y^2 = 401.$$

380. a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux, la fraction $\frac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$ est-elle irréductible ?

381. 1° La fraction $\frac{a + 17}{a - 4}$ peut-elle se réduire à un nombre entier ?

2° Trouver une fraction égale à $\frac{105}{375}$, sachant que ses termes ont pour P.G.C.D. 31.

382. Une fraction est égale à $\frac{117}{260}$. Trouver ses termes, sachant que leur P.G.C.D. est 36. Quel est alors leur P.P.C.M. ?

383. Trouver tous les entiers naturels diviseurs du nombre 108.

Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que leur plus grand commun diviseur d et leur plus petit commun multiple m satisfassent à : $m - 3d = 108$, $10 < d < 15$.

384. Si l'on divise 644 et 1 095 par un même nombre, on obtient respectivement 15 et 22 pour restes. Quel est ce nombre ?

385. 1° Déterminer les diviseurs communs de 4 512 et 4 128.

2° Trouver un nombre entier d tel que, si l'on divise par d les nombres 4 525 et 4 147, les restes obtenus soient respectivement 13 et 19. Préciser le nombre des solutions.

386. Trouver une fraction équivalente à $\frac{8}{15}$ dont la somme des termes soit 575.

387. Mettre sous forme canonique et sous forme de produit le trinôme $x^2 + 4x - 5$.

Montrer que, si x est impair, la valeur numérique de ce trinôme est un multiple de 8. Calculer les valeurs entières de x pour lesquelles la fraction $\frac{x^2 + 4x - 5}{x + 2}$ est égale à un nombre entier relatif ou à zéro.

388. On considère le nombre $E = n^4 + n^2 + 1$, n étant un entier positif et non nul.

1° Décomposer E en produit de deux facteurs du second degré et démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.

2° Le nombre E peut-il être premier ?

389. On considère la fraction $F = \frac{126}{231}$.

1° Trouver l'expression générale des fractions égales à F.

2° Trouver les fractions égales à F dont la somme des termes soit un diviseur de 204, y compris 204 lui-même.

3° Trouver une fraction égale à F dont les deux termes aient 594 pour plus petit commun multiple.

390. Montrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux. Montrer que, si a et b sont deux nombres entiers premiers entre eux, il en est de même pour les couples de nombres a

et $(a+b)$, b et $(a+b)$, ab et $(a+b)$. En déduire que la fraction $\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$ est irréductible.

391. Dans cet exercice, n est un *nombre premier.*

1° C_n^p désignant le nombre des combinaisons de n éléments distincts pris p à p, montrer que, si p est différent de 0 et de n, C_n^p est divisible par n.

2° Montrer que, si a est entier, $(a+1)^n - a^n - 1$ est divisible par n.

3° Montrer, en raisonnant par récurrence sur b, que, si b est entier, $b^n - b$ est divisible par n.

N. B. — On rappelle la formule :

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + C_n^p x^{n-p}y^p + \dots + y^n.$$

392. Soit n un nombre entier donné. On désigne par S la suite d'entiers naturels $(1, 2, 3, \dots, n-1, n)$. Soit a un nombre premier inférieur ou égal à n.

1° Déterminer en fonction de n et a, le nombre q_1 des termes de S qui sont des multiples de a. Comment obtient-on à partir de q_1 et de a le nombre q_2 des termes de S qui sont multiples de a^2 ?

2° D'une façon générale, q_k étant le nombre des termes de S qui sont multiples de a^k, déterminer, en fonction de q_k et de a, le nombre q_{k+1} des termes de S qui sont les multiples de a^{k+1}.

3° On considère le produit $1.2.3 \dots (n-1).n = n!$ (factorielle n).

Soit a un des facteurs premiers figurant dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers. Déterminer l'exposant de a dans cette décomposition, en fonction de $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_N$.
(N est le plus grand entier vérifiant $a^N \leqslant n$.)

4° *Application :* Décomposer 50! (factorielle 50) en facteurs premiers.

393. On considère la fraction $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$, où n est un entier naturel supérieur à 1.

Montrer que les diviseurs communs aux deux termes de cette fraction sont les diviseurs communs à n^2-1 et 2, et réciproquement.

En déduire que :

1° Si n est pair, la fraction est irréductible;

2° Si n est impair, le P.G.C.D. des deux termes est égal à 2.

394. 1° Trouver une fraction inférieure à l'unité, sachant que le plus grand commun diviseur de ses termes est 12 et leur produit 5 040.

2° Déterminer une fraction, égale à la plus grande des fractions trouvées précédemment, dont la somme des termes soit 264.

395. Trouver la fraction $\frac{a}{b}$, égale à la fraction $\frac{156}{455}$, telle que le P.G.C.D. de a et b soit 5.

Trouver le P.P.C.M. de a et b.

396. Pour quelles valeurs de l'entier n la fraction $\frac{2n-5}{n+2}$ est-elle réductible ? Peut-elle être égale à un entier ?

397. Soient a et b deux entiers positifs vérifiant $(a+4)(b+5) = 1962$.
Calculer les différents couples de valeurs de a et b ; trouver la plus petite valeur prise par la somme $a+b$.

398. Le nombre a étant un entier donné, existe-t-il, dans chacun des trois cas suivants :

$$a = 37, \qquad a = 65, \qquad a = 130,$$

un nombre entier x tel que $a + x^2$ soit le carré d'un nombre entier ?

On donnera les valeurs possibles de x.

399. On considère l'équation algébrique: $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, où les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 sont des nombres entiers.

Montrer que toute racine fractionnaire $x = \frac{p}{q}$ (p et q entiers) de cette équation est nécessairement un nombre entier.

400. Une fraction est égale à $\frac{143}{220}$. Trouver ses termes, sachant que leur plus grand commun diviseur est 25; quel est, dans ce cas, leur plus petit commun multiple ?

401. Exposer une méthode permettant de trouver tous les diviseurs communs à deux nombres entiers. *Application :* Déterminer tous les nombres premiers divisant à la fois 364 et 476.

402. 1° Démontrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

2° a et b désignant deux nombres entiers premiers entre eux, démontrer qu'il en est de même des couples de nombres suivants :

$$(a + b) \text{ et } a\,; \quad (a + b) \text{ et } b\,; \quad (a + b) \text{ et } ab.$$

3° Déduire de ce qui précède que la fraction $\frac{2n + 3}{n^2 + 3n + 2}$, dans laquelle n désigne un nombre entier quelconque, a ses deux termes premiers entre eux.

403. S'il y a q multiples de k parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$, combien peut-il y avoir de multiples de k parmi les nombres $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$? Prenant pour k les puissances des nombres premiers, montrer que: $\frac{(n + 1)(n + 2)\ldots(2n)}{1.2.3.\ldots n}$ est toujours un entier.

404. On considère la fraction $F = \frac{189}{273}$.

1° Quelle est l'expression générale des fractions égales à F ?

2° Déterminer les fractions égales à F dont la somme des termes soit un diviseur de 770, y compris 770 lui-même.

3° Déterminer une fraction égale à F dont les deux termes aient pour plus petit commun multiple 1287.

405. 1° Démontrer que l'égalité $a^2 = db^2$, où a, b, d sont des entiers positifs et où a et b sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$ (on montrera que b divise a). En déduire que, si d n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à $\sqrt{d}$.

2° On désigne par A ($\sqrt{d}$) l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$, où m et n sont des entiers relatifs quelconques et où l'entier d n'est pas un carré parfait. Déterminer l'intersection des deux ensembles A ($\sqrt{2}$) et A ($\sqrt{3}$). (On pourra commencer par démontrer que toute égalité de la forme $m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0$, où m, n, p sont des entiers relatifs, entraîne $m = n = p = 0$.)

406. On donne quatre nombres entiers a, b, c, d tels que : $a \geqslant 0$; $b \geqslant 1$; $c \geqslant 0$; $d \geqslant 1$ et que $bc - ad = 1$. On désigne par x un nombre réel tel que $\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$.

1° On suppose que x n'est égal à aucune fraction. Montrer qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que :

$$\frac{a + cm}{b + dm} < x < \frac{a + c\,(m + 1)}{b + d\,(m + 1)}$$

Posant $a' = a + cm,\quad b' = b + dm,\quad c' = a + c\,(m + 1),\quad d' = b + d\,(m + 1),$

montrer de même qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que: $\dfrac{c' + (p + 1)\,a'}{d' + (p + 1)\,b'} < x < \dfrac{c' + pa'}{d' + pb'}$

3° On pose $a_1 = c' + (p + 1)\,a',\quad b_1 = d' + (p + 1)\,b',\quad c_1 = c' + pa',\quad d_1 = d' + pb'.$

Montrer qu'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a_1}{b_1} < x < \dfrac{c_1}{d_1} < \dfrac{c}{d}$. Calculer la quantité $b_1c_1 - a_1d_1$ et montrer que les fractions $\dfrac{a}{b}, \dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{c_1}{d_1}, \dfrac{c}{d}$ sont irréductibles.

4° Déduire de ce qui précède que, si le nombre x n'est égal à aucune fraction, il existe une infinité de fractions irréductibles $\dfrac{p}{q}$ telle que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{2q^2}$.

(On pourra poser $b = d = 1$, $a = n$, $c = n + 1$, en désignant par n le plus grand entier inférieur à x, et montrer qu'on peut répéter autant de fois que l'on veut la construction précédente.)

Montrer que, si z est un nombre fractionnaire, il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\dfrac{p}{q}$ satisfaisant à $\left|y - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$ et $y \neq \dfrac{p}{q}$.

407. Écrire les développements de $(x + 1)^7$ et $(x + 1)^{11}$. Quel est, dans chaque cas, le P.G.C.D. des coefficients autres que les coefficients extrêmes ? Établir cette propriété par un raisonnement, en prenant le développement de $(x + 1)^{11}$ et ne montrant d'abord que $p!$ et 11 sont premiers entre eux, quel que soit p compris entre 1 et 11 $(1 < p < 11)$.

Déduire du développement de $(x + 1)^7$, avec x entier $(x \geqslant 0)$, que :

$$(x + 2)^7 = x^7 + 2 + \text{mult. } 7,$$
$$(x + 3)^7 = x^7 + 3 + \text{mult. } 7,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et que $n^7 - n =$ mult. 7, quel que soit l'entier n.

Que trouverait-on avec l'exposant 11 ? Généraliser en montrant que quel soit le nombre premier p et l'entier n : $n^p - n =$ mult. p.

NUMÉRATION

274. Définition. — ***On appelle système de numération l'ensemble des conventions permettant d'écrire tout entier naturel.***

Les peuples de l'Antiquité, les civilisations précolombiennes, utilisaient des systèmes de numération, basés sur les lettres de leur alphabet ou sur des phénomènes astronomiques, qui se prêtaient peu à la pratique du calcul. Les systèmes modernes utilisent des caractères appelés *chiffres* dont le nombre a est supérieur à un.

275. Base. — ***On appelle base d'un système de numération le nombre des chiffres qu'il utilise.***

Par convention :

Chaque entier naturel inférieur à la base est représenté par un chiffre :

— Le système à base deux ou **système binaire** utilise les chiffres 0 et 1 qui représentent respectivement les nombres zéro et un.

— Le système à base dix ou **système décimal** utilise les chiffres :

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9$$

qui représentent les entiers naturels : zéro, un deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit et neuf.

— Le système à base douze ou **système duodécimal** utilise les chiffres :

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ \alpha \text{ et } \beta$$

qui représentent les entiers successifs de zéro à onze.

276. Théorème. — ***Si a est un entier supérieur à un, tout entier naturel n peut s'écrire d'une seule façon sous la forme :***

$$n = a^{k-1}r_k + a^{k-2}r_{k-1} + \dots + a^2r_3 + ar_2 + r_1,$$

ou les entiers $r_1, r_2, r_3, \dots r_k$ sont inférieurs à a.

1° Effectuons la division à une unité près de n par a, celle du quotient q_1 obtenu par a, celle du quotient q_2 obtenu par a et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve (si possible) un quotient nul :

$n = aq_1 + r_1 \quad r_1 < a; \quad q_1 = aq_2 + r_2; \quad r_2 < a; \quad q_{i-1} = aq_i + r_i; \quad r_i < a.$

On a : $q_{i-1} \geqslant q_i$. En effet : si $q_i \neq 0 : q_{i-1} > q_i$: car $a > 1$. Si $q_i = 0, q_{i-1} > q_i$

puisque $q_{i-1} \neq 0$. La suite $q_1, q_2, \ldots q_i \ldots$ est strictement décroissante.

On finira par obtenir un quotient, soit q_k, égal à zéro, soit :

$$\begin{array}{lll} n = aq_1 + r_1 & r_1 < a & (1) \\ q_1 = aq_2 + r_2 & r_2 < a & (2) \\ q_2 = aq_3 + r_3 & r_3 < a & (3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ q_{k-2} = aq_{k-1} + r_{k-1} & r_{k-1} < a & (k-1) \\ q_{k-1} = a \times 0 + r_k & r_k < a & (k) \end{array}$$

Multiplions les deux membres de la relation (2) par a, ceux de la relation (3) par a^2, et ainsi de suite. On obtient les k relations suivantes :

$$\begin{array}{l} n = aq_1 + r_1 \\ aq_1 = a^2q_2 + ar^2 \\ a^2q_2 = a^3q_3 + a^2r_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{k-2}\, q_{k-2} = a^{k-1}\, q_{k-1} + a^{k-2}\, r_{k-1} \\ a^{k-1}\, q_{k-1} = a_{k-1}\, r_k. \end{array}$$

En ajoutant membre à membre, puis en supprimant les termes communs aux deux membres :

$$n = r_1 + ar_2 + a^2r_3 \ldots + a^{k-2}\, r_{k-1} + a^{k-1}\, r_k, \qquad \text{avec } r_i < a.$$

2° Supposons qu'on ait à la fois :

$$n = r_1 + ar_2 + a^2r_3 \ldots + a^{k-1}\, r_k = s_1 + as_2 + a^2s_3 \ldots + a^{p-1}s_p. \quad r_i < a;\ s_j < a.$$

r_1 et s_1 sont les restes de la division de n par a; donc $r_1 = s_1$.

r_2 et s_2 sont les restes de la division $\dfrac{n - r_1}{a} = \dfrac{n - s_1}{a}$ par a; donc $r_2 = s_2$ et ainsi de suite.

Supposons $k < p$, par exemple. On démontrera de même que :

$r_1 = s_1$; $r_2 = s_2$; $r_3 = s_3 \ldots$ $r_k = s_k$. ce qui entraîne : $a^{k+1}s_{k+1} + a^{k+2}\, s_{k+2} \ldots + a^{p-1}\, s_p = 0$, donc $s_{k+1} = s_{k+2} = \ldots = s_p = 0$.

La décomposition de n en une somme de la forme $\sum\limits_1^k a^{p-1}r_p$ est donc unique.

277. Convention d'écriture. — Les nombres $r_1, r_2 \ldots r_k$ étant inférieurs à la base a sont symbolisés par un des chiffres du système de numération de base a.

On convient d'écrire le nombre $n = \sum\limits_1^k a^{p-1}\, r_p$ sous la forme suivante :

$$n = \overline{r_k r_{k-1} r_{k-2} \ldots r_2 r_1} = \sum_1^k a^{p-1} r_p.$$

On pourra supprimer le trait supérieur lorsqu'il n'y a pas confusion avec le produit $r_k r_{k-1} \ldots r_1$. Ainsi :

$a =$ deux : $\overline{10111} = a^4 + a^2 + a + 1.$

$a =$ douze : $\overline{230\,\alpha} = 2\,a^3 + 3a^2 + \alpha.$

En particulier, dans tout système de numération à base a :

$$\overline{10} = a; \quad \overline{100} = a^2, \quad \overline{1\,000} = a^3 \ldots$$

On retrouve ainsi les conventions connues de la numération décimale.

278. Numération décimale. — 1° Numération écrite. — Dix unités d'un ordre quelconque représentent une unité de l'ordre immédiatement supérieur : dix unités simples représentent une dizaine, dix dizaines représentent une centaine etc... L'ensemble de

trois ordres successifs à partir des unités simples se nomme classe : classe des unités, classe des mille, classe des millions etc... Les conventions de la numération écrite sont les suivantes :

Tout chiffre écrit à la gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur. Le dernier chiffre à droite représente les unités simples.

On laisse un intervalle entre les groupes de chiffres représentant des classes différentes : $23\,437\,025 = (2 \times 10^7) + (3 \times 10^6) + (4 \times 10^5) + (3 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 + 10) + 5.$ Les mêmes conventions s'appliquent à la base a en remplaçant dix par a.

NUMÉRATION ORALE. — On lit le nombre en commençant par la gauche en faisant suivre chaque chiffre du nom de l'ordre qu'il représente :

843 se lit huit centaines, quatre dizaines trois unités ou huit cent quarante trois. Lorsque le nombre comporte plusieurs classes on lit séparément chaque classe en la faisant suivre de son nom :

20 241 se lit : vingt mille deux cent quarante et un.

279. Problème. — *Un nombre étant donné le système à base a, l'écrire dans le système décimal.*

EXEMPLE I. — *Écrire dans le système décimal le nombre qui s'écrit* $\overline{10\,341}$ *dans le système à base* 8.

D'après le n° 276 : $n = (1 \times 8^4) + (0 \times 8^3) + (3 \times 8^2) + (4 \times 8) + 1.$
$= 4\,096 + 192 + 32 + 1 = 4\,321.$

EXEMPLE II. — *Écrire dans le système décimal le nombre n qui s'écrit* $\overline{\alpha\,23\,\beta}$ *dans le système à base* 12 :

$$n = (\alpha \times 12^3) + (2 \times 12^2) + (3 \times 12) + \beta.$$
$$= (10 \times 12^3) + (2 \times 12^2) + (3 \times 12) + 11.$$
$$= 17\,280 + 288 + 36 + 11 = 17\,615.$$

280. Problème. — *Un nombre étant donné dans le système décimal, l'écrire dans le système à base a.*

EXEMPLE I. — *Écrire le nombre* 35 *du système décimal, dans le système binaire.*

Il suffit de chercher les restes successifs r_1, r_2... r_k comme au n° 276. On obtient :
$35 = (2 \times 17) + \underline{1}$; $17 = (2 \times 8) + \underline{1}$; $8 = (2 \times 4) + \underline{0}$; $4 = (2 \times 2) + \underline{0}$
$2 = (2 \times 1) + \underline{0}$; $1 = (0 \times 2) + \underline{1}$ et le nombre n s'écrit : $n = \overline{100011}$.

EXEMPLE II. — *Écrire le nombre* 43 069 *du système décimal dans le système à base* 11.

Dans ce système le nombre dix s'écrit α. On obtient :

$$43\,069 = (11 \times 3\,915) + \underline{4}; \quad 3\,915 = (11 \times 355) + \underline{10};$$
$$355 = (11 \times 32) + \underline{3}; \quad 32 = (11 \times 2) + \underline{10}; \quad 2 = (11 \times 0) + \underline{2}$$

et le nombre s'écrit :

$$n = \overline{2\quad 3\quad 4}$$

281. Problème. — *Un nombre étant écrit dans le système à base a, l'écrire dans le système à base b.*

EXEMPLE. — *Écrire le nombre* 20 341 *du système à base* 8 *dans le système binaire.*

On passe par l'intermédiaire du système décimal. Ce nombre s'écrit 4 321 dans le système décimal. En opérant comme au n° 276, on trouve dans le système binaire :

$$n = \overline{1\,000\,011\,100\,001}.$$

NOMBRES DÉCIMAUX

282. Rationnel décimal. — ***On appelle rationnel décimal tout rationnel dont le dénominateur est une puissance de* 10.**

$$\frac{-3}{10} \; ; \; \frac{251}{100} \; ; \; \frac{-4321}{10000} \text{ sont des rationnels décimaux.}$$

Nous réserverons le nom de *fraction décimale* à tout rationnel décimal positif ou nul.

283. Unités décimales. — ***On appelle unité décimale toute fraction décimale dont le numérateur est égal à l'unité.***

La suite des unités décimales s'écrit :

$\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1\,000}; \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}; \frac{1}{10^n};$ et se lit : un dixième, un centième etc... où chaque terme de la suite est le produit du précédent par $\frac{1}{10}$. La convention de la numération orale s'applique aux unités décimales : dix unités d'un ordre quelconque valent une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

284. Nombre décimal. — La fraction décimale $\frac{23\,258}{1000}$ est égale à la somme suivante :

$$\frac{23\,258}{1\,000} = \frac{23\,000}{1\,000} + \frac{200}{1\,000} + \frac{50}{1\,000} + \frac{8}{1\,000}.$$

$$= 23 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1\,000}.$$

$$= 23 \text{ unités} + 2 \text{ dixièmes} + 5 \text{ centièmes} + 8 \text{ millièmes.}$$

Adoptons la convention de la numération décimale en séparant les ordres des unités entières et ceux des unités décimales par une virgule :

$$\frac{23\,258}{1\,000} = 23{,}258$$

La fraction décimale $\frac{23\,258}{1\,000}$ s'écrit ainsi sous la forme du nombre décimal 23,258 qui se lit 23 unités, 258 millièmes.

De même le rationnel décimal $\frac{-4\,302}{100}$ s'écrit $-$ 43,02 et se lit $-$ 43 unités, 2 centièmes.

Réciproquement, tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de rationnel décimal.

Ainsi : $$12{,}048 \doteq \frac{12\,048.}{1000}$$

285. Théorème. — ***Pour qu'une fraction irréductible soit égale à une fraction décimale, il faut et il suffit que dans la décomposition de son dénominateur en facteurs premiers ne figurent pas d'autres facteurs que* 2 *et* 5.**

1° *Condition nécessaire :* soit $\frac{a}{b} = \frac{A}{10^n}$; $\frac{a}{b}$ irréductible

D'après le n° 268 le dénominateur b est un diviseur de $10^n = 2^n \times 5^n$. Donc (n° 260) dans la décomposition de l'entier b en facteurs premiers ne figurent que les facteurs 2 et 5 avec des exposants au plus égaux à n.

2° *Condition suffisante* : soit la fraction $\frac{a}{2^p \times 5^q}$.

Si $p \geqslant q$: $\frac{a}{2^q \times 5^q} = \frac{a \times 5^{p-q}}{2^p \times 5^p} = \frac{A}{10^p}$, fraction décimale.

Si $p \leqslant q$: $\frac{a}{2^p \times 5^q} = \frac{a \times 2^{q-p}}{2^q \times 5^q} = \frac{B}{10^q}$, fraction décimale.

286. Corollaire I. — *Pour qu'un rationnel irréductible soit égal à un nombre décimal, il faut et il suffit que dans la décomposition de son dénominateur ne figurent pas d'autres facteurs que 2 et 5.*

Soit le rationnel $r = \frac{a}{b}$; $a \in \mathbf{Z}$; $b \in \mathbf{N}^*$; $|a|$ et b premiers entre eux. Pour que r soit égal à un nombre décimal, il faut et il suffit que la fraction irréductible $\frac{|a|}{b}$ soit égale à une fraction décimale, donc que dans la décomposition de b ne figurent pas d'autres facteurs que 2 et 5.

287. Corollaire II. — *L'inverse d'une fraction décimale n'est pas en général une fraction décimale.*

L'inverse de $\frac{a}{10^n}$ est $\frac{10^n}{a} = \frac{2^n \times 5^n}{a}$ (avec $a \neq 0$).

Cette fraction ne peut être simplifiée que par des puissances de 2 ou 5. Donc si, dans la décomposition de $a > 1$ figurent d'autres facteurs que 2 et 5, l'inverse de $\frac{a}{10^n}$ ne peut être une fraction décimale. Il en résulte que l'inverse d'un nombre décimal n'est pas, en général, un nombre décimal.

288. Opérations sur les nombres décimaux. — Soit D l'ensemble des nombres décimaux. L'ensemble Z des entiers relatifs est inclus dans D car $10^0 = 1$; l'ensemble D est inclus dans Q : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$.

L'addition est une loi interne dans D : $\frac{a}{10^p} + \frac{b}{10^{p+q}} = \frac{10^q a + b}{10^{p+q}}$ et l'addition confère à l'ensemble D une structure de groupe abélien $\left(\text{commutativité; associativité; élément neutre } \frac{0}{10^n}\text{; le symétrique de } \frac{a}{10^n} \text{ est } \frac{-a}{10^n}\right)$.

La multiplication est une loi interne dans D :

$$\frac{a}{10^p} \times \frac{b}{10^q} = \frac{ab}{10^{p+q}}.$$

La multiplication est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et possède un élément neutre $\frac{10^n}{10^n} = 1$. Par contre, en général, un nombre décimal n'a pas d'inverse (n° 287). Donc (n° 35) :

Pour les lois d'addition et de multiplication, l'ensemble des nombres décimaux relatifs a une structure d'anneau commutatif et unitaire.

289. Valeurs approchées à 10^{-n} près d'un nombre réel. — Soit le réel α, les entiers relatifs successifs a et $b = a + 1$ tels que : $a \leqslant \alpha < b$ se nomment respectivement valeurs approchées à une unité près par défaut et par excès du réel α. Soient x_n et $x_n + 1$ les valeurs approchées à une unité près par défaut et par excès du réel $10^n \alpha$:

$$x_n \leqslant 10^n \alpha < x_n + 1 \implies \frac{x_n}{10^n} \leqslant \alpha < \frac{x_n + 1}{10^n}.$$

Les rationnels décimaux $a_n = \dfrac{x_n}{10^n}$ et $b_n = \dfrac{x_n + 1}{10^n}$ sont tels que :

$$a_n \leqslant \alpha < b_n \quad ; \quad b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Les rationnels décimaux $a_n = x_n 10^{-n}$ et $b_n = (x_n + 1)\, 10^{-n}$ tels que $a_n \leqslant \alpha < b_n$ se nomment respectivement valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-n} près du réel α.

EXEMPLES. — 3,141 et 3,142 sont les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut et par excès du nombre π car : $3{,}141 < \pi < 3{,}142$. De même 1,41 et 1,42 sont les valeurs approchées par défaut et par excès à 10^{-2} près de $\sqrt{2}$ car : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

290. Suites des valeurs approchées d'un réel. — Soient $a_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{10^{n+1}}$ et $b^{n+1} = \dfrac{x_{n+1}+1}{10_{n+1}}$ les valeurs approchées à $10^{-(n+1)}$ près par défaut et par excès du réel α. Les relations :

$$10\, x_n \leqslant 10^{n+1} \alpha < 10\,(x_n + 1) \text{ (n° 289) et } x_{n+1} \leqslant 10^{n+1} \alpha < x_{n+1} + 1$$

entraînent les inégalités :

$$10\, x_n < x_{n+1} + 1 \implies 10\, x_n \leqslant x_{n+1}$$

et

$$x_{n+1} < 10\,(x_n + 1) \implies x_{n+1} \leqslant 10\,(x_n + 1).$$

On obtient ainsi : $10\, x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant 10^{n+1} \alpha < x_{n+1} + 1 \leqslant 10\,(x_n + 1)$.
Soit, en divisant par 10^{n+1} :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

On ne peut avoir à la fois : $a_n = a_{n+1}$ et $b_n = b_{n+1}$ car $b_n - a_n > b_{n+1} - a_{n+1}$.

Il en résulte que la suite $\{a_n\}$ des valeurs approchées par défaut et la suite $\{b_n\}$ des valeurs approchées par excès (à 10^{-n} près) du réel α sont telles que :

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha < \ldots \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b.$$

La suite $\{a_n\}$ détermine la suite $\{b_n\}$ et la différence $b_n - a_n$ peut devenir inférieure à tout nombre positif ε donné.

En effet : $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ et $10^n > \dfrac{1}{\varepsilon} \implies b_n - a_n < \varepsilon$.

Pour que le réel α soit un nombre décimal, il faut et il suffit qu'il existe un terme a_p tel que $a_p = \alpha$. Il en résulte que :

Si α n'est pas un nombre décimal, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ ***sont illimitées :*** $\forall p \in \mathrm{N} : a_p < \alpha < b_p$. On peut donc entre a_p et α puis entre α et b_p intercaler des rationnels $a_p + \varepsilon$ et $b_p - \varepsilon$ et :

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon \implies a_p + \frac{1}{10^n} < \alpha < b_p - \frac{1}{10^n}, \text{ ce qui entraîne :}$$

$$a_n \geqslant a_p + \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n \leqslant b_p - \frac{1}{10^n}.$$

Il n'existe donc pas d'élément maximal dans la suite $\{a_n\}$ ni d'élément minimal dans la suite $\{b_n\}$.

REMARQUE. — Les valeurs décimales approchées successives par défaut et par excès d'un réel permettent d'encadrer ce réel entre deux nombres décimaux dont la différence est aussi petite qu'on le désire. Ainsi :

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots \implies 3{,}141\,592 < \pi < 3{,}141\,593.$$

291. Valeurs approchées d'un rationnel. — Soit le rationnel $r = \frac{p}{q}$ ou $q \in N^*$; $p \in Z$.

Les valeurs approchées à 10^{-n} près par défaut et par excès de r sont les nombres décimaux :

$$a_n = \frac{x_n}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x_n + 1}{10^n} \quad \text{tels que :}$$

$$\frac{x_n}{10^n} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{x_n + 1}{10^n} \implies qx_n \leqslant 10^n p < q(x_n + 1)$$

L'entier relatif x_n est donc le quotient de $10^n p$ par q (nº 200).

Limitons-nous aux rationnels positifs car, par exemple :

$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34 \implies -0{,}34 < -\frac{1}{3} < -0{,}33.$$

On obtient la règle suivante :

Si x_n est le quotient entier de $10^n p$ par q le nombre décimal $10^{-n}x_n$ est le quotient approché à 10^{-n} près par défaut du rationnel positif $\frac{p}{q}$.

On effectue donc la division euclidienne de $10^n p$ par q et on sépare par une virgule les n derniers chiffres à droite du quotient obtenu :

EXEMPLES. — 1º *Valeurs approchées à 10^{-6} près par défaut et par excès de $\frac{22}{7}$.*

Le quotient entier de 22×10^6 par 7 est 3 142 857

et $3{,}142857 < \frac{22}{7} < 3{,}142858$.

```
22 000 000 | 7
 1 0       |---------
   30      | 3 142 857
    20     |
     60
      40
       50
        1
```

On obtient ce même résultat en poursuivant la division de 22 par 7 jusqu'à la 6ᵉ décimale.

2º *Valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut et par excès de $\frac{2{,}057}{0{,}15}$.*

Ce quotient exact de nombres décimaux est égal au rationnel $\frac{2057}{150}$. Le quotient entier

de 2057×10^4 par 150 est le même que celui de 2057×10^3 par 15 soit 137 133. Donc :

$$13{,}7133 < \frac{2{,}057}{0{,}15} < 13{,}7134.$$

2 057 000	15
55	137 133
107	
020	
50	
50	
5	

292. Nombres décimaux périodiques. — Si le dénominateur q du rationnel irréductible $\frac{p}{q}$ contient, dans sa décomposition en facteurs premiers, d'autres facteurs que 2 et 5, il ne peut être égal à un nombre décimal (n° 286). Dans la division euclidienne de $10^n p$ par q on trouve au plus $(q - 1)$ restes différents. Si n est suffisamment grand on finit par trouver un reste r déjà obtenu et les chiffres suivants du quotient se reproduisent périodiquement. Ainsi :

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ 142857\ 142857\ldots$$

$$\frac{2{,}057}{0{,}15} = 13{,}713\,333\ldots$$

On dit que les valeurs approchées d'un nombre rationnel sont des *nombres décimaux périodiques.*

Dans le premier exemple on obtient un nombre *périodique simple* car la période 142857 commence immédiatement après la virgule. Dans le second exemple, on obtient un nombre décimal *périodique mixte* car la période 3 ne commence pas immédiatement après la virgule.

293. Valeurs approchées de la racine carrée d'un rationnel. — Si le rationnel positif A n'est pas un carré parfait, il n'est pas le carré d'un rationnel (n° 92). Sa racine carrée $\sqrt{A}$ n'est pas un nombre décimal. Soient $\frac{x_n}{10^n}$ et $\frac{x_n+1}{10^n}$ les valeurs approchées à 10^{-n} près par défaut et par excès de $\sqrt{A}$:

$$\frac{x_n}{10^n} \leqslant \sqrt{A} < \frac{x_n+1}{10^n} \iff \frac{x_n^2}{10^{2n}} \leqslant A < \frac{(x_n+1)^2}{10^{2n}}.$$

Soit : $x_n^2 \leqslant A \times 10^{2n} < (x_n + 1)^2$.

L'entier naturel x_n est le plus grand entier dont le carré soit inférieur ou égal à $A \times 10^{2n}$. C'est la racine carrée entière de $A \times 10^{2n}$.

La valeur approchée $\frac{x_n}{10^n}$ *à* 10^{-n} *près par défaut de la racine carrée d'un rationnel positif* A *s'obtient en calculant la racine carrée entière de* $A \times 10^{2n}$ *puis en multipliant l'entier obtenu par* 10^{-n}.

Exemple. — La racine carrée entière de 3×10^6 est 1 732. Les valeurs approchées $\frac{1}{1000}$ près par défaut et par excès de $\sqrt{3}$ sont 1,732 et 1,733.

EXERCICES

408. Un nombre de quatre chiffres est un carré parfait. Le chiffre des unités est égal au chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est égal au chiffre des unités de mille.

1° Montrer que ce nombre est divisible par 121. Trouver ce nombre.

2° Écrire ce nombre dans le système à base 8.

409. 1° Montrer que pour tout entier n le nombre $(n^6 - n^2)$ est divisible par 60.

2° Montrer que n^2 et n^6, écrits dans le système décimal, se terminent par le même chiffre.

410. La valeur approchée par défaut à $\frac{1}{100}$ près de la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est 6,83. Trouver cette fraction sachant que son quotient exact par la fraction $\frac{7}{12}$ est un nombre entier.

411. Soit $N = \overline{cdu}$ un nombre entier de 3 chiffres écrit dans le système décimal. Trouver N sachant que les trois conditions suivantes sont réalisées :

1° $2c + d + u = \overline{ud} - 4$.

2° $\overline{cdu} = \overline{cud} + 9$.

3° La différence : $\overline{cdu} - \overline{udc}$ est divisible par 5.

412. Trouver un nombre N qui dans le système de numération à base 4 s'écrit xy, x et y vérifiant la relation : $4x - 5y = 3$ (1).

En déduire :

1° l'ensemble des solutions entières de l'équation (1).

2° l'ensemble des nombres qui, dans le système de numération décimale s'écrivent $\overline{xy}$, x et y vérifiant la relation (1).

413. Combien existe-t-il de nombres de n chiffres dans le système décimal, dans le système binaire, dans le système duodécimal, dans le système de base a ?

414. Combien faut-il de caractères d'imprimerie pour écrire les nombres compris entre $\overline{0}$ et $\overline{100}$:

1° dans le système décimal;

2° dans le système binaire.

3° dans le système duodécimal.

415. Soit le nombre 12 du système décimal.

1° Dans quels systèmes de numération s'écrit-il avec un seul chiffre ?

2° Dans quels systèmes s'écrit-il avec deux chiffres ? avec 3 chiffres? avec 4 chiffres ?

416. 1° Former la table d'addition dans le système à base 6.

2° Effectuer dans le système à base 6 les opérations suivantes :

$$\overline{2504} + \overline{342} + \overline{551} \qquad \overline{543} - \overline{454}$$

417. 1° Former la table de multiplication dans le système à base 11 où α représente le nombre dix.

2° Effectuer dans ce système les opérations suivantes :

$$\overline{872} \times \overline{43}; \quad \overline{56\alpha} \times \overline{37}; \quad \overline{\alpha 3 \alpha 1} \times \overline{3\alpha}$$
$$\overline{843} : \overline{41}; \quad \overline{\alpha 00} : \overline{12}; \quad \overline{\alpha 0 \alpha} : \overline{1\alpha}$$

418. 1° Montrer que si le nombre n du système décimal s'écrit $\overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ dans le système de base inconnue x on a.: $n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_p x^p$.

2° Trouver x sachant que le nombre 57 du système décimal s'écrit $\overline{321}$ dans le système à base x.

3° Même question sachant que le nombre 21 178 s'écrit $\overline{1030\alpha}$ où α vaut dix.

419. Trouver la base du système de numération dans lequel :

$$\overline{433} + \overline{241} = \overline{1224}.$$

420. Trouver la base du système de numération dans lequel dix s'écrit α et

$$\overline{\alpha 1} \times \overline{37} = \overline{3\,377}.$$

421. Établir le caractère de divisibilité par 3 et par 4 dans le système à base 12.

422. Établir le caractère de divisibilité par α dans le système à base 11 (α représente dix).

423. Établir le caractère de divisibilité par 8 dans le système à base 7.

424. Quels sont les nombres du système décimal qui s'écrivent avec 2 chiffres dans le système à base 12 et avec 3 chiffres dans le système à base 5.

425. On considère un nombre N, de 6 chiffres, écrit dans le système décimal : $N = \overline{abc\,abc}$.

1° Montrer que N est le produit du nombre entier $\overline{abc}$ par un nombre entier k. En déduire :
α) que N est divisible par 7, par 11 et par 13; β) que N ne peut être un carré parfait.

2° Déterminer N par les deux conditions simultanées suivantes : α) N est divisible par 5;
β) l'entier $\overline{bc}$ est le double de a. Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

426. 1° Déterminer $n > 3$ pour que la fraction $\frac{n+4}{n-3}$ soit un nombre entier.

2° Déterminer $n > 3$ pour que la fraction $\frac{n+4}{n-3}$ soit 1,24 à $\frac{1}{100}$ près.

427. Un nombre de trois chiffres dans le système décimal est divisible par 45. Déterminer ce nombre, sachant que la différence entre ses deux chiffres de gauche est égale à 5.
(On trouvera plusieurs solutions.)

428. Un nombre s'écrit 506 214 dans le système de numération de base 7; l'écrire dans le système de base 8. (On pourra passer par l'intermédiaire du système décimal.)

429. Définition d'une fraction décimale. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit égale à une fraction décimale. Application aux fractions $\frac{1\,023}{2\,750}$ et $\frac{1\,243}{3\,750}$.

430. Trouver toutes les fractions égales à 2,66 dont le numérateur et le dénominateur ont trois chiffres.

431. Calculer toutes les fractions de numérateur a, de dénominateur 425, dont la valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près par défaut est 3,28. Parmi ces fractions, déterminer celles qui sont irréductibles.

432. Soit N un nombre de trois chiffres, que nous représenterons par $N = \overline{cdu}$.
On demande de déterminer N, sachant que : a) $3c + d + u = \overline{ud} + 9$;
b) $\overline{cdu} = \overline{cud} + 27$; c) les nombres $\overline{cdu}$ et $\overline{udc}$ sont divisibles par 7.

433. Soit la fraction $\frac{n-13}{n-2}$ (n entier supérieur à 2). Pour quelle valeure de n est-elle égale à un nombre entier; est-elle irréductible; sa valeur approché par défaut à 0,1 près est-elle 1,8 ?

434. Soit un nombre N écrit $\overline{abc}$ en système à base treize, a, b, c étant des chiffres quelconques de ce système. Les nombres 10, 11, 12 du système décimal sont représentés par les chiffres α, β, γ dans le système à base 13, les autres chiffres des systèmes à base dix et à base treize coïncidant.

1° A quelle condition $\overline{abc}$ est-il divisible par treize; par le carré de treize ?

2° Montrer que $\overline{abc}$ et $a + b + c$ ont même reste de division par douze. En déduire une condition de divisibilité de $a + b + c$ par douze.

3° Trouver une condition de divisibilité de $\overline{abc}$ par quatorze.

435. 1° Développer $(\alpha + 1)^4$.

2° Le nombre α appartenant à l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 6, en déduire l'écriture de $(\alpha + 1)^4$ dans le système de numération de base α.

436. Trouver les chiffres a et b tels que les nombres de la forme $\overline{1a1bab}$ écrits dans le système à base 10 soient divisibles par 63.

437. 1° c et d désignant des entiers positifs n'ayant qu'un chiffre (système décimal), choisir c et d de façon que $c^2 - d^2 = 24$; on trouvera deux systèmes de solutions.

2° Déterminer un nombre de quatre chiffres (système décimal) de façon qu'il soit divisible par 45 et que la différence des carrés des nombres représentés par le chiffre des centaines et celui des dizaines soit égale à 24; on trouvera quatre solutions.

— Trouver les valeurs approchées à 10^{-n} près par défaut et par excès des nombres suivants (avec $n = 1; 2; 3$) :

438. $\frac{23}{47}$ **439.** $\frac{27{,}05}{1{,}13}$ **440.** $\frac{43{,}19}{2{,}07}$

441. $\frac{27 \times 12}{13 \times 7}$ **442.** $\frac{4}{5} : \frac{8}{13}$ **443.** $\frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}}{\frac{13}{17}}$

444. $\sqrt{7}$ **445.** $\sqrt{13}$ **446.** $\sqrt{19}$

447. $\sqrt{12{,}1}$ **448.** $\sqrt{\frac{5}{7}}$ **449.** $\sqrt{\frac{2{,}4}{3{,}5}}$

LIVRE III. ÉTUDE DES FONCTIONS

13e leçon

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

294. Fonction d'une variable réelle. — Rappelons que :

On définit une fonction réelle f de la variable réelle x, quand à tout élément x d'un sous-ensemble A de R, on fait correspondre au plus un élément y de R.

Une fonction réelle f est donc définie dans R et à valeurs dans R. L'ensemble non vide $A \subseteq R$ des réels x qui ont effectivement un correspondant unique y dans R est le *domaine de définition* de la fonction f, qui est dite définie sur A. On écrit :

$$\forall x \in A \subseteq R, \quad \exists y \text{ (unique)} \in R \quad \text{tel que} \quad x \to y = f(x).$$

EXEMPLES. — 1° Les fonctions réelles $y = x^3 - x$, $y = 3 \cos^2 x - 4 \sin x$ sont définies quel que soit $x \in R$. Ces fonctions sont définies sur R.

2° La fonction réelle : $y = \sqrt{x(1-x)}$ est définie dans R pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Elle est donc définie sur le segment [0, 1]. De même $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est définie sur l'intervalle $[-1, +1[$, tandis que $y = \sqrt{x^3 - 1}$ est définie sur la demi-droite $[+1, +\infty[$.

3° La fonction $y = \sqrt{-1 - x^2}$ n'est pas une fonction réelle dans R.

Les fonctions telles que $y = x^3 - 4x$, $z = \dfrac{2x+3}{x-2}$, $u = x - \sqrt{2x^2+5}$ sont des *fonctions algébriques de x* tandis que la fonction $y = \dfrac{\cos^2 x - \sin x}{1 + \sin x}$ est une *fonction trigonométrique* de x. Une fonction non algébrique est dite *transcendante*.

Une fonction $f(x)$ est dite *paire* si $f(-x) \equiv f(x)$, *impaire* si $f(-x) \equiv -f(x)$, *périodique* de période p si $f(x+p) \equiv f(x)$ donc si $f(x+kp) \equiv f(x)$ quel que soit l'entier relatif k.

EXEMPLES. — 1° $y = x^4 - x^2 + 3$, $y = f(x^2)$, $y = f(\cos x)$ sont des fonctions paires.

2° $y = x^5 - 4x^3 + 2x$, $y = xf(x^2)$, $y = \sin x . f(\cos x)$ sont des fonctions impaires.

3° Les fonctions $y = f(\sin x, \cos x)$, $y = f\left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$ sont périodiques et ont pour période 2π.

La fonction $y = 1 + \cos^2 \pi x$ a pour période $+1$.

295. Croissance d'une fonction. — Lorsque la variable $x \in [a, b]$ passe de la valeur initiale x_1 à la valeur finale x_2, elle subit l'accroissement $\Delta x = x_2 - x_1$. Toute fonction $y = f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ subit alors l'accroissement correspondant : $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$.

Une fonction $y = f(x)$ est dite croissante sur tout intervalle où, quels que soient x_1 et x_2, les accroissements correspondants Δx et Δy sont de même signe. Elle est décroissante sur tout intervalle où ces accroissements sont de signes différents.

On étudie le signe du rapport : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b];\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \left| \begin{array}{l} \textit{positif} \Longrightarrow f(x) \ \textit{croissante sur } [a, b]. \\ \textit{négatif} \Longrightarrow f(x) \ \textit{décroissante sur } [a, b]. \end{array} \right.$$

EXEMPLE. — *La fonction* n $= x^n$ *où* y *est un entier positif est croissante sur l'intervalle* $[0; +\infty[$. En effet :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + x_2^{n-3}x_1^2 \cdots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}$$

quels que soient $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, ce rapport est positif.

Une fonction $f(x)$ qui conserve la même valeur sur un intervalle donné $[a, b]$ est dite *constante* sur cet intervalle :

$$\forall x \in [a, b]: \qquad f(x) = C \Longleftrightarrow \Delta f = 0.$$

La fonction $y = |x + 1| + |x - 1|$ est constante et égale à $+2$ sur le segment $[-1, +1]$.

Une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur un intervalle donné est dite monotone sur cet intervalle.

Étudier la variation d'une fonction f, c'est rechercher les intervalles où la fonction est monotone (voire constante) et le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles. Une fonction $f(x)$ croissante pour $a < x \leqslant b$, décroissante pour $b \leqslant x < c$, admet sur $]a, c[$ le maximum $f(b)$. Si cette fonction est décroissante pour $a < x \leqslant b$, croissante pour $b \leqslant x < c$, elle admet $f(b)$ pour minimum sur $]a, c[$.

296. Théorèmes généraux de variation. — Deux fonctions $y = f(x)$ et $z = g(x)$, monotones sur un intervalle donné $]a, b[$, varient dans le même sens ou en sens contraires suivant que leurs accroissements Δy et Δz correspondant au même Δx sont de même signe ou non. Désignons d'autre part par A et C des constantes :

1° *Les fonctions $y = f(x)$ et $z = f(x) + C$ varient toujours dans le même sens.*

Δy et Δz sont égaux à $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ et sont donc de même signe.

2° *Les fonctions $y = f(x)$ et $z = Af(x)$ varient dans le même sens pour A positif, en sens contraires pour A négatif.*

$\Delta y = \Delta f$ et $\Delta z = A\Delta f$ sont de même signe pour $A > 0$, de signes différents pour $A < 0$.

En particulier $y = f(x)$ et $z = -f(x)$ varient en sens contraires.

3° *Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ varient dans le même sens sur $[a, b]$ il en est de même de leur somme* $y = f(x) + g(x)$.

$\Delta y = \Delta f + \Delta g$ est du même signe que Δf et Δg.

4° *Les fonctions $y = f(x)$ et $z = \dfrac{1}{f(x)}$ varient en sens contraires dans tout intervalle où $f(x)$ conserve un signe constant.*

En effet : $\Delta z = \dfrac{1}{f(x_2)} - \dfrac{1}{f(x_1)} = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1) \cdot f(x_2)} = -\dfrac{\Delta y}{f(x_1) \cdot f(x_2)}$

Puisque $f(x_1) \cdot f(x_2)$ est positif, Δy et Δz sont de signes opposés.

En particulier la fonction $\dfrac{1}{x}$ varie en sens contraire de x. Elle est donc décroissante dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

297. Graphe d'une fonction. — Soit $y = f(x)$ une fonction définie sur le segment $[a, d]$. Le plan étant rapporté à un repère cartésien xOy construisons pour toute valeur de x de $[a, d]$, le point M de coordonnées x et $y = f(x)$.

L'ensemble des points $M[x, y = f(x)]$ ***est le graphe de la fonction :*** $y = f(x)$ ***sur*** $[a, d]$.

Ce graphe est en général un arc de courbe ABCD (fig. 49). Les arcs AB et CD correspondent à des segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sur lesquels la fonction est croissante tandis que l'arc BC correspond à un segment $[b, c]$ sur lequel la fonction est décroissante.

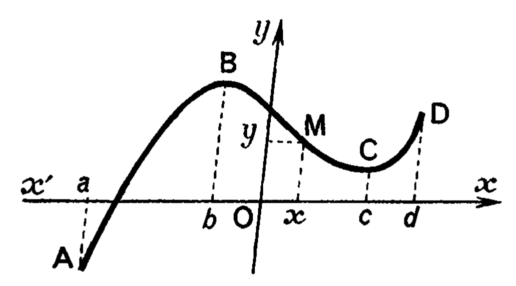


Fig. 49.

Le point B correspond au *maximum* $f(b)$ et le point C au *minimum* $f(c)$.

Rappelons que le graphe de toute fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie (fig. 50) car les points $M[x, f(x)]$ et $M'[-x, -f(x)]$ sont symétriques par rapport à O.

En coordonnées rectangulaires, le graphe de toute fonction paire admet Oy pour axe de symétrie (fig. 51) car les points $M[x, f(x)]$ et $M'[-x, f(x)]$ sont symétriques par rapport à Oy.

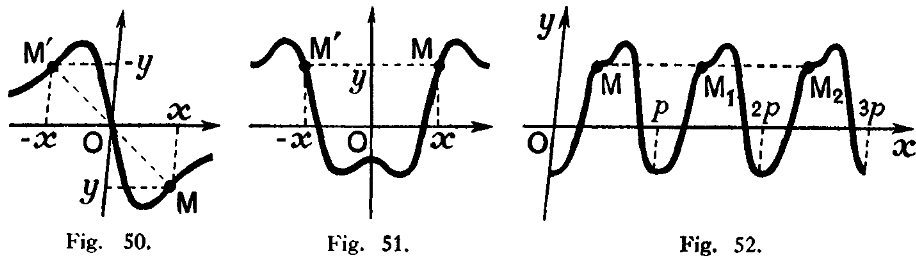


Fig. 50. Fig. 51. Fig. 52.

Enfin dans tout repère, le graphe d'une fonction périodique, de période p se compose d'une infinité d'arcs égaux (fig. 52), chacun d'eux se déduisant du précédent dans la translation de vecteur $\vec{V}(p, 0)$.

Plus généralement, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient une relation $F(x, y) = 0$ est le plus souvent une courbe (C), appelée *courbe représentative ou graphe de la relation* $F(x, y) = 0$. Réciproquement la relation $F(x, y) = 0$ qui caractérise les points d'une courbe donnée (C) est l'*équation de la courbe* (C).

LIMITES

298. Définitions. — 1° ***On dit que la variable réelle x tend vers le nombre donné a (ou admet pour limite a) lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ devient et reste inférieure à tout nombre réel positif ε fixé à l'avance.***

On fait tendre x vers a, si on l'astreint à vérifier, quel que soit le nombre positif arbitrairement petit ε, l'inégalité :

$$\boxed{|x - a| < \varepsilon} \quad \text{ou} \quad \boxed{a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.}$$

On écrit : $x \longrightarrow a$ (lire « x tend vers a »). Précisons que :

$x \longrightarrow a$ *à droite* (ou par valeurs supérieures) si : $a < x < a + \varepsilon$.
$x \longrightarrow a$ *à gauche* (ou par valeurs inférieures) si : $a - \varepsilon < x < a$.

On écrit parfois $x \longrightarrow a + 0$ dans le premier cas et $x \longrightarrow a - 0$ dans le second cas.

Notons que lorsque $x \longrightarrow a$, la différence $x - a$ tend vers zéro, car sa valeur absolue devient et reste inférieure à celle de tout nombre positif.

2° ***On dit que la variable réelle x, de signe donné, devient infinie si sa valeur absolue devient et reste supérieure à tout nombre réel positif arbitrairement grand A, fixé à l'avance.***

$$x \longrightarrow +\infty \quad \text{si finalement : } x > A.$$
$$x \longrightarrow -\infty \quad \text{si finalement : } x < -A.$$

299. Limite finie d'une fonction. — 1° Considérons une fonction réelle $f(x)$ définie sur un voisinage du point donné a (sauf peut-être pour $x = a$). Dire que $f(x)$ tend vers b, lorsque x tend vers a, signifie que l'on peut choisir x suffisamment voisin de a pour que la différence $f(x) - b$ soit inférieure en valeur absolue à tout réel positif ε, si petit soit-il, fixé à l'avance. D'une façon plus précise :

La fonction $f(x)$ tend vers la limite b lorsque x tend vers a, si à tout réel positif arbitrairement petit ε on peut faire correspondre un réel positif α tel que la relation $|x - a| < \alpha$ entraîne : $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Donc $f(x) \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow a$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 \ \text{tel que} \ |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

EXEMPLE. — *Montrer que* $y = \sqrt{x+3}$ *tend vers* 2 *lorsque* x *tend vers* 1.

$$|y - 2| = |\sqrt{x+3} - 2| = \frac{|x-1|}{\sqrt{x+3}+2} < \frac{|x-1|}{2}$$

$|\sqrt{x+3} - 2| < \varepsilon$ est réalisée pour : $|x - 1| < 2\varepsilon$ ou $x \in]1 - 2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon[$.

Ainsi pour obtenir : $1{,}99 < \sqrt{x+3} < 2{,}01$ il suffit de prendre : $0{,}98 < x < 1{,}02$.

2° ***On dit que la fonction*** $f(x)$ ***tend vers la limite*** b***, lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$ ***(ou vers*** $-\infty$***), si à tout réel positif arbitrairement petit*** ε***, on peut faire correspondre un réel positif*** A ***tel que la relation*** $|x| > A$ ***entraîne :*** $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Donc $f(x) \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ ou $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad |x| > A \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

EXEMPLE. — *Montrer que* $y = \dfrac{2x+5}{x+1}$ *tend vers* $2 + 0$ *lorsque* $x \longrightarrow +\infty$.

$y - 2 = \dfrac{3}{x+1}$. Pour obtenir $0 < y - 2 < \varepsilon$, il suffit de prendre $0 < \dfrac{3}{x+1} < \varepsilon$ c'est-à-dire $x + 1 > \dfrac{3}{\varepsilon}$ ou simplement $x > \dfrac{3}{\varepsilon}$.

300. Limite infinie d'une fonction. — 1° ***On dit que la fonction de signe connu*** $f(x)$ ***tend vers l'infini, lorsque*** x ***tend vers*** a***, si à tout réel positif arbitrairement grand*** B***, on peut faire correspondre un réel positif*** α ***tel que*** $|x - a| < \alpha$ ***entraîne :*** $|f(x)| > B$.

Par exemple $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow a$ si :

$$\forall B > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > B.$$

EXEMPLE. — La fonction $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+3$ par valeurs supérieures car pour obtenir $y > B$ il suffit de prendre $\sqrt{x-3} < \dfrac{1}{B}$

soit : $$0 < x - 3 < \frac{1}{B^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3 < x < 3 + \frac{1}{B^2}.$$

2° ***On dit que la fonction de signe connu*** $f(x)$ ***tend vers l'infini lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$ ***(ou vers*** $-\infty$***), si à tout réel positif arbitrairement grand*** B, ***on peut faire correspondre un réel positif*** A ***tel que*** $|x| > A$ ***entraîne :*** $|f(x)| > B$.

Ainsi : $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$ si :

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \quad \text{tel que} \quad x < -A \Longrightarrow f(x) > B.$$

EXEMPLE. — La fonction $y = \sqrt{2-x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ car pour obtenir $y > B$ il suffit de prendre $2 - x > B^2$ ce qui est réalisé pour $x < -B^2$.

301. Remarques. — 1° ***Si une fonction $f(x)$ admet une limite déterminée lorsque x tend vers a, cette limite est unique.***

Supposons que $x \to a$ entraîne : $y \to b$ et $y \to c$ avec $c > b$ par exemple. On pourrait trouver deux réels positifs α et α' tels que :

$$|x - a| < \alpha \Longrightarrow |y - b| < \frac{c - b}{2} \text{ et } |x - a| < \alpha' \Longrightarrow |y - c| < \frac{c - b}{2}.$$

En prenant $|x - a|$ inférieur au plus petit des nombres α et α', y appartiendrait à deux intervalles disjoints, ce qui est impossible.

2° ***Si une fonction $f(x)$ prend ses valeurs dans un intervalle $]\alpha, \beta[$ lorsque x varie dans un voisinage $[c, d]$ du point a, sa limite, lorsque x tend vers a, ne peut être qu'une valeur b du segment $[\alpha, \beta]$.***

Par exemple : $b < \alpha < \beta \Longrightarrow f(x) - b > \alpha - b$. Il serait alors impossible de réaliser $|f(x) - b| < \varepsilon = |\alpha - b|$. Par contre on peut très bien avoir $b = \alpha$ ou $b = \beta$. Ainsi une fonction positive sur $[c, d]$ ne peut admettre de limite négative lorsque $x \longrightarrow a \in [c, d]$. Elle peut admettre pour limite $b \geqslant 0$ ou $+ \infty$.

3° ***Une fonction $f(x)$ ne peut tendre vers $+ \infty$ ou vers $- \infty$ que lorsque son signe est finalement bien déterminé.***

Ainsi la fonction $y = \dfrac{x}{\sin x}$ n'a par de limite lorsque $x \to + \infty$, bien que

$\left| \dfrac{x}{\sin x} \right| \geqslant x \to + \infty$, car on ne peut lui affecter de signe défini.

302. Théorème. — ***Si la fonction $f(x)$ tend vers une limite b lorsque x tend vers a (fini ou infini) toute fonction $g(x)$ vérifiant l'une ou l'autre des relations : $b < g(x) < f(x)$ ou $f(x) < g(x) < b$, tend également vers b.***

L'une et l'autre de ces relations entraînent : $0 < |g(x) - b| \leqslant |f(x) - b|$ et, quel que soit ε positif, toute valeur de x qui réalise $|f(x) - b| < \varepsilon$ réalise également $|g(x) - b| < \varepsilon$. Autrement dit :

$$g(x) \in]b, f(x)[\quad \text{et} \quad f(x) \longrightarrow b \Longrightarrow g(x) \longrightarrow b.$$

303. Opérations sur les limites. — La recherche des limites de fonctions est facilitée par les théorèmes suivants que nous admettrons en nous bornant à donner les conclusions sous forme de tableaux.

304. Limite d'une somme. — *Lorsque x tend vers x_0 ou vers $\pm \infty$:*

Si $f(x)$ tend vers :	a	a	a	$+ \infty$	$- \infty$	$+ \infty$
et si $g(x)$ tend vers :	b	$+ \infty$	$- \infty$	$+ \infty$	$- \infty$	$- \infty$
$f(x) + g(x)$ tend vers :	$a + b$	$+ \infty$	$- \infty$	$+ \infty$	$- \infty$	?

Dans le cas où les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ tendent l'une vers $+ \infty$ et l'autre vers $- \infty$, la limite n'est pas déterminée et nécessite un calcul direct. On dit que :

La somme $f(x) + g(x)$ se présente alors sous la forme indéterminée $\infty - \infty$.

Ce cas mis à part et en étendant la notion de somme au cas où l'un où l'autre des termes devient infini, on voit que :

La limite d'une somme est la somme des limites de chacun des termes.

Ainsi : $\lim (u_n + v_n - w_n) = \lim u_n + \lim v_n - \lim w_n.$

$$\lim [f(x) + C] = \lim f(x) + C.$$

305. Limite d'un produit. — Nous supposons connu le signe de chacun des facteurs $f(x)$ et $g(x)$ et nous donnons seulement la valeur absolue de ces facteurs ou de leur produit lorsque cette valeur absolue est infinie.

Lorsque x tend vers x_0 ou vers $\pm\infty$:

Si $f(x)$ tend vers : *et si $g(x)$ tend vers :*	a b	$a \neq 0$ ∞	∞ ∞	0 ∞
$f(x) \cdot g(x)$ tend vers :	ab	∞	∞	?

Nous voyons apparaître *la forme indéterminée* $0 \times \infty$. Ce cas mis à part on peut dire que :

La limite d'un produit est le produit des limites de chacun des facteurs.

En désignant par A, B, C des constantes, on voit ainsi que :

$$\lim [A f(x) + B g(x) + C] = A \lim f(x) + B \lim g(x) + C$$
$$\lim [A u_n + B v_n - C w_n] = A \lim u_n + B \lim v_n - C \lim w_n.$$

306. Limite d'un quotient. — En supposant connu le signe de chacun des termes $f(x)$ et $g(x)$, nous ne donnons que leur valeur absolue ou celle de leur quotient lorsque cette valeur absolue est infinie. Lorsque x tend vers x_0 ou vers $\pm\infty$:

Si $f(x)$ tend vers : *et si $g(x)$ tend vers :*	a $b \neq 0$	∞ $b \neq 0$	$a \neq 0$ 0^*	a ∞	0 0	∞ ∞
$\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers :	$\frac{a}{b}$	∞	∞	0	?	?

Le symbole 0^* indique que $g(x)$ doit tendre vers 0 à droite ou à gauche, pour que le quotient ait un signe déterminé. Le cas des *formes indéterminées* $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ mis à part on peut dire que :

La limite d'un quotient est le quotient des limites de chacun de ses termes.

Ainsi : $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$ et $\lim \frac{A}{f(x)} = \frac{A}{\lim f(x)}$. Donc :

Lorsqu'un nombre positif tend vers $+\infty$, son inverse tend vers 0 et lorsqu'un nombre positif tend vers zéro, son inverse tend vers $+\infty$.

307. Limite d'une puissance ou d'une racine. — Il résulte du n° 305 que :

***Si** $f(x)$ **tend vers** a, $[f(x)]^p$ **tend vers** a^p.*

Inversement, en supposant $\sqrt[p]{f(x)}$ définie pour $f(x)$ voisin de a :

***Si** $f(x)$ **tend vers** a, $\sqrt[p]{f(x)}$ **tend vers** $\sqrt[p]{a}$.*

Ces limites sont nulles si $a = 0$, infinies lorsque a est infini.

308. Théorème. — ***Lorsque** x **tend vers zéro,** $\sin x$ **tend vers** 0 **tandis que** $\cos x$ **tend vers** $+1$ **par valeurs inférieures.***

1° Quel que soit le nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe un arc α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians, tel que $\sin \alpha = \varepsilon$ (fig. 53). Pour obtenir $|\sin x| < \varepsilon$ c'est-à-dire : $\sin |x| < \sin \alpha$ il suffit de prendre $|x| < \alpha$ car la fonction $\sin x$ est croissante sur le segment $[0, \alpha]$. Donc $\sin x$ tend vers 0 en même temps que x.

2° On sait que : $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Lorsque x tend vers 0 il en est de même de $\frac{x}{2}$, $\sin \frac{x}{2}$ et $2\sin^2 \frac{x}{2}$. Par suite $\cos x$ tend vers 1 à gauche.

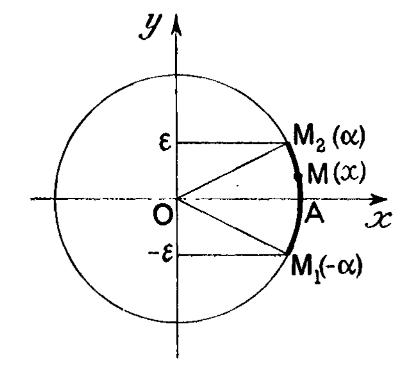


Fig. 53.

309. Limites des fonctions circulaires. — ***Lorsque** x **tend vers** x_0, **les fonctions** $\sin x$, $\cos x$ **et** $\operatorname{tg} x$ **tendent respectivement vers** $\sin x_0$, $\cos x_0$ **et** $\operatorname{tg} x_0$.*

On sait que pour $x = x_0 + h$:

$$\sin x = \sin (x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$
$$\cos x = \cos (x_0 + h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h.$$

Lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0, par suite $\sin h$ tend vers zéro et $\cos h$ tend vers 1 (n° 308). Il en résulte que $\sin x$ tend vers $\sin x_0$ et que $\cos x$ tend vers $\cos x_0$.

D'autre part : $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ a pour limite $\dfrac{\sin x_0}{\cos x_0}$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} x_0$, si toutefois $\cos x_0 \neq 0$, donc si $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Cette limite devient $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$ à gauche, $-\infty$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2} + k\pi$ à droite.

310. Résumé. — Il résulte des théorèmes n[os] 305 à 309 que :

***Lorsque** x **tend vers** x_0, **toute fonction algébrique de** x **ou de** $\sin x$ **et** $\cos x$ **admet pour limite sa valeur pour** $x = x_0$ **si toutefois elle ne se présente pas sous l'une des formes indéterminées :** $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$ **ou** $\frac{\infty}{\infty}$.*

Ainsi lorsque $x \longrightarrow +3$: $F(x) = \dfrac{(x-1)^4 + \sqrt{x^3 - 2}}{2x - 3} \longrightarrow \dfrac{16 + \sqrt{25}}{3} = 7.$

Lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{3}$: $F(\sin x, \cos x) = \dfrac{2\sin^2 x + \cos x}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \longrightarrow \dfrac{3/2 + 1/2}{1 + \sqrt{4}} = \dfrac{2}{3}.$

FORMES INDÉTERMINÉES

311. Définition. — ***Trouver la vraie valeur d'une fonction*** $F(x)$ ***qui se présente sous une forme indéterminée pour*** $x = x_0$, ***c'est en déterminer la limite lorsque*** x ***tend vers*** x_0.

Quel que soit le symbole d'indétermination : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on cherchera une fonction $G(x)$, équivalente à $F(x)$ pour $x \neq x_0$ et de la forme A.B.C ou $\frac{A.B}{C}$ dans laquelle on sait déterminer les limites des facteurs A, B et C lorsque $x \longrightarrow x_0$.

312. Limite d'un polynôme. — Le polynôme : $F(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} ... + a_{n-1}x + a_n$ se présente souvent sous la forme $\infty - \infty$ lorsque x tend vers $\pm \infty$. Or :

Or : $$F(x) \equiv a_0 x^n . \left(1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 x^n}\right).$$

Lorsque x devient infini, l'expression entre parenthèses tend vers $+ 1$. Donc :

Un polynôme en x ***devient infini, avec le signe de son terme de plus haut degré, lorsque*** x ***tend vers*** $+ \infty$ ***ou vers*** $- \infty$.

On peut même ajouter que le rapport $\frac{F(x)}{a_0 x^n}$ tend vers 1 lorsque $x \longrightarrow \pm \infty$.

313. Limites d'une fraction rationnelle. — Une fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + ... + b_p}$$

se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque x devient infini et sous la forme $\frac{0}{0}$ pour toute racine x_0 commune aux polynômes $A(x)$ et $B(x)$.

1° On peut écrire : $$F(x) = \frac{a_0 x^n}{b_0 x^p} \cdot \frac{1 + \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0 x} + \frac{b_2}{b_0 x^2} + \cdots + \frac{b_p}{b_0 x^p}}.$$

La seconde fraction du second membre tend vers $+ 1$ lorsque x devient infini. On en déduit que :

La limite d'une fraction rationnelle, lorsque x ***devient infini, est celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.***

On voit que *la limite est infinie* avec le signe de $\frac{a_0}{b_0} x^{n-p}$ pour $n > p$, *égale à* $\frac{a_0}{b_0}$ pour $n = p$, *nulle* pour $n < p$.

2° Si x_0 annule $A(x)$ et $B(x)$, la fraction $F(x)$ qui se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$

s'écrit : $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(x - x_0)\,C(x)}{(x - x_0)\,D(x)}$.

Elle est donc, pour $x \neq x_0$, équivalente à la fraction $\frac{C(x)}{D(x)}$ qui admet, en **général la limite** $\frac{C(x_0)}{D(x_0)}$ **lorsque** $x \longrightarrow x_0$. **Si** $\frac{C(x_0)}{D(x_0)}$ **se présente** sous la forme $\frac{0}{0}$ on recommence l'opé-ration.

La vraie valeur d'une fraction rationnelle, pour une racine x_0 commune à ses deux termes, est la valeur de la fraction simplifiée par $x - x_0$,

Exemple. — *Limite de* $F(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$ *lorsque x tend vers* 1.

Cette fraction prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$ et : $F(x) = \frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$.

Pour $x \neq 1$, on a donc : $F(x) = \frac{(x+2)}{(x+1)^2}$, expression égale à $\frac{1+2}{(1+1)^2}$ pour $x = 1$.

Donc : $$F(x) \longrightarrow \frac{3}{4} \quad \text{lorsque} \quad x \longrightarrow 1.$$

314. Limites d'une expression irrationnelle. — On est souvent amené à faire entrer (ou sortir) un facteur d'un radical. Ne pas oublier par exemple que pour $A > 0$:

$$\sqrt{Ax^2} \text{ est égal à } x\sqrt{A} \text{ pour } x > 0 \text{ et à } -x\sqrt{A} \text{ pour } x < 0$$

$$\frac{\sqrt{A}}{x} \text{ est égal à } \sqrt{\frac{A}{x^2}} \text{ pour } x > 0 \text{ et à } -\sqrt{\frac{A}{x^2}} \text{ pour } x < 0$$

D'autre part il y a souvent avantage à remplacer $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ par $\frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.

Exemple I. — *Limite de* $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3 - x^2 - x - 2}$ *lorsque* $x \longrightarrow 2$.

Cette fonction n'est pas définie pour $-2 < x < 2$. Donc $x \longrightarrow 2$ à droite et pour $x > 2$:

$$y = \frac{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}}{(x-2)\,(x^2+x+1)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\,(x^2+x+1)}.$$

Si $x \longrightarrow 2$ à droite : $y \longrightarrow +\infty$.

Exemple II. — *Limite de* $y = x\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ *lorsque* $x \longrightarrow 0$.

Cette fonction est définie sur]0, 1]. Donc $x \longrightarrow 0$ à droite et pour $x > 0$:

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}. \text{ Si } x \longrightarrow 0 \text{ à droite : } y \longrightarrow 0.$$

Exemple III. — *Limite de* $F(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}$ *lorsque x tend vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Sous cette forme $F(x) \longrightarrow \infty - \infty$. Écrivons :

$$F(x) = \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Maintenant $F(x) \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}\cdot$ Divisons ses deux termes par x :

$$\text{Pour } x > 0 : F(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \longrightarrow \frac{3}{2} \text{ lorsque } x \longrightarrow +\infty.$$

$$\text{Pour } x < 0 : F(x) = \frac{3 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \longrightarrow -\frac{3}{2} \text{ lorsque } x \longrightarrow -\infty.$$

EXEMPLE IV. — *Limite de* $G(x) = \dfrac{(x-1) - \sqrt{x+1}}{x^2 - 3x}$ *lorsque* $x \longrightarrow +3$.

$$G(x) = \frac{(x-1)^2 - (x+1)}{(x^2 - 3x)\left[x - 1 + \sqrt{x+1}\right]} = \frac{x^2 - 3x}{(x^2 - 3x)\left[x - 1 + \sqrt{x+1}\right]} = \frac{1}{x - 1 + \sqrt{x+1}}.$$

Donc : $$G(x) \longrightarrow \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \text{ lorsque } x \longrightarrow +3.$$

315. Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.

Si x désigne la mesure d'un arc en radians, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 par valeurs inférieures lorsque x tend vers zéro.

Supposons d'abord x positif tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et soit M l'extrémité de l'arc AM $= x$ radians du cercle trigonométrique (fig. 54). L'aire du secteur circulaire OAM est comprise entre celle du triangle OAM et celle du triangle OAT :

$$\frac{1}{2}\,\text{OA.PM} < \frac{1}{2}\,\overline{\text{OA}}^2.x < \frac{1}{2}\,\text{OA.AT}.$$

Soit, puisque OA $= 1$,

$$\text{PM} = \sin x \quad \text{et} \quad \text{AT} = \text{tg}\, x,$$

la relation :

$$\sin x < x < \text{tg}\, x.$$

Comme $\sin x$ est positif, on obtient par division par $\sin x$ puis en passant aux inverses :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1} \quad (1)$$

Fig. 54.

Cette relation est également vérifiée pour x négatif tel que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ car le changement de x en $-x$ conserve $\cos x$ et $\frac{\sin x}{x}\cdot$ Par suite, lorsque x tend vers 0, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ compris entre $+1$ et $\cos x$ qui tend vers $+1$ par valeurs inférieures (n° 302), tend lui-même vers $+1$ à gauche.

REMARQUE. — Si l'arc $\widehat{AM} = x$ rd vaut y grades ou z degrés, on obtient :

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{y}{400} = \frac{z}{360} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{\pi}{200} \text{ et } \frac{x}{z} = \frac{\pi}{180}.$$ Par suite lorsque $x \to 0$:

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{y} \to \frac{\pi}{200} \quad \text{et} \quad \frac{\sin z}{z} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{z} \to \frac{\pi}{180}.$$

316. Corollaire. — ***Lorsque l'arc x mesuré en radians tend vers 0, le rapport $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ tend vers 1 par valeurs supérieures et le rapport $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures.***

La relation (1) du paragraphe précédent, vérifiée pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, donne après division par $\cos x$ qui est positif : $1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$.

Lorsque x tend vers 0, le rapport $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, compris entre 1 et $\frac{1}{\cos x}$ qui tend vers 1 à droite tend lui-même vers 1 par valeurs supérieures (n° 302).

D'autre part : $$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2} \text{ à gauche.}$$

Les limites précédentes montrent que pour un petit angle α exprimé en radians :

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} \# 1, \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \# 1 \text{ et } \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} \# \frac{1}{2} \iff \sin \alpha \# \alpha, \operatorname{tg} \alpha \# \alpha \text{ et } \cos \alpha \# 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Dans les calculs approchés on assimile $\sin \alpha$ et $\operatorname{tg} \alpha$ à α, $\cos \alpha$ à $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ (ou à 1).

317. Limites des fonctions trigonométriques. — Pour lever l'indétermination d'une fonction trigonométrique, il est recommandé d'écrire cette fonction sous forme d'un produit de rapports dont on connaît la limite.

EXEMPLE I. — 1° *Limite de* $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ *lorsque x tend vers* 0.

On pourrait exprimer $\sin 2x$ et $\operatorname{tg} 3x$ en fonction de $\operatorname{tg} x = t$. Il est plus rapide d'écrire :

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} \times \frac{2}{3} \to 1.1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

EXEMPLE II. — *Limite de* $F(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$ *lorsque x tend vers a.*

$$F(x) = \frac{\sin(x-a)}{\cos x \cos a} \times \frac{1}{x-a} = \frac{\sin(x-a)}{x-a} \times \frac{1}{\cos x \cos a} \to 1 \times \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

EXEMPLE III. — *Limite de* $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ *lorsque x tend vers* 0.

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \to 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE IV. — *Limite de* $F(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{1 - 2\cos 2x}$ *lorsque x tend vers* $\dfrac{\pi}{6}$.

Posons $\dfrac{\pi}{6} = a$. La fonction s'écrit : $F(x) = \dfrac{2\sin x - 2\sin a}{2\cos 2a - 2\cos 2x}$ c'est-à-dire :

$$F(x) = \frac{\sin x - \sin a}{2\sin^2 x - 2\sin^2 a} = \frac{\sin x - \sin a}{2(\sin x - \sin a)(\sin x + \sin a)} = \frac{1}{2(\sin x + \sin a)}.$$

Lorsque $x \to a = \dfrac{\pi}{6}$, $F(x) \to \dfrac{1}{4\sin a} = \dfrac{1}{2}$.

FONCTIONS CONTINUES

318. Continuité en un point. — ***Une fonction $f(x)$, définie sur un segment $[a, b]$, est dite continue au point x_0 de ce segment si elle admet pour limite $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.***

La fonction $f(x)$ est donc continue en x si (n° 299) :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha \quad \text{tel que} \quad |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Une fonction peut être discontinue pour $x = x_0$ soit parce qu'elle n'est pas définie au point x_0, soit parce que l'une au moins des limites $f(x_0 - 0)$ ou $f(x_0 + 0)$ est différente de $f(x_0)$.

EXEMPLES. — 1° La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$ est discontinue au point a car elle n'est pas définie en ce point et d'autre part : $f(a - 0) \to -\infty$ et $f(a + 0) \to +\infty$.

2° La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^2}}$ est discontinue pour $x = 0$, car $f(0)$ n'est pas défini et elle admet pour limite $+1$ ou -1 suivant que x tend vers 0 à droite ou à gauche.

3° La limite, pour x donné de $(\cos^2 \pi x)^n$, lorsque $n \to \infty$, est une fonction $f(x)$ égale à $+1$ pour $x = k$ (entier relatif), égale à 0 pour $x \neq k$. Elle est donc discontinue pour $x = k$ car sa limite lorsque $x \to k$ est égale à $0 \neq f(k) = 1$.

Notons que l'on forme une fonction continue pour $x = 0$ en prenant $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ pour $x = 0$. Il en est ainsi pour toute fonction indéterminée pour $x = x_0$ à laquelle on affecte, par continuité, sa vraie valeur pour $x = x_0$.

319. Théorème. — ***Pour qu'une fonction $f(x)$ soit continue au point x_0, il faut et il suffit que l'accroissement $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ tende vers 0 en même temps que $\Delta x = x - x_0$.***

Ce n'est qu'une autre façon d'énoncer la définition ci-dessus. On dit également que Δx et Δy sont des infiniment petits simultanés.

320. Continuité sur un intervalle. — ***Une fonction $f(x)$ définie sur un intervalle donné, est continue sur cet intervalle si elle est continue en chaque point de cet intervalle.***

D'après le n° 310 il en est ainsi de toute fonction algébrique de x (ou de sin x et cos x) dans tout intervalle où cette fonction est définie. On déduit, des théorèmes sur les limites (nos 304 à 309), les théorèmes généraux suivants permettant de former de nouvelles fonctions continues à partir de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ supposées contenues sur un segment donné $[a, b]$.

1° ***La somme** $f(x)+g(x)$ **de deux fonctions continues sur** $[a, b]$ **est une fonction continue sur** $[a, b]$.*

2° ***Le produit** $f(x).g(x)$ **de deux fonctions continues sur** $[a, b]$ **est une fonction continue sur** $[a, b]$.*

3° ***Le quotient** $\frac{f(x)}{g(x)}$ **de deux fonctions continues sur** $[a, b]$ **est une fonction continue sur** $[a, b]$ **si** $g(x)$ **conserve un signe donné sur ce segment.***

4° ***Si** $f(x)$ **est une fonction continue sur** $[a, b]$, **il en est de même de toute puissance d'exposant entier positif** $[f(x)]^p$ **de cette fonction ainsi que de toute racine** $\sqrt[p]{f(x)}$ **si toutefois cette racine est définie sur** $[a, b]$.*

En particulier, la fonction $y = x$ étant continue sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, il en est de même de la fonction : $y = x^n$ et de la fonction : $y = \sqrt[n]{x}$ où n est un entier naturel.

D'après le théorème (n° 309) les fonctions circulaires sin x et cos x sont des fonctions continues de x pour toute valeur de x.

La fonction tg x est continue sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ et plus généralement sur tout intervalle $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$.

321. Fonction composée. — ***Si** $u(x)$ **est une fonction continue de** x **sur** $[a, b]$ **et à valeurs sur** $[\alpha, \beta]$ **et si** $f(u)$ **est une fonction continue de** u **sur** $[\alpha, \beta]$ **la fonction composée** $y = f[u(x)]$ **est une fonction de** x **continue sur** $[a, b]$.*

En effet, quel que soit $x_0 \in [a, b]$ et $u_0 = u(x_0)$, à tout accroissement $\Delta x = x - x_0$ qui tend vers zéro, correspond un accroissement $\Delta u = u - u_0$ qui tend vers 0 et un accroissement $\Delta y = f(u) - f(u_0)$ qui tend vers 0. Donc $f[u(x)]$ admet pour limite $f[u(x_0)]$ lorsque x tend vers x_0.

Exemples. — 1° La fonction $u = ax + b$ est une fonction continue de x et la fonction cos u est une fonction continue de u, donc $y = \cos(ax + b)$ est une fonction continue de x.

2° Il en est de même de $y = \sin \pi\sqrt{1-x^2}$ sur le segment $[-1, +1]$, de $z = \text{tg}\, \pi\sqrt{1-x^2}$ sur chacun des intervalles : $\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$; $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$ et $\left]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$.

322. Graphe d'une fonction continue. — Nous admettrons la propriété suivante :

***Toute fonction** $f(x)$, **continue sur le segment** $[a, b]$, **est représentée graphiquement par un arc de courbe continu d'extrémités** $A[a, f(a)]$ **et** $B[b, f(b)]$ (fig. 58 et 59).*

Cette propriété est à l'origine de la dénomination « fonction continue ». Toute discontinuité de $f(x)$ se traduit par une interruption dans le graphe de la fonction $y = f(x)$. On

voit ainsi que la fonction $y = \frac{1}{x - a}$ est discontinue pour $x = a$ (fig. 55) et la fonction $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2}}$ pour $x = 0$ (fig. 56). La fonction $y = \mathrm{E}(x)$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x est (fig. 57) une fonction discontinue pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

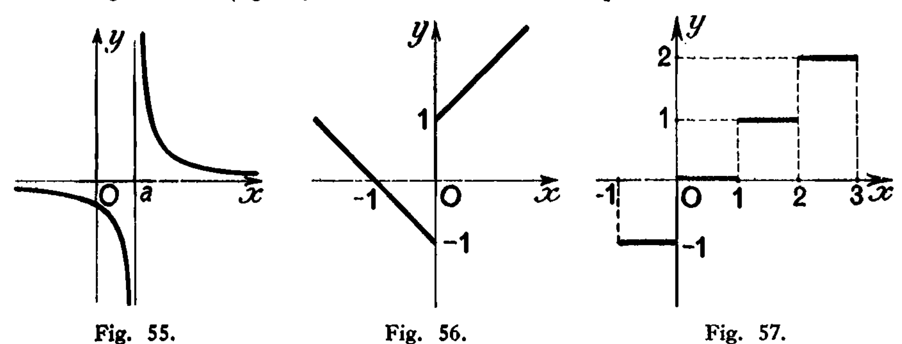


Fig. 55. Fig. 56. Fig. 57.

323. Propriété fondamentale. — ***Si une fonction*** $f(x)$, ***continue sur le segment*** $[a, b]$ ***prend des valeurs numériques*** $f(a)$ ***et*** $f(b)$ ***de signes contraires, elle s'annule pour au moins une valeur*** x_0 ***de*** x, ***comprise entre*** a ***et*** b.

$$f(a) . f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\, x_0 \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f(x_0) = 0.$$

Ce théorème peut se démontrer algébriquement. Il est évident géométriquement car (fig. 58) on ne peut joindre par une ligne continue les points A $[a, f(a)]$ et B $[b, f(b)]$ situés de part et d'autre de l'axe $x'x$, sans traverser cet axe.

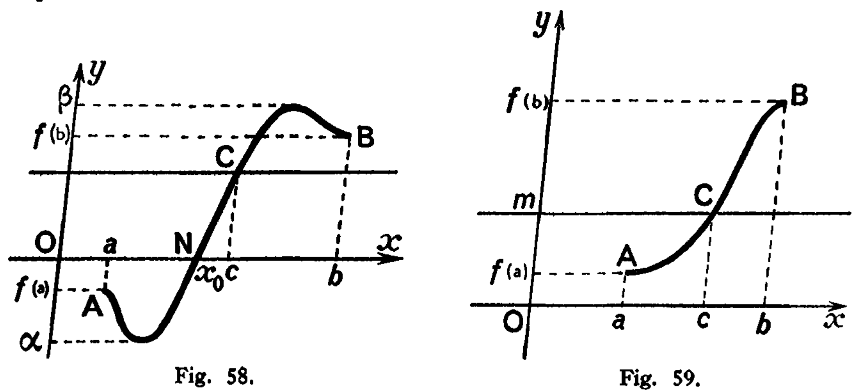


Fig. 58. Fig. 59.

324. Corollaire. — ***Toute fonction*** $f(x)$ ***continue sur*** $[a, b]$ ***prend au moins une fois, toute valeur*** l ***comprise entre*** $f(a)$ ***et*** $f(b)$.

Si nous appliquons le théorème précédent à la fonction $f(x) - l$ continue sur $[a, b]$:

$$[f(a) - l]\,[f(b) - l] < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f(c) - l = 0.$$

Autrement dit $f(x)$ prend la valeur l pour $x = c$.

Si la fonction $f(x)$ *admet sur* $[a, b]$, *pour minimum absolu* α *et pour maximum absolu* β, *on peut même dire que* $f(x)$ *admet, au moins une fois toute valeur* l *du segment* $[\alpha, \beta]$,

Une fonction $f(x)$, continue sur $[a, b]$, réalise donc (n° 12) une *application surjective* du segment $[a, b]$ sur un segment $[\alpha; \beta)$.

325. Fonctions continues monotones. — Si la fonction $f(x)$, continue sur $[a, b]$ est monotone sur ce segment (nº 295), la relation :

$$a < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow \begin{cases} f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b) & \text{si } f(x) \text{ est croissante} \\ f(a) > f(x_1) > f(x_2) > f(b) & \text{si } f(x) \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

La fonction $f(x)$ ne peut donc prendre qu'une seule fois une valeur donnée du segment $[f(a), f(b)]$. L'application f du segment $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ est donc *injective.* D'après ce qui précède (fig. 59) :

1º ***Toute fonction continue et monotone sur*** $[a, b]$ ***prend une fois et une seule toute valeur*** m ***comprise entre*** $f(a)$ ***et*** $f(b)$.

2º ***Si la fonction*** $f(x)$ ***continue et monotone sur*** $[a, b]$, ***prend des valeurs*** $f(a)$ ***et*** $f(b)$ ***de signes contraires elle admet une racine unique*** x_0 ***comprise entre*** a ***et*** b.

Notons que cette propriété permet de calculer effectivement cette racine x_0 à une approximation décimale donnée en encadrant cette racine à une unité près, puis à dixième près, un centième près, etc.

326. Fonctions réciproques (ou inverses). — ***Toute fonction*** f ***continue et monotone sur un segment*** $[a, b]$ ***admet une fonction réciproque*** φ ***continue et monotone sur un segment*** $[\alpha, \beta]$ ***et qui varie dans le même sens que la fonction*** f.

Soit $y = f(x)$ une fonction continue et monotone sur $[a, b]$. Désignons par α et β les valeurs $f(a)$ et $f(b)$. Il résulte du numéro précédent que :

$$\left.\begin{array}{ll} \forall x \in [a, b], & \exists\, y \text{ unique} \in [\alpha, \beta] \\ \forall y \in [\alpha, \beta], & \exists\, x \text{ unique} \in [a, b] \end{array}\right\} \text{tel que} \quad y = f(x).$$

La fonction f réalise donc une correspondance bijective (nº 13) entre les éléments du segment $[a, b]$ et ceux du segment $[\alpha, \beta]$. Elle admet donc une fonction réciproque φ telle que (nº 14) :

$$\boxed{y = f(x)} \Longleftrightarrow \boxed{x = \varphi(y)} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = f^{-1}(y)}$$

et réalisant les identités : $x \equiv \varphi[f(x)]$ et $y \equiv f[\varphi(y)]$.

L'arc de courbe continu AB (fig. 59) est aussi bien le graphe de la fonction $y = f(x)$ définie sur $[a, b]$ que celui de la fonction réciproque : $x = \varphi(y)$. On en déduit graphiquement que la continuité de l'une des fonctions entraîne celle de l'autre. Comme le signe de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est celui de $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ les fonctions f et φ varient dans le même sens.

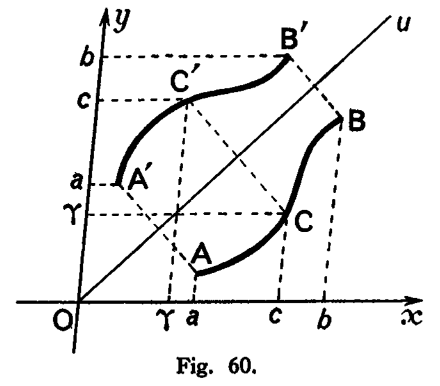


Fig. 60.

327. Remarque. — Si les fonctions f et φ sont ainsi réciproques, les courbes $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ construites dans un même repère normé sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) de l'angle xOy (fig. 60). En effet à tout point M (c, γ) de la première correspond le point symétrique M' (γ, c) de la seconde et réciproquement du fait des relations :

$$\gamma = f(c) \Longleftrightarrow c = \varphi(\gamma)$$

328. Exemple. — *Étude de la fonction :* $y = \sqrt[n]{x}$, *n entier supérieur à* 1.

La fonction $y = x^n$ est définie, continue, croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et applique cet intervalle sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Son graphe C passe par l'origine O et est tangent en O à l'axe Ox. En effet, le coefficient directeur de la droite OM qui joint O à un point du graphe d'abscisse x vaut : $\frac{x^n}{x} = x^{n-1}$ et tend vers zéro lorsque x tend vers zéro (fig. 61).

La fonction réciproque de $y = x^n$ notée $x = \sqrt[n]{y}$ est donc définie, continue, croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et applique cet intervalle sur l'intervalle $[0; +\infty[$. La fonction $y = \sqrt[n]{x}$ possède les mêmes propriétés et son graphe C′ dans un repère normé xOy est symétrique du graphe C de $y = x^n$ par rapport à la première bissectrice. Il est donc tangent en O à l'axe Oy. Les graphes C et C′ se coupent en O et en A (1; 1).

Fig. 61.

Notons que si n est impair la fonction $y = \sqrt[n]{x}$ est définie, continue, sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ et que son graphe est symétrique par rapport à l'origine O.

EXERCICES

— Étudier le domaine de définition des fonctions suivantes :

450. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ **451.** $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ **452.** $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

453. $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{7 - x}$ **454.** $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$

455. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}$ **456.** $y = \sqrt{\cos 2x}$

457. $y = \sqrt{\cos^3 x}$ **458.** $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

459. Connaissant le sens de variation de la fonction $y = x - 3$ en déduire celui des fonctions suivantes :

$y = \frac{1}{x-3}$; $y = \sqrt{x-3}$; $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$; $y = (x-3)^2$ $y = \frac{1}{(x-3)^2}$

— Réduire les fonctions suivantes et étudier leur variation :

460. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2$

461. $y = \sqrt{x^2 + 16 + 8\sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2 + 16 - 8\sqrt{x^2}}$

462. $y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$; $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

— Trouver, pour la valeur de x indiquée, la vraie valeur lorsqu'elle existe, des fonctions suivantes :

463. $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. $(x = 1)$ **464.** $\frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$ $(x = 1)$

465. $\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ $(x=-1)$ **466.** $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}$ $(x=1)$

467. $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x^3-a^3}$ $(x=a)$ **468.** $\dfrac{x^3+a^3}{x^3+3ax^2+3a^2x+a^3}$ $(x=-a)$

469. $\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ $(x=3)$ **470.** $\dfrac{x^3-1}{x^3+x^2+x-3}$ $(x=1)$

471. $\dfrac{2x-3x^2+5x^3}{4x-x^5-x^7}$ $(x=0)$ **472.** $\dfrac{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}{x^8-256}$ $(x=2)$

473. $\left[\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4x+5}{2(2x+1)}\right]\left[\dfrac{2x-3}{x^2+x-2}\right]$, pour $x=1$.

474. $\left(\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+1}\right)\left(\dfrac{x^2-5x+3}{x^2+x-6}\right)$, pour $x=2$.

475. $\dfrac{x-3x^2+2x^4}{(1-x)^2}$ $(x=1)$ **476.** $\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ $(x=1)$

477. $\dfrac{x^{2p}-1}{x^{2q}-1}$ $(x=1)$; p et q entiers positifs.

478. $\dfrac{x^{2p+1}+1}{x^{2q+1}+1}$ $(x=-1)$; p et q entiers positifs.

— Trouver, pour la valeur de x indiquée, la limite, si elle existe, des expressions irrationnelles suivantes :

479. $\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}}{x-4}$ $(x=4)$ **480.** $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ $(x=1)$

481. $\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ $(x=5)$ **482.** $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ $(x=1)$

483. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ $(x=0)$ **484.** $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+7}-2}$ $(x=1)$

485. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ $(x=0)$ **486.** $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$ $(x=0)$

487. $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}$ $(x=1)$

488. $\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^3+1}}$ $(x=\sqrt{2})$

— Trouver les limites, si elles existent, des expressions suivantes, lorsque x tend vers $\pm\infty$:

489. $\sqrt{x^2+x}-x$ **490.** $2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}$

491. $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}$ **492.** $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}$

493. $\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x-1}$ **494.** $\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}$

495. $2\sqrt[4]{x^4+4x^3}-\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}$

496. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x+1}}$ **497.** $\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+3x+4}$

498. $\sqrt[4]{x^4+x+1}-x-3$ **499.** $\sqrt[4]{x^4+mx^3}-\sqrt[4]{x^4-mx^3}$

500. $\sqrt[3]{\dfrac{x^4+1}{x-1}} - \sqrt[4]{\dfrac{x^6+1}{x^2-1}}.$

— Trouver les limites, si elles existent, des expressions suivantes où a est un nombre positif donné, dans les cas suivants :

501. $\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $(x = a)$ **502.** $\dfrac{x-a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ $(x = a)$ **503.** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ $(x = a)$

504. $\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ $(x = 0)$ **505.** $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{\sqrt{a-x}+\sqrt{a^3-x^3}}$ $(x = a)$

— Trouver les limites, si elles existent, des expressions suivantes, lorsque l'arc x exprimé en radians tend vers la valeur indiquée :

506. $\dfrac{\sin 2x}{3x}$ $(x = 0)$ **507.** $\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$ $(x = 0)$ **508.** $\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$

509. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x^2}$ $(x = 0)$ **510.** $\dfrac{x+\sin^2 x}{1-\cos x}$ $(x = 0)$ **511.** $\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$ $(x = 0)$

512. $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{\operatorname{tg}^3 x}$ $(x = 0)$ **513.** $\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $(x = 0)$

514. $(1+\sin x)\operatorname{tg}^2 x$ $\left(x = -\dfrac{\pi}{2}\right)$ **515.** $\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x}$ $(x = 0)$

516. $\dfrac{\sin x-\sin a}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}$ $(x = a)$ **517.** $\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{a}{2}}{\sin x-\sin a}$ $(x = a)$

518. $(1+\cos 2x)\operatorname{tg} x$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ **519.** $\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{3}\right)$

520. $\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{3}\right)$ **521.** $\dfrac{2\sin x-1}{4\cos^2 x-3}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{6}\right)$

522. $\dfrac{\sin^2 2x+\cos 2x+1}{\cos 2x+\sin x}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ **523.** $\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\cos x-1}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{4}\right)$

524. $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$ **525.** $\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ $(x = \pi)$

526. $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{4}\right)$ **527.** $\dfrac{\operatorname{tg} 3x-1}{2\sin 2x-1}$ $\left(x = \dfrac{\pi}{12}\right)$

528. $\dfrac{\sin(a+x)\cos x-\sin(a+b)\cos b}{\sin(x-b)}$ $(x = b)$

529. Limite lorsque $x \to 2$ de l'expression :

$$\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}$$

530. En posant $x = 1+\varepsilon$, trouver la limite, lorsque x tend vers 1 de :

$$y = \frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}}}.$$

— Simplifier les expressions suivantes, après réduction au même indice, et trouver leurs limites lorsque l'entier n tend vers $+\infty$:

531. $\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\sqrt[6]{n}$

532. $\dfrac{\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}\cdot\sqrt[20]{n}$

533. $\dfrac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot\sqrt[12]{n}$

534. $\dfrac{\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot\sqrt[15]{n^2}$

535. $\dfrac{\sqrt[5]{n+1}-\sqrt[5]{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\sqrt[10]{n^3}$

536. $\dfrac{\sqrt[p+1]{n+1}-\sqrt[p+1]{n}}{\sqrt[p]{n+1}-\sqrt[p]{n}}\cdot\sqrt[p(p+1)]{n}$ (p entier)

537. On considère la fraction : $y = \dfrac{x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 4}{x^3 + mx^2 + nx + p}$. Déterminer les coefficients réels a, b, m, n, p sachant que les conditions suivantes sont remplies simultanément :

1° Le numérateur a deux racines égales et deux racines opposées.

2° y tend vers l'infini lorsque x tend vers 3.

3° La fraction est indéterminée pour $x = 2$ mais sa vraie valeur est alors 2.

538. Déterminer les coefficients réels a, b, m, n, p de la fraction :

$$y = \frac{x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx - 36}{x^3 + mx^2 + nx + p},$$

les conditions suivantes étant simultanément remplies :

1° Le numérateur a deux racines égales et deux racines opposées.

2° y tend vers l'infini lorsque x tend vers -4.

3° La fraction est indéterminée pour $x = -3$ mais sa vraie valeur est alors -3.

539. Montrer que la fonction $y = \sin\dfrac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite lorsque x (mesuré en radians) tend vers zéro. Si l est un nombre donné $\in [-1; +1]$, la fonction y prend une infinité de fois la valeur l lorsque x varie de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, si petit que soit le nombre positif ε.

540. 1° On considère la fonction y égale à $x\sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et égale à zéro pour $x = 0$. Est-elle continue pour $x = 0$?

2° Montrer qu'elle s'annule une infinité de fois sur tout segment $[-\varepsilon; +\varepsilon]$ si petit que soit ε.

3° Reprendre les mêmes questions pour les fonctions nulles pour $x = 0$ et respectivement égales pour $x \neq 0$ à : $x\cos\dfrac{1}{x}$; $x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{x}$; $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ et $x^2\cos\dfrac{1}{x}$.

— Dans les exercices qui suivent $E(x)$ représente la caractéristique du nombre réel x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, soit : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Étudier et représenter graphiquement sur le segment $[-4, +4]$ les fonctions suivantes :

541. $y = E(x)$; $y = x - E(x)$; $y = [x - E(x)] - 1$.

542. $y = xE(x)$; $y = \dfrac{4x}{E(x)}$; $y = \dfrac{1}{4}[E(x)]^2$

543. $y = [x - E(x)]^2$; $y = x^2 - [E(x)]^2$; $y = [E(x) + 1 - x]^2$.

544. Montrer que la fonction $y = E(x) + [x - E(x)]^2$ est une fonction continue et que son graphe se compose d'arcs de parabole égaux.

545. Montrer que la fonction de Darboux :

$$y = [E(x)]^2 + [2E(x) + 1][x - E(x)]$$

est une fonction continue, paire dont le graphe est une ligne polygonale inscrite dans une parabole.

DÉRIVÉES

329. Dérivée en un point. — Considérons une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur le segment $[a, b]$ et soit x_0 une valeur donnée de ce segment. Lorsque, sur ce segment, x varie de x_0 à $x_1 = x_0 + h$, le rapport des accroissements correspondants Δy et Δx, s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}.$$

Faisons tendre x_1 vers x_0 (ou h vers 0). La fonction $f(x)$ étant continue pour $x = x_0$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (nº 311).

Si ce rapport admet une *limite finie m*, on dit que la *fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0* et que sa dérivée en x_0 est m ;

On appelle dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0, la limite lorsqu'elle existe, du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ lorsque $x_1 \to x_0$.

On symbolise cette dérivée par y_0' ou $f'(x_0)$. Donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

330. Signification géométrique. — Soit (C) le graphe de la fonction $y = f(x)$. Désignons (fig. 62) par M_0 le point fixe de coordonnées x_0 et $y_0 = f(x_0)$ et par M_1 le point de coordonnées x_1 et $y_1 = f(x_1)$. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ est le coefficient directeur de la sécante M_0M_1.

Lorsque x_1 tend vers x_0, le point variable M_1, se déplaçant sur la courbe (C), vient se confondre avec le point fixe M_0. Si la droite M_0M_1 tend vers une position limite M_0T, cette droite M_0T est, par définition, la tangente en M à la courbe (C). Son coeffficient directeur est la limite, lorsque x_1 tend vers x_0, du coefficient directeur $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ de la sécante M_0M_1. C'est donc la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0.

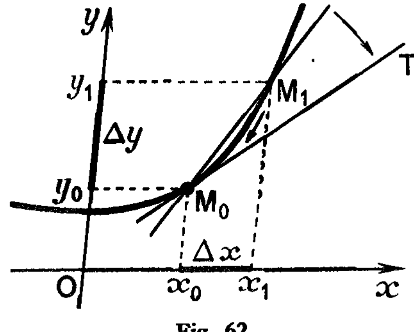


Fig. 62.

La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point M_0 d'abscisse x_0.

Il en résulte que l'existence de la dérivée au point x_0 entraîne celle de la tangente au point M_0 et détermine sa position.

REMARQUE. — Signalons que lorsque M_0 est au point O (fig. 63), le coefficient directeur de la tangente en O est la limite du rapport $\frac{f(x_1) - 0}{x_1 - 0}$ c'est-à-dire la limite du rapport $\frac{y}{x}$ lorsque x tend vers 0, ce qui donne $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{x}$.

De même le coefficient directeur de la tangente au point $A[a, f(a)]$ est $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

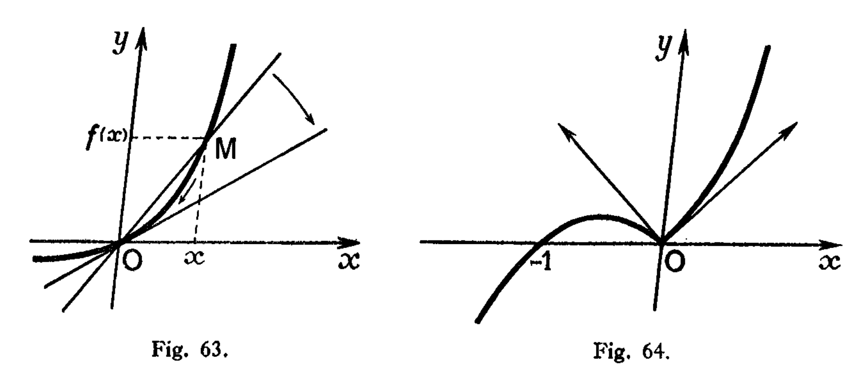


Fig. 63. Fig. 64.

331. Théorème. — ***Toute fonction $f(x)$ dérivable au point x_0 est continue en ce point.***

En effet si $f(x_1) - f(x_0)$ ne tend pas vers 0 lorsque x_1 tend vers x_0, le rapport

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ne peut admettre de limite finie et la fonction n'est pas dérivable au point x_0.

332. Extensions de la notion de dérivée. — 1° ***La définition de la dérivée suppose que le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ admet une limite unique lorsque x_1 tend vers x_0 à gauche ou à droite.***

Si l'une des limites n'existe pas, on peut définir une *dérivée à droite (ou à gauche)* du point x_0 envisagé. Lorsqu'il y a deux dérivées distinctes l'une à droite et l'autre à gauche, la courbe $y = f(x)$ admet un point anguleux pour $x = x_0$ avec deux tangentes distinctes.

Ainsi (fig. 64) la courbe $y = x^3 + \sqrt{x^2}$ admet au point $x = 0$ une demi-tangente à droite : $y = x$ et une demi-tangente à gauche $y = -x$, car $\frac{y}{x}$ tend vers $+1$ ou -1 suivant que x tend vers 0 à droite ou à gauche (n° 330).

2° Si le rapport $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x_1 tend vers x_0 dans un sens donné, on dit que la dérivée correspondante est infinie.

Cela signifie que la courbe $y = f(x)$ admet, du côté envisagé une tangente parallèle à Oy.

Ainsi, au point d'abscisse $x = 0$ la courbe $y = \sqrt{x}$ admet une demi-tangente à droite confondue avec Oy (fig. 65); la courbe $y = \sqrt[3]{x} + 1$ admet deux demi-tangentes opposées suivant Oy (fig. 66) tandis que la courbe $y = \sqrt[3]{x^2}$ admet deux demi-tangentes confondues suivant Oy (fig. 67).

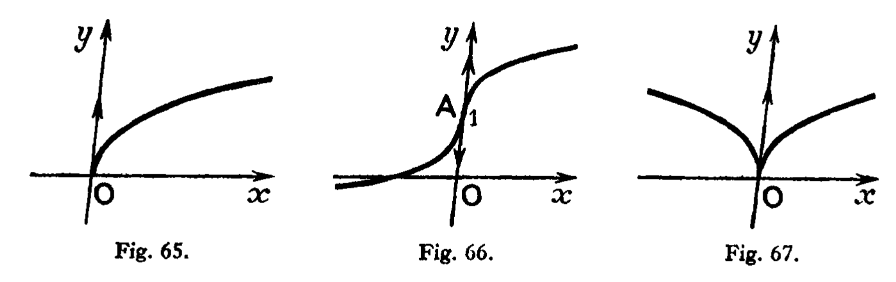


Fig. 65. Fig. 66. Fig. 67.

333. Fonction dérivée. — Lorsque la fonction $y = f(x)$ est dérivable en tout point x d'un intervalle donné, elle est dite dérivable sur cet intervalle. Sa dérivée qui est fonction de la valeur x_0 attribuée à x est une nouvelle fonction de x appelée *fonction dérivée* de $f(x)$ ou simplement *dérivée de* $f(x)$. On la symbolise par y' ou $f'(x)$ (symbole de Newton) ou par $\frac{dy}{dx}$ (symbole de Leibniz). Donc :

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

ou simplement :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Le calcul d'une dérivée s'effectue en supposant x constant.

Exemple. — Pour calculer la dérivée de $y = x^3$ on écrit :

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$. Lorsque $x_1 \longrightarrow x$, on voit que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow y' = 3x^2$.

CALCUL DES DÉRIVÉES

334. Dérivée d'une constante. — Si $y = C$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{C - C}{x_1 - x} = 0 \longrightarrow 0.$

La limite de ce rapport est donc nulle. Donc : $y' = 0$.

Une fonction constante admet en tout point une dérivée nulle.

$$\boxed{y = C} \implies \boxed{y' = 0}$$

335. Dérivée de $y = x$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1 \Longrightarrow \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$

La fonction $y = x$ admet en tout point une dérivée égale à $+ 1$.

$$\boxed{y = x} \Longrightarrow \boxed{y' = 1}$$

336. Dérivée d'une somme. — Soient $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ des fonctions de x admettant sur un segment donné les dérivées $u'(x)$, $v'(x)$, $w'(x)$, et soit la fonction : $y = u + v + w$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u_1 + v_1 + w_1) - (u + v + w)}{x_1 - x} = \frac{\Delta u + \Delta v + \Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers 0, (nº 304) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow u' + v' + w'$.

La somme de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des dérivées de chacune de ces fonctions.

$$\boxed{y = u + v + w} \Longrightarrow \boxed{y' = u' + v' + w'}.$$

On dérive une somme terme à terme. En particulier :

$$\boxed{y = f(x) + C} \Longrightarrow \boxed{y' = f'(x)}.$$

337. Dérivée d'un produit. — 1º Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de x admettant pour dérivées $u'(x)$ et $v'(x)$ et soit le produit : $y = uv$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 v_1 - uv}{x_1 - x} = \frac{(u_1 - u)v_1 + u(v_1 - v)}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v_1 + u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Lorsque Δx tend vers 0, (nº 305) : $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow u'v + uv'$.

$$\boxed{y = uv} \Longrightarrow \boxed{y' = u'v + uv'}$$

2º Si $y = uvw$ on obtient : $y' = (uv)w \Longrightarrow y' = (uv)'w + (uv)w'$.

Soit : $y' = (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$.

$\boxed{y = uvw} \Longrightarrow \boxed{y' = \Sigma\, u'vw}$ et de proche en proche :

Le produit de plusieurs fonctions dérivables admet pour dérivée la somme des produits obtenus en remplaçant successivement chaque facteur par sa dérivée.

En particulier, si A désigne une constante :

$$\boxed{y = \mathrm{A}f(x)} \Longrightarrow \boxed{y' = \mathrm{A}f'(x)}$$

Si on multiplie une fonction dérivable par une constante, sa dérivée est multipliée par la même constante. Ainsi :

$$y = -f(x) \Longrightarrow y' = -f'(x).$$

338. Dérivée de $y = x^n$. — $y = x \,.\, x \,.\, x \ldots x$ (n facteurs)
entraîne : $y' = x^{n-1} + x^{n-1} \ldots + x^{n-1}$ (n termes)

Donc $\boxed{y = x^n \implies y' = nx^{n-1}}$

APPLICATIONS : $y = \mathrm{A}\, x^{n-1} \implies y' = m\, \mathrm{A}\, x^{n-1}$

Le polynôme : $y = \mathrm{A}_m\, x^m + \mathrm{A}_{m-1}\, x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_1\, x + \mathrm{A}_0$
admet pour dérivée :

$$y' = m\mathrm{A}_m x^{m-1} + (m - 1)\, \mathrm{A}_{m-1}\, x^{m-2} + \ldots + 2\, \mathrm{A}_2\, x + \mathrm{A}_1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
y &= ax + b & &\implies & y' &= a \\
y &= ax^2 + bx + c & &\implies & y' &= 2\,ax + b \\
y &= x^3 + px + q & &\implies & y' &= 3\,x^2 + p \\
y &= ax^4 + bx^2 + c & &\implies & y' &= 4\,ax^3 + 2\,bx.
\end{aligned}$$

339. Dérivée d'un quotient. — Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions de x dérivables sur un intervalle sur lequel $v(x) \neq 0$, et soit $y = \frac{u}{v}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_1 - x}\left(\frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v}\right) = \frac{u_1 v - u v_1}{v v_1\,(x_1 - x)} = \frac{(u_1 - u)\,v - u\,(v_1 - v)}{v v_1\,(x_1 - x)} = \frac{1}{v v_1}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\, v - u\, \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

Lorsque $\Delta x \longrightarrow 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{1}{v^2}\,(u'v - uv') = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Le quotient $\frac{u}{v}$ ***de deux fonctions dérivables admet pour dérivée :*** $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\boxed{y = \frac{u}{v}} \implies \boxed{y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

340. Corollaires. — 1° ***La dérivée de*** $y = \frac{1}{u}$ ***est*** $y' = -\frac{u'}{u^2}$.

Si $u = 1$, $u' = 0$, la dérivée de $y = \frac{u}{v}$ se réduit en effet à : $y' = -\frac{v'}{v^2}$

$$\boxed{y = \frac{1}{u}} \implies \boxed{y' = -\frac{u'}{u^2}}$$

En particulier :

$$y = \frac{1}{x} \implies y' = -\frac{1}{x^2}$$

2° ***La dérivée de*** $y = x^{-n}$ ***est*** $y' = -n\,x^{-n-1}$

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \implies y' = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = -n\,x^{-n-1}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^n}} \implies \boxed{y' = -n\,x^{-n-1}}$$

341. Fonction composée (ou fonction de fonction). — Soit $u(x)$ une fonction de x, dérivable sur $[a, b]$ et à valeurs sur $[\alpha, \beta]$ et soit $f(u)$, une fonction de u dérivable sur $[\alpha, \beta]$. La fonction $y = f[u(x)] = f_o u(x)$ est une fonction composée de x définie et continue sur $[a, b]$ (nº 321). Posons $u_1 = u(x_1)$ et $y_1 = f(u_1)$, on obtient :

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{x_1 - x} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Nous admettons que $\Delta x \neq 0 \Longrightarrow \Delta u \neq 0$, c'est-à-dire que le graphe de la fonction $u(x)$ ne présente pas de segments parallèles à l'axe $x'x$.

Lorsque x_1 tend vers x, les accroissements Δx, Δu et Δf tendent vers 0. Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers $u'(x)$ et le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta u}$ tend vers $f'(u)$. Donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ admet pour limite $f'(u).u'(x)$.

Lorsque $u(x)$ est une fonction dérivable de x et $f(u)$ une fonction dérivable de u, la fonction composée $y = f[u(x)]$ admet pour dérivée $y' = f'(u).u'(x)$.

$$\boxed{y = f[u(x)]} \Longrightarrow \boxed{y' = f'(u).u'(x)}.$$

Ce théorème est très utile, car il permet de passer aisément de la dérivée d'une fonction $f(x)$ à celle de la dérivée de la fonction $f(u)$, avec u fonction de x. Ainsi :

1º $y = \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$ donc $y = \frac{1}{u} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{u^2}u'$.

2º $y = x^m \Longrightarrow y' = mx^{m-1}$ donc $y = u^m \Longrightarrow y' = mu^{m-1}.u'$.

342. Fonctions réciproques. — Soit $y = f(x)$ une fonction continue et monotone sur $[a, b]$ admettant en tout point x de $]a, b[$ une dérivée non nulle $y' = f'(x)$. Si on pose $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, la fonction $y = f(x)$ admet une fonction réciproque $x = \varphi(y)$ continue et monotone sur $[\alpha, \beta]$ (nº 326) : $y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)$.

Lorsque les accroissements correspondants $\Delta x = x_1 - x$ et $\Delta y = y_1 - y$ tendent simultanément vers 0, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ admet pour limite $y'_x = f'(x)$. Il en résulte que le rapport inverse $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ admet pour limite $\frac{1}{f'(x)}$. Donc la fonction φ est dérivable et admet, compte tenu de $x = \varphi(y)$, pour dérivée $x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Si la fonction $y = f(x)$ continue et monotone sur $[a, b]$ admet en tout point de $]a, b[$, une dérivée non nulle $y' = f'(x)$, la fonction réciproque $x = \varphi(y)$ est dérivable sur $]f(a), f(b)[$ et au point $y = f(x)$ sa dérivée est égale à $\frac{1}{f'(x)}$.

$$\boxed{y = f(x) \Longleftrightarrow x = \varphi(y)} \Longrightarrow \boxed{f'(x).\varphi'(y) = 1 \quad \text{ou} \quad y'_x.x'_y = 1}$$

Si, lorsque $x \to a$, la dérivée $f'(x)$ tend vers une limite finie l, nulle ou infinie, on voit par suite que $\varphi'(y)$ tend vers une limite finie $\frac{1}{l}$, infinie ou nulle.

EXEMPLE. — La fonction $y = f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ est monotone croissante sur [0, 1] et elle admet pour fonction réciproque $x = \varphi(y) = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ définie sur [0, 1]. On vérifie que :

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad \varphi'(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1-2x+x^2}} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Lorsque $x \to 0$, on voit que $y \to 0$, $f'(x) \to +\infty$ et $\varphi'(y) \to +0$.

Lorsque $x \to +1$, on voit que $y \to +1$, $f'(x) \to 0$ et $\varphi'(y) \to +\infty$.

343. Interprétation géométrique. — Si $y = f(x)$ et $x = \varphi(y)$ sont des fonctions réciproques, les graphes C et C′ des fonctions $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$ sont, dans un repère normé symétriques par rapport à la première bissectrice (n° 327). Les tangentes aux points M (c, γ) et M′ (γ, c), homologues dans cette symétrie, ont pour coefficients directeurs respectifs $f'(c)$ et $\varphi'(c) = \frac{1}{f'(c)}$. Ces tangentes sont donc symétriques par rapport à la première bissectrice (fig. 68), ce qui résulte géométriquement du fait, que ces tangentes sont les limites de deux sécantes symétriques.

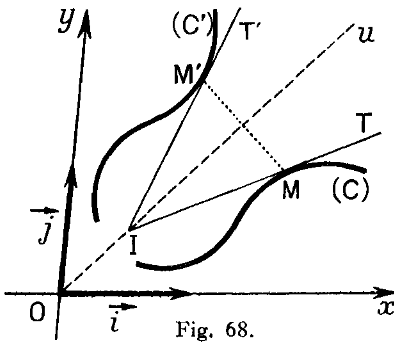


Fig. 68.

344. Remarque. — Pour obtenir la dérivée d'une fonction $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$, il suffit de savoir que sa dérivabilité résulte de celle de la fonction réciproque $x = f(y)$, et d'après le théorème des fonctions composées (n° 342), on peut écrire en dérivant par rapport à x : $f(y) = x \Longrightarrow f'(y) \cdot y' = 1$ ce qui donne : $y' = \frac{1}{f'[\varphi(x)]}$

345. Dérivée de $\sqrt[n]{x}$. — Pour x positif on peut écrire que $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ équivaut à $x = y^n$. La fonction y^n étant dérivable par rapport à y, la fonction $y = x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable par rapport à x et $y^n = x$ donne :

$$n\,y^{n-1}\,y' = 1 \Longrightarrow y' = \frac{1}{n\,y^{n-1}} = \frac{y}{n\,y^n} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{nx} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}. \text{ D'où } y = \sqrt[n]{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Donc pour $u(x)$ positif et dérivable : $\boxed{y = u^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,u'.}$

346. Dérivée de $y = \sqrt{u}$. — En particulier :

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}}u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} :$$

$$\boxed{y = \sqrt{u} \Longrightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

EXEMPLE. — $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est une fonction de x, définie sur $]-\infty, -1[$ et sur $[+1, +\infty[$.

Posons $x = \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow u' = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$. On obtient : $y = \sqrt{u}$.

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}} = \frac{1}{|x+1|\sqrt{x^2-1}}.$$

Sur $]-\infty, -1]$, $y' = \dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ et sur $[+1, +\infty[$, $y' = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

347. Dérivée de $y = u^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{u^p}$. — Quels que soient l'entier relatif non nul p et l'entier positif q premiers entre eux, la fonction $y = u^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{u^p} = \left(\sqrt[q]{u}\right)^p$ est définie pour u positif. Si q est impair, elle est également définie pour u négatif. En supposant $u(x)$ dérivable, posons $u^p = v \implies v' = pu^{p-1}u'$ (nº 341). La formule du nº 346 montre que $y = \sqrt[q]{u^p} = \sqrt[q]{v}$ admet pour dérivée :

$$y' = \frac{\sqrt[q]{v}.v'}{qv} = \frac{u^{\frac{p}{q}}}{q} \cdot \frac{pu^{p-1}u'}{u^p} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}u'. \quad \text{Donc :}$$

Pour toute valeur rationnelle irréductible de m, et sur tout intervalle où elle est définie la fonction $y = u^m$ admet pour dérivée $y' = mu^{m-1}u'$.

$$\forall m = \frac{p}{q} \text{ irréductible} \in \mathbb{Q} : \quad \boxed{y = u^m} \implies \boxed{y' = mu^{m-1}u'}$$

Exemples. — 1º $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \implies y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

2º $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}} \implies y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

3º $y = \sqrt[4]{x^6}$. Pour $x \geqslant 0$, on obtient $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \implies y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Pour $x \leqslant 0$, posons $v = -x$, d'où : $y = \sqrt{v^3} = v^{\frac{3}{2}} \implies y' = \frac{3}{2}v^{\frac{1}{2}}v' = -\frac{3}{2}\sqrt{-x}$.

348. Théorème. — ***Lorsque x est exprimé en radians, les dérivées des fonctions*** $\sin x$ ***et*** $\cos x$ ***sont respectivement égales à*** $\cos x$ ***et*** $-\sin x$.

1º Soit $y = \sin x$ et $\Delta x = h$; nous obtenons pour $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Lorsque $\Delta x = h$, en radians, tend vers zéro, le rapport $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers 1 (nº 315) et $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ tend vers $\cos x$, car la fonction $\cos x$ est continue pour tout x. Donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \implies \cos x \quad \text{et} \quad \boxed{y = \sin x \implies y' = \cos x}.$$

2º De même soit $y = \cos x$ et $\Delta x = h$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

si $h \Longrightarrow 0$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow -\sin x$ et : $\boxed{y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x}$.

349. Corollaire. — ***Les fonctions*** tg x ***et*** cotg x ***ont respectivement pour dérivées*** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ***et*** $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

1° $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Longrightarrow y' = \dfrac{\cos x . \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x}$ (n° 339).

Donc : $\boxed{y = \operatorname{tg} x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

2° $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow y' = \dfrac{-\sin x . \sin x - \cos x . \cos x}{\sin^2 x}$ (n° 347).

Donc : $\boxed{y = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)}$.

350. Dérivées de fonctions composées des fonctions circulaires.

1° Les fonctions sin u, cos u, tg u et cotg u où u est une fonction dérivable de la variable x (en radians) sont respectivement (n° 341) :

$$u' \cos u; \quad -u' \sin u; \quad \frac{u'}{\cos^2 u} \quad \text{et} \quad \frac{-u'}{\sin^2 u}.$$

Ainsi :

$$y = \sin 3x \Longrightarrow y' = 3 \cos 3x$$
$$y = \operatorname{tg}(x^2) \Longrightarrow y' = 2x \frac{1}{\cos^2(x^2)}$$
$$y = \cos \sqrt{x} \Longrightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}.$$

2° Les fonctions $f(\sin x)$; $f(\cos x)$; $f(\operatorname{tg} x)$; $f(\operatorname{cotg} x)$ où la fonction $f(u)$ est dérivable par rapport à la variable u sont respectivement (x en radians) :

$$f'_u \cos x; \quad -f'_u \sin x; \quad f'_u \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad -f'_{(u)} \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ainsi pour tout rationnel n : $y = \sin^n x \Longrightarrow y' = n \sin^{n-1} x . \cos x$

$$y = \cos^n x \Longrightarrow y' = -n \cos^{n-1} x . \sin x$$
$$y = \operatorname{tg}^n x \Longrightarrow y' = n \operatorname{tg}^{n-1} x (1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

351. Corollaire. — ***Les dérivées des fonctions*** sin $(ax + b)$ ***et*** cos $(ax + b)$ ***où*** x ***est exprimé en radians sont respectivement :*** $a \cos(ax + b)$ ***et*** $-a \sin(ax + b)$.

Pour : $u = ax + b \Longrightarrow u' = a$, on obtient donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sin(ax + b) \Longrightarrow y' = a \cos(ax + b) \\ y = \cos(ax + b) \Longrightarrow y' = -a \sin(ax + b) \end{array}}.$$

352. Cas où la variable x n'est pas exprimée en radians.

1° Si x gr désigne la mesure en grades d'un arc de X radians on a : $\frac{x}{400} = \frac{X}{2\pi}$ donc : $X = \frac{\pi x}{200}$.

La dérivée par rapport à x de $y = \sin x$ gr est donc celle de $y = \sin \frac{\pi x}{200}$, soit :

$$y' = \frac{\pi}{200} \cos \frac{\pi x}{200} = \frac{\pi}{200} \cos x \text{ gr}.$$

De même $z = \cos x$ gr admet pour dérivée : $z' = -\frac{\pi}{200} \sin \frac{\pi x}{200} = -\frac{\pi}{200} \sin x$ gr.

2° On verrait de même que x degrés $= \frac{\pi x}{180}$ radians et que les dérivées de $y = \sin x^0$ et $z = \cos x^0$ sont $y' = \frac{\pi}{180} \cos x^0$ et $z' = -\frac{\pi}{180} \sin x^0$.

353. Tableau des dérivées. — Nous donnons ici le tableau des dérivées qu'il importe de connaître.

FONCTION	DÉRIVÉE	FONCTION	DÉRIVÉE
$y = C$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$	$y = f(x) + c$	$y' = f'(x)$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = uvw$	$y' = \Sigma\, u'vw$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = Af(x)$	$y' = Af'(x)$
$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = u^m$	$y' = m u^{m-1} u'$	$y = x^m$	$y' = m x^{m-1}$
$y = \sqrt[n]{u} = u^{\frac{1}{n}}$	$y' = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} u'$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[q]{u^p} = u^{\frac{p}{q}}$	$y' = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} u'$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = f(u)$	$y' = f'(u) \,.\, u'$.	$y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$	$y' = \frac{1}{f'[\varphi(x)]}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$y = \sin(ax + b)$	$y' = a\cos(ax + b)$	$y = \cos(ax + b)$	$y' = -a\sin(ax + b)$

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

354. Définition. — Si la fonction $f(x)$ est dérivable sur un intervalle $[a, b]$, sa dérivée $f'(x)$ est une fonction de x appelée *dérivée première de* $f(x)$.

Si la fonction $f'(x) = g(x)$ est elle-même dérivable sur $[a, b]$, sa dérivée $g'(x)$ est appelée *dérivée seconde de* $y = f(x)$ et s'écrit $y'' = f''(x)$.

On peut ainsi définir une *dérivée troisième* $y''' = f'''(x)$ dérivée de $f''(x)$, puis une *dérivée quatrième* $y^{\text{IV}} = f^{\text{IV}}(x)$ dérivée de $f'''(x)$, puis de proche en proche une *dérivée* $n^{\text{ième}}$ *ou d'ordre* n : $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Exemples. — 1° Le monôme $y = x^m$ admet pour dérivées successives :

$$y' = mx^{m-1}; \qquad y'' = m(m-1)x^{m-2}; \qquad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}\ldots$$
$$y^{(p)} = m(m-1)\ldots(m-p+1)x^{m-p}; \quad \text{et} \quad y^{(m)} = m(m-1)\ldots 2.1\,x^0 = m!$$

Les dérivées suivantes sont toutes nulles.

2° La fonction $y = \dfrac{1}{x}$ admet pour dérivées successives

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{1.2}{x^3}. \quad y''' = -\frac{1.2.3}{x^4}, \quad y^{\text{IV}} = \frac{4!}{x^5}, \quad y^{(p)} = (-1)^p\frac{p!}{x^{p+1}}$$

3° $y = \dfrac{1}{a-x}$ admet pour dérivées $y' = \dfrac{1}{(a-x)^2}$, $y'' = \dfrac{1.2}{(a-x)^3}$ $\cdots$ $y^{(p)} = \dfrac{p!}{(a-x)^{p+1}}$

ce qui permet de calculer les dérivées successives d'expressions telles que :

$$y = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} + \frac{C}{c-x} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{(a-x)^2} + \frac{C}{(a-x)^3}.$$

4° $y = uv \Longrightarrow y' = u'v + uv'$, $\quad y'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$, d'où par récurrence la formule de Leibniz :

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1u^{(n-1)}v' + C_n^2u^{(n-2)}v'' + \ldots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Toute fonction $f(x)$ admettant sur $[a, b]$ des dérivées successives jusqu'à l'ordre n est continue sur $[a, b]$ ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées.

Cela résulte du théorème n° 331. Il en sera ainsi de la plupart des fonctions que nous rencontrerons et qui seront indéfiniment dérivables. Notons que les dérivées d'ordre supérieur à n, d'un polynôme de degré n, sont toutes nulles.

355. Dérivées successives de $\sin x$ **et** $\cos x$.

1°
$$y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y' = \cos x \Longrightarrow y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$y'' = -\sin x \Longrightarrow y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -\cos x \Longrightarrow y^{IV} = \sin x \quad = \sin(x + 2\pi).$$

Ainsi, les dérivées successives de y constituent une suite périodique : $\sin x$, $\cos x$ $-\sin x$, $-\cos x$... et suggère l'existence de la formule suivante :

$$\boxed{y = \sin x} \Longrightarrow \boxed{y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Elle est vraie pour $n = 1$; en la supposant vraie pour l'entier $n - 1$:

$$y^{(n-1)} = \sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow y^{(n)} = \cos\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Elle est donc vraie pour tout n.

2° De même : $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \sin x$, $y^{IV} = \cos x$...

On retrouve la même suite périodique commençant à $\cos x$ et :

$$\boxed{y = \cos x} \Longrightarrow \boxed{y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}.$$

3° On vérifie également que :

$$y = \sin(ax + b) \Longrightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$z = \cos(ax + b) \Longrightarrow z^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right).$$

356. Racines multiples d'un polynôme. — Si un polynôme $P(x)$ admet le nombre réel a comme racine d'ordre α, il s'écrit :

$$P(x) = (x - a)^\alpha Q(x) \qquad \text{avec} \quad Q(a) \neq 0.$$

D'où : $$P'(x) = \alpha(x - a)^{\alpha-1}Q(x) + (x - a)^\alpha Q'(x)$$

Soit : $$P'(x) = (x - a)^{\alpha-1}[\alpha Q(x) + (x - a)Q'(x)]$$

Le crochet prenant pour $x = a$ la valeur non nulle $\alpha Q(a)$:

Toute racine d'ordre α ***d'un polynôme*** $P(x)$ ***est racine d'ordre*** $\alpha - 1$ ***de sa dérivée.***

Ainsi a est racine d'ordre $\alpha - 2$ de $P''(x)$, d'ordre $\alpha - 3$ de $P'''(x)$... d'ordre 1 de $P^{(\alpha-1)}(x)$ et tel que $P^{(\alpha)}(a) \neq 0$.

L'ordre de multiplicité de la racine $x = a$ de $P(x)$ est donc l'ordre de la première dérivée non nulle pour $x = a$:

Pour qu'un polynôme $P(x)$ ***soit divisible par*** $(x - a)^\alpha$ ***il faut et il suffit que :***

$$P(a) = 0; \quad P'(a) = 0; \quad P''(a) = 0 \quad ..... \quad P^{(\alpha-1)}(a) = 0.$$

EXEMPLE. — Déterminer a, b, c pour que $P(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$ soit divisible par $(x - 1)^3$.

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= x^5 + ax^2 + bx + c \\ P'(x) &= 5x^4 + 2ax + b \\ P''(x) &= 20x^3 + 2a \end{aligned}\right\} \quad \text{Il faut donc :} \quad \left\{\begin{aligned} P(1) &= 1 + a + b + c = 0 \\ P'(1) &= 5 + 2a + b = 0 \\ P''(1) &= 20 + 2a = 0 \end{aligned}\right.$$

Ce qui donne : $a = -10$, $b = 15$, $c = -6$ et :

$$P(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = (x-1)^3(x^2 + 3x + 6).$$

357. Formes indéterminées $\frac{0}{0}$. — Lorsque la fonction $f(x)$ est dérivable au point a on peut écrire (n° 329) : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dérivables au point a et telles que $f(a) = g(a) = 0$. Lorsque x tend vers a on peut écrire (Remarque n° 330) :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\lim \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Si, lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$, de deux fonctions dérivables au point a se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ il admet pour limite $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Pour des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dérivables sur un voisinage de a, cette limite $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ est donc la valeur pour $x = a$, du rapport $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mais on ne peut rien affirmer, d'après la démonstration ci-dessus, lorsque ce dernier rapport se présente lui-même sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (cf. ex. n° 647).

EXEMPLE : *Limite de* $G(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x - 1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 3x}$ *lorsque* $x \longrightarrow +3$ (n° 314, exemple IV).

Le rapport se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = 3$. Or $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $g'(x) = 2x - 3$.

Donc : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \dfrac{f'(3)}{g'(3)} = \dfrac{1 - \frac{1}{4}}{6 - 3} = \dfrac{3/4}{3} = \dfrac{1}{4}$.

358. Notion de différentielle. — ***On appelle différentielle d'une fonction dérivable $f(x)$, le produit $f'(x)\,h$ de sa dérivée $f'(x)$ par un facteur arbitraire h.***

Cette différentielle est représentée par le symbole $df(x)$ ou simplement df (lire d, f). Lorsque $y = f(x)$ on écrit indifféremment :

$$df = f'(x)\,h \quad \text{ou} \quad dy = f'(x)\,h$$

Pour $f(x) = x$, on obtient : $dx = 1.h$ soit $h = dx$. Le facteur h est la différentielle dx de la variable x. D'où finalement :

$$\boxed{y = f(x)} \implies \boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

La différentielle dy est le produit de $f'(x)$ par la différentielle arbitraire dx.

Ainsi :

$$y = x^n \Longrightarrow dy = nx^{n-1}\,dx.$$

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

359. Théorème. — ***La dérivée, par rapport à x, de la fonction $y = f(x)$ est égale au rapport $\frac{dy}{dx}$.***

$$dy = f'(x)\,dx \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

Cette notation de Leibniz, pour désigner la dérivée de y par rapport à x, est souvent plus avantageuse que la notation de Newton y' ou y'_x.

360. Interprétation géométrique.

Soit C le graphe de la fonction dérivable $y = f(x)$ dans le repère cartésien xOy (fig. 69). Soient M $(x; y)$ et M' $(x + dx, y + \Delta y)$ deux points du graphe. La tangente MT en M à la courbe C a pour coefficient directeur $y' = f'(x)$ (n° 330).

La parallèle à Oy issue de M' coupe la tangente MT en P et coupe en H la parallèle à Ox issue de M. On en déduit :

$\overline{HM'} = \Delta y$ et $\overline{HP} = f'(x)\,\overline{MH} = f'(x)\,dx$

Donc : $\overline{HM'} = \Delta y$ et $\overline{HP} = dy$.

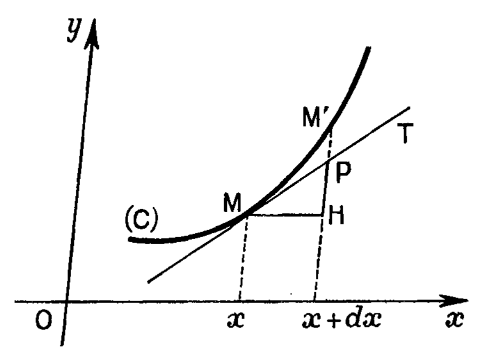


Fig. 69.

Remplacer Δy par dy au voisinage de M revient à substituer au graphe de la fonction $y = f(x)$, la tangente en M à ce graphe.

361. Différentielles classiques. — Les théorèmes sur les dérivées conduisent aux propriétés suivantes :

1° $y = u + v + w \Longrightarrow y'dx = u'dx + v'dx + w'dx \Longleftrightarrow dy = du + dv + dw$

2° $y = uv \Longrightarrow y'dx = vu'dx + uv'dx \Longleftrightarrow dy = vdu + udv$

3° $y = \frac{u}{v} \Longrightarrow y'dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} \Longleftrightarrow dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$

4° $y = u^m \Longrightarrow y'dx = mu^{m-1}u'dx \Longleftrightarrow dy = mu^{m-1}\,du$

5° $y = \sqrt{u} \Longrightarrow y'dx = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dx \Longleftrightarrow dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$

6° $y = f(u) \Longrightarrow y'_x dx = f'_u\, u'_x\, dx \Longleftrightarrow dy = f'_u\, du.$

Ce qui entraîne la formule classique : $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$.

Remarquons que l'utilisation des différentielles peut faciliter le calcul des dérivées. Ainsi :

$$y = \frac{(3x-1)^2}{x^2+1} \Longrightarrow dy = \frac{(x^2+1)\,d(3x-1)^2 - (3x-1)^2\,d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

Or : $d(3x-1)^2 = 2(3x-1)\,d(3x-1) = 6(3x-1)\,dx$ et $d(x^2+1) = d(x^2) = 2x\,dx$

D'où : $dy = \frac{6(x^2+1)(3x-1) - 2x(3x-1)^2}{(x^2+1)^2}\,dx \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2}.$

EXERCICES

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes et étudier le signe de ces dérivées :

546. $y = 4x^2 - 7x + 1$ **547.** $y = 2x^2 - 3x + 1$ **548.** $y = -4x^2 + 3x - 5.$

549. $y = \frac{3x-4}{x+1}$ **550.** $y = \frac{1-x}{1+x}$ **551.** $y = \frac{3-4x}{5+2x}.$

552. $y = \frac{3x^2+4x-1}{x^2+x-3}.$ **553.** $y = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^2.$ **554.** $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3.$

555. $y = (2x+1)^3 - (2x-1)^3$ **556.** $y = \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^2.$ **557.** $y = \frac{x^5(x-1)}{(x-2)^2}.$

558. $y = 3x^4 + 8x^3 - 12(x^2+x)$ **559.** $y = x^3(x-6)^2(x-3)$ **560.** $y = x^3(x^2-3x+1).$

561. $y = x^4(x+1)^3$ **562.** $y = (x-a)^3(x+a)^2$ **563.** $y = x^4(x-2).$

564. $y = x^2(x-1)^2(x+1)$ **565.** $y = x^3(x-a)^2$ **566.** $y = (x-a)^3(x-b)^5.$

567. $y = \frac{2x}{4x^2-1}.$ **568.** $y = \frac{x^2+1}{x^3+2}.$ **569.** $y = \frac{(x+a)^3}{(x-a)^4}.$

570. $y = \frac{x^5}{(2x+1)^3}.$ **571.** $y = \left(\frac{x}{2+x}\right)^5.$ **572.** $y = \frac{x^2-1}{x(2x+3)}.$

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes et étudier suivant les valeurs de x, le signe de ces dérivées.

573. $y = x\sqrt{3x^2+1}.$ **574.** $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

575. $y = x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$ **576.** $y = \frac{x-1}{\sqrt{3-x}}.$

577. $y = \frac{3x-4}{\sqrt{x+1}}.$ **578.** $y = \sqrt{(x^2-1)^3}.$

579. $y = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.$ **580.** $y = \sqrt{x^4-3x^3+2x^2}.$

581. $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$ **582.** $y = \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}.$

583. $y = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$ **584.** $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

585. $y = (2x-1)\sqrt{(1+x)^3}.$ **586.** $y = (x+2)\sqrt{(x-2)^3}:$

587. $y = \sqrt{2 - 4x^2}$.

588. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$.

589. $y = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$.

590. $y = x\,(1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}$.

591. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} - x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}$.

592. $y = \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

593. 1° Calculer la dérivée y' de la fonction : $y = \dfrac{a\,(x^2 - 1) - x\,(a^2 - 1)}{x^2 + 1}$ où a est une constante donnée.

2° Déterminer les valeurs de x qui annulent y et celles qui annulent y'. Vérifier qu'elles s'expriment rationnellement en fonction de a.

594. Les constantes p, q, r sont des entiers positifs. Calculer les dérivées des fonctions suivantes de la variable x :

$$y = (x - a)^p\,(x - b)^q; \qquad y = (ax + b)^p\,(cx + d)^q$$
$$y = (x - a)^p\,(x - b)^q\,(x - c)^{-r}; \quad y = (x - a)^p\,(x - b)^{-q}.$$

595. Déterminer, en utilisant la règle du rapport des dérivées (n° 358) les vraies valeurs demandées aux exercices allant du n° 463 au n° 472, du n° 479 au n° 486 ou du n° 501 à 505.

596. 1° Trouver un polynôme du 4ᵉ degré en x connaissant sa dérivée seconde : $y'' = ax^2 + bx + c$ et sachant qu'il est divisible par cette dérivée seconde.

2° Étudier le cas particulier où $y'' = 12\,x^2 + 2$.

597. Déterminer la relation qui doit lier les constantes p et q pour que l'équation : $x^3 + px + q = 0$ ait une racine double.

598. Déterminer les constantes a, b, c pour que l'équation : $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ ait une racine triple égale à -1.

599. Déterminer les constantes a, b, c pour que l'équation : $x^4 + ax^3 + cx + d = 0$ ait une racine triple égale à α.

600. On considère la fonction composée : $y = f[u(x)]$. On suppose $u(x)$ dérivable sur $[a; b]$ et à valeurs dans $[\alpha; \beta]$ et $f(u)$ continue, monotone sur $[\alpha; \beta]$ et admettant pour fonction réciproque $u - = \varphi(y)$ dérivable sur $[f(\alpha), f(\beta)]$.

Montrer que : $\varphi(y) = u(x) \implies y'_x = \dfrac{u'(x)}{\varphi'(y)}$.

601. On donne deux fonctions de t : $x = f(t)$ et $y = g(t)$ définies monotones et dérivables sur $[a, b]$. Montrer que y est une fonction de x monotone et dérivable sur $[f(a), f(b)]$ et que :

$$y'_x = \frac{g'_t}{f'_t}.$$

602. De $y = ax^2 + b$, déduire la relation : $xy'' - y' = 0$.

603. De $y = \dfrac{a}{x} + b$, déduire la relation : $xy'' + 2y' = 0$.

604. 1° Montrer que la fonction : $y = \dfrac{a'x^2 + b'x + c'}{(x - a)^2}$ peut s'écrire :

$$y = a' + \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2}.$$

2° Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de cette fonction. Montrer que cette dérivée ne s'annule que pour une seule valeur réelle de x, mais qu'elle présente deux changements de signe sur $]-\infty, +\infty[$.

605. 1° Montrer que la fonction : $y = \dfrac{a'x^2 + b'x + c'}{(x-a)(x-b)}$ peut s'écrire :

$$y = a' + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

2° Calculer la dérivée $n^{ième}$ de cette fonction. Montrer que cette dérivée possède sur C, n racines dont les images appartiennent à un cercle variable avec n, qui engendre un faisceau de cercles dont les points limites sont indépendants de n.

La dérivée $y^{(n)}$ peut-elle avoir des racines réelles ?

606. 1° Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire, que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

2° Soit $f(x)$ définie et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$. On pose :

$$u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Calculer $u(x) + v(x)$ et en déduire que toute fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

3° Que peut-on dire des fonctions $u'(x)$ et $v'(x)$?

— Calculer les dérivées des fonctions suivantes où la variable x est exprimée en radians :

607. $\sin^2 x$; $\sin x^2$; $\sin^2(x^3)$; $\sin x^{\frac{2}{3}}$.

608. $\sin \dfrac{1}{x}$; $\sin^2 \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\sin \sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{1}{x}}$.

609. $\cos^2 x$; $\cos x^2$; $\cos^2(x^3)$; $\cos x^{-\frac{2}{3}}$.

610. $\cos \dfrac{1}{x}$; $\cos^2 \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\cos \sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{1}{x}}$.

611. $\operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{tg} x^2$; $\operatorname{tg}^2(x^3)$; $\operatorname{tg} x^{\frac{2}{5}}$.

612. $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$; $\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{x}}$.

613. $\operatorname{cotg}^2 x$; $\operatorname{cotg} x^2$; $\operatorname{cotg}^2(x^3)$; $\operatorname{cotg} x^{\frac{1}{3}}$.

614. $\operatorname{cotg} \dfrac{1}{x}$; $\operatorname{cotg}^2 \sqrt{x}$; $\dfrac{1}{\operatorname{cotg} \sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2 \dfrac{1}{x}}$.

615. $\sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x + \dfrac{1}{4} \sin 4x$.

616. $\cos x + \dfrac{1}{2} \cos 2x + \dfrac{1}{3} \cos 4x + \dfrac{1}{4} \cos 4x$.

617. $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 5 \sin^2 x \cos^2 x$.

618. $\sin^8 x + \cos^8 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

619. $\cos 2x (\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 1)$

620. $\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.

621. $\sin 2x (\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{cotg} x)$

622. $\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$.

623. $\sqrt{\sin x + 2\cos x + 4}$ **624.** $\sqrt{\dfrac{\cos^2 x + \operatorname{tg} x}{\sin 2x}}$ **625.** $\sqrt{\dfrac{x^2 + 3x - 1}{\sin 3x}}$.

626. $\cos x \left[\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}\right]$ **627.** $\sin x \left[\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right]$.

628. $x - \operatorname{tg} x$; $ax - \sin ax \cos ax$; $x \sin x + \cos x$.

629. $\sin^3 x + \cos^3 x$; $\sin nx \,(\sin x)^n$; $\dfrac{\sin^p x}{\cos^q x}$.

630. On donne les fonctions : $u = a \cos x + \cos ax$ et $v = a \sin x + \sin ax$.
Calculer et factoriser u', v', $u'^2 + v'^2$ et $\dfrac{u'}{v'}$.

631. Même problème avec les fonctions : $u = a \cos x - \cos ax$ et $v = a \sin x - \sin ax$.

632. Soit la fonction : $y = \sin^n x$.
1° Calculer y' et y''.
2° Montrer que : $y'' + n^2 y = n(n-1)\sin^{n-2} x$.
3° Trouver une relation analogue pour la fonction : $y = \cos^n x$.

633. On considère les fonctions : $u = (\cos 2x)^{-1/2}$ et $v = (\cos 2x)^{-1/2}$.
1° Calculer u', v', u'' et v''.
2° Montrer que : $u + u'' = 3u^5$ et $v + v'' = 3v^5$.

634. 1° On donne : $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Calculer la dérivée y'_x.
2° On pose : $x = \cos t$. Calculer la dérivée y'_t.

635. 1° On donne : $y = \dfrac{2x}{(1 + x^2) + a(1 - x^2)}$. Calculer la dérivée y'_x.
2° On pose : $x = \operatorname{tg} t$. Calculer la dérivée y'_t.

636. 1° On donne : $y = a \cos \omega x + b \sin \omega x$ (x en radians). Calculer les dérivées y' et y'' de y par rapport à x.
2° Former une relation indépendante de x entre y et y', puis entre y et y''.

637. 1° On donne la fonction : $y = x \sin x + \cos x$ (x en radians). Calculer les dérivées y' et y'' de y par rapport à x.
2° Former entre x, y, y', y'' une relation ne contenant pas de fonctions circulaires.

638. 1° Calculer la dérivée de la fonction :

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x. \qquad (x \text{ en radians})$$

2° Étudier son signe pour $x \in [0; \pi]$.

— Vérifier que les expressions suivantes sont constantes, par un calcul direct, puis par le calcul de la dérivée :

639. $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x + 5\sin^2 x \cos^2 x$.

640. $\sin^8 x + \cos^8 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$.

641. $\cos 2x\,(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 1)$.

642. $\sin 2x\,(\operatorname{cotg} 2x - \operatorname{cotg} x)$.

VARIATION DES FONCTIONS

362. Théorème de Rolle. — ***Si une fonction** $f(x)$ **continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$ **admet des valeurs égales** $f(a)$ **et** $f(b)$, **sa dérivée** $f'(x)$ **s'annule pour au moins une valeur** c **de** x **comprise entre** a **et** b.*

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists\, c \in]a, b[\quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

Ce théorème, que l'on pourra admettre, est évident si $f(x)$ est constant sur $[c, d] \subset [a, b]$ car : $f(x) = f(c) \Longrightarrow f'(x) = 0$ sur $[c, d]$.

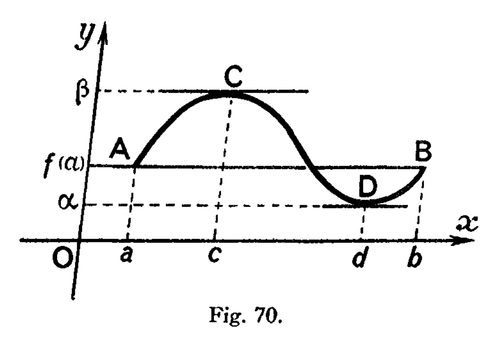


Fig. 70.

Dans le cas contraire, soit $[\alpha, \beta]$ l'ensemble des valeurs de $f(x)$ sur $[a, b]$. L'une au moins des bornes α et β est différente de $f(a)$. Supposons par exemple $\beta > f(a)$. Il existe au moins une valeur c de $]a, b[$ telle que $f(c) = \beta$. Cette valeur $f(c)$ est un maximum de $f(x)$ sur un voisinage $[d, e]$ de c. Puisque $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} : \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, on voit (n° 301, 2°) que :

$$\left.\begin{array}{l} d < x_1 < c \Longrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(c)}{x_1 - c} > 0 \Longrightarrow f'(c) \geqslant 0 \\ c < x_2 < e \Longrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} < 0 \Longrightarrow f'(c) \leqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(c) = 0.$$

On remarquera que le théorème de Rolle ne suppose pas l'existence de $f'(a)$ ou de $f'(b)$.

363. Interprétation géométrique. — Soit AB l'arc de la courbe $y = f(x)$ correspondant au segment $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle, si $f(a) = f(b)$, il existe sur l'arc AB un point C où la tangente est parallèle à Ox, donc parallèle à la corde AB (fig. 70).

364. Autre énoncé. — ***Entre deux racines** a **et** b **d'une fonction** $f(x)$ **continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$ **il existe au moins une racine** c **de la fonction dérivée** $f'(x)$.*

C'est l'application de l'énoncé général (n° 362) au cas où $f(a) = f(b) = 0$.

$$f(a) = f(b) = 0 \Longrightarrow \exists\, c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad f'(c) = 0.$$

Notons que le théorème de Rolle reste vrai si $b \to +\infty$ à condition (fig. 71) que $f(x) \to f(a)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Il s'applique de même si $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a ou vers b (fig. 72). Par contre on ne peut affirmer qu'il s'applique lorsque l'arc AB présente un point anguleux (fig. 73) car $f'(x)$ n'est pas définie d'une façon unique en ce point.

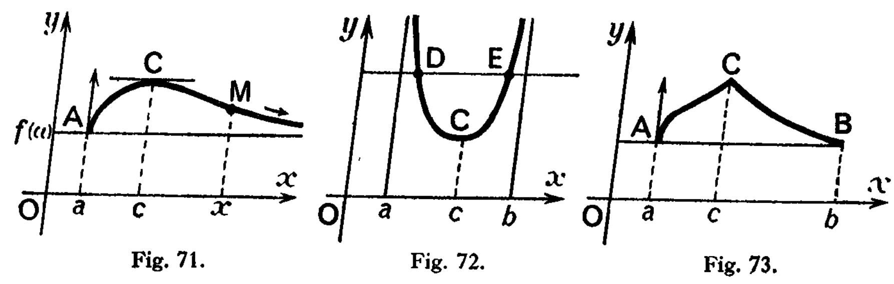


Fig. 71. Fig. 72. Fig. 73.

365. Théorème des accroissements finis. — ***Si une fonction*** $f(x)$ ***est continue sur*** $[a, b]$ ***et dérivable sur*** $]a, b[$, ***il existe au moins un point*** c ***de l'intervalle*** $]a, b[$ ***tel que :***

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)}$$

Considérons la fonction : $\varphi(x) = (b - a) f(x) - [f(b) - f(a)]\, x$.

Cette fonction est, comme $f(x)$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et :

$$\varphi'(x) = (b - a) f'(x) - [f(b) - f(a)]. \quad \text{Or : } \varphi(a) = \varphi(b) = bf(a) - af(b).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$(b - a) f'(c) - [f(b) - f(a)] = 0 \iff f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Relation qui s'écrit également : $\boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$ avec $c \in]a, b[$

366. Interprétation géométrique. — Elle est identique à celle du théorème de Rolle. En effet $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ n'est autre (fig. 74) que le coefficient directeur de la droite AB joignant les extrémités de l'arc AB de la courbe $y = f(x)$ sur $[a, b]$. D'autre part $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à cet arc au point C :

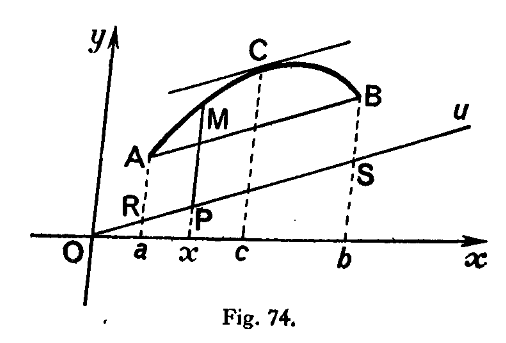


Fig. 74.

Sur l'arc AB ***de la courbe*** $y = f(x)$, ***il existe au moins un point*** C ***où la tangente est parallèle à la corde*** AB.

Si nous menons la droite Ou parallèle à AB d'équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$, la fonction auxiliaire $\varphi(x)$ envisagée ci-dessus s'écrit :

$$\varphi(x) = (b - a)\left[f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x\right] = (b - a)\,[y_M - y_P] = (b - a)\,\overline{PM}.$$

Or $\overline{PM}$ prend des valeurs égales pour $x = a$ et $x = b$ ce qui explique que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

367. Remarque. — La valeur $c \in]a, b[$ qui intervient dans le théorème des accroissements finis est rarement connue exactement (cf. ex. nº 643). Elle permet cependant une évaluation approchée du rapport des accroissements $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ sur $[a, b]$. Soit $[\alpha, \beta]$ le segment formé par les valeurs prises par $f'(x)$ sur $[a, b]$. On a : $f'(c) \in [\alpha, \beta]$ ce qui avec $\alpha < \beta$ entraîne : $\alpha \leqslant \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant \beta$. On peut même affirmer que :

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \in [\alpha, \beta].$$

Cette approximation de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ est très utile dans de nombreuses applications.

368. Sens de variation et signe de la dérivée. — 1º Si une fonction $y = f(x)$ est constante sur $[a, b]$, sa dérivée est nulle sur $[a, b]$ car (nº 334) :

$$f(x) = C \implies f'(x) = 0$$

2º Si la fonction $y = f(x)$ est croissante sur $[a, b]$ le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ est positif quels que soient x et x_1. Sa limite $f'(x)$ lorsque x_1 tend vers x ne saurait être négative (nº 301, 2º). Elle est donc *positive* ou *nulle.*

3º Si la fonction $y = f(x)$ est décroissante sur $[a, b]$ le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est cette fois négatif et sa limite $f'(x)$ est ***négative*** ou ***nulle.***

Les réciproques de ces propositions ont, jusqu'ici, été admises par réciprocité. Établissons le théorème suivant :

369. Théorème fondamental. — ***Une fonction dérivable $f(x)$ est constante sur tout intervalle où sa dérivée $f'(x)$ est nulle. Elle est croissante sur tout intervalle où sa dérivée est positive. Elle est décroissante sur tout intervalle où sa dérivée est négative.***

1º Si $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$, on peut, $\forall x \in [a, b]$, écrire d'après le théorème des accroissements finis :

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = 0 \quad \text{car} \quad c \in]a, x[\implies f'(c) = 0.$$

Donc : $f(x) = f(a)$ c'est-à-dire $f(x) = C$.

2º Si $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$, on obtient : $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ et $x_3 \in]x_1, x_2[$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) > 0 \implies f(x) \textit{ croissante sur } [a, b].$$

3º Si $f'(x) < 0$ sur $]a, b[$, on obtient dans les mêmes conditions :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) < 0 \implies f(x) \textit{ décroissante sur } [a, b]$$

— Remarquons que cette démonstration suppose seulement $f'(x)$ nulle, positive ou négative sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et que cela entraîne $f(x)$ constante, croissante ou décroissante sur le segment $[a, b]$.

D'autre part une fonction croissante ou bien décroissante sur $[a, b]$ ne peut avoir une dérivée nulle sur un segment $[c, d] \in [a, b]$, sinon elle serait constante sur $[c, d]$. Autrement dit :

La dérivée d'une fonction monotone (croissante ou décroissante) ne peut s'annuler que pour des valeurs isolées de la variable.

370. Corollaire. — ***Lorsque deux fonctions ont même dérivée sur un intervalle donné, leur différence est constante sur cet intervalle.***

Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ont des dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$ égales en tout point du segment $[a, b]$, la fonction $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ admet, en tout point de $[a, b]$, pour dérivée $\varphi'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$. Donc : $\varphi(x) = g(x) - f(x) = C$ sur $[a, b]$.

$$\forall x \in [a, b], f'(x) = g'(x) \Longrightarrow g(x) - f(x) = C.$$

371. Application à la variation de la fonction $y = f(x)$. — Le théorème du n° 369 remplace avantageusement la règle du n° 295 pour l'étude d'une fonction dérivable $y = f(x)$.

L'existence de $f'(x)$ entraîne la continuité de $f(x)$ sur tout intervalle où $f'(x)$ est définie. Le signe de $f'(x)$ permet de distinguer les intervalles où la fonction $f(x)$ est soit croissante soit décroissante. On peut alors établir un tableau de variation que l'on complète par l'indication des valeurs remarquables de $f(x)$: maxima, minima, valeurs limites aux bornes des divers intervalles du tableau. On termine par le tracé de la courbe représentative ou graphe de la fonction $y = f(x)$.

COURBES D'ÉQUATION $y = f(x)$

372. Tangente à la courbe $y = f(x)$. — Rappelons que (n° 330) :

Le coefficient directeur de la tangente au point $M(x, y)$ ***de la courbe*** (C) ***d'équation*** $y = f(x)$ ***est égal à*** $y' = f'(x)$.

Cette tangente (fig. 75) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MT}$ de composantes $(1, y')$ ou (a, ay'). On peut ainsi effectuer un tracé précis de (C) par points et tangentes. On conservera sur le graphe les tangentes horizontales ($y' = 0$) parallèles à Ox, les tangentes d'inflexion ($y'' = 0$) et les tangentes aux extrémités des arcs de (C) situés à distance finie.

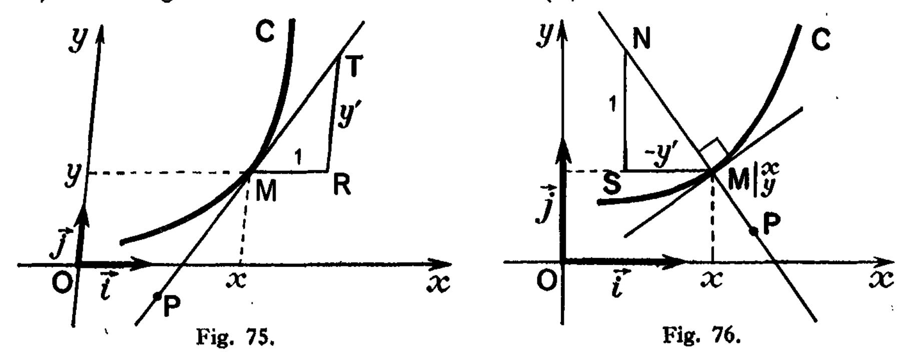


Fig. 75. Fig. 76.

Si P (X, Y) désigne le point courant de cette tangente (fig. 75), son équation s'obtient en écrivant que :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y - y}{X - x} = y' \Longleftrightarrow \boxed{Y - y = y'(X - x)} \qquad (1)$$

ou en fonction de x seulement : $$Y = f(x) + (X - x)f'(x) \qquad (2)$$

On peut alors déterminer :

1° *Les tangentes à* (C) *parallèles à la direction* (1, m). — On obtient les abscisses des points de contact en résolvant l'équation : $f'(x) = m$.

2° *Les tangentes à* (C) *issues du point* R(α, β). — D'après (2), il faut et il suffit que l'abscisse x du point de contact soit racine de l'équation : $\beta = f(x) + (\alpha - x)f'(x)$.

373. Normale à la courbe $y = f(x)$. — Dans un repère orthonormé les directions de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires si $1 + mm' = 0$, c'est-à-dire si $m' = -\frac{1}{m}$. Il en résulte que :

***Dans un repère orthonormé, le coefficient directeur de la normale au point* M(x, y) *de la courbe* $y = f(x)$ *est égal à* $-\frac{1}{y'}$.**

Cette normale (fig. 76) est donc le support du vecteur $\overrightarrow{MN}$ de composantes $\left(1, -\frac{1}{y'}\right)$ ou $(-y', 1)$ et son équation s'écrit :

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \iff \boxed{X + y'Y - x - yy' = 0} \qquad (1)$$

ou en fonction de x seulement : $$X + Yf'(x) - x - f(x)f'(x) = 0 \qquad (2)$$

Les points de la courbe (C) dont les normales passent par un point donné R (α, β) ont donc pour abscisses les racines de l'équation en x :

$$\alpha + \beta f'(x) - x - f(x)f'(x) = 0.$$

374. Concavité d'un arc de courbe. — L'axe Oy du repère cartésien xOy étant supposé vertical, on dit qu'un arc de la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs suivant qu'il se trouve tout entier situé au-dessus ou au-dessous de la tangente en l'un quelconque de ses points.

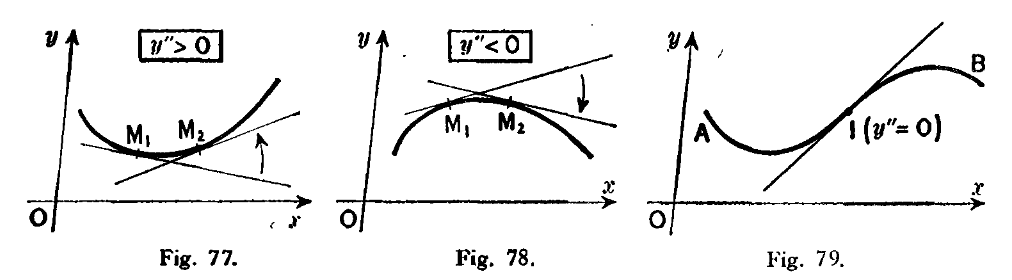


Fig. 77. Fig. 78. Fig. 79.

On vérifie, géométriquement, sur les figures 77 et 78, que le coefficient directeur $y' = f'(x)$ de la tangente en M (x, y) est une fonction de x, croissante dans le premier cas, décroissante dans le second. La concavité d'un arc de courbe est donc déterminée par le signe de $y'' = f''(x)$ et nous admettrons que :

Une courbe* $y = f(x)$ *tourne sa concavité du côté des* y *positifs sur tout intervalle où* y'' *est positif, du côté des* y *négatifs sur tout intervalle ou* y'' *est négatif.

Signalons que l'on dit alors que la fonction $y = f(x)$ est *convexe* sur tout intervalle où y'' est positif, *concave* sur tout intervalle où y'' est négatif.

375. Points d'inflexion. — Un point I de l'arc AB de la courbe $y = f(x)$ est un point d'inflexion si les deux arcs AI et IB sont de part et d'autre de la tangente en I (fig. 79). Un tel point correspond donc à un changement de concavité, c'est-à-dire à un changement de signe de y''.

La courbe $y = f(x)$ admet un point d'inflexion pour toute valeur de x pour laquelle y'' change de signe.

Les points d'inflexion sont en général des points pour lesquels on a $y'' = 0$, ou éventuellement des points pour lesquels y'' devient infini.

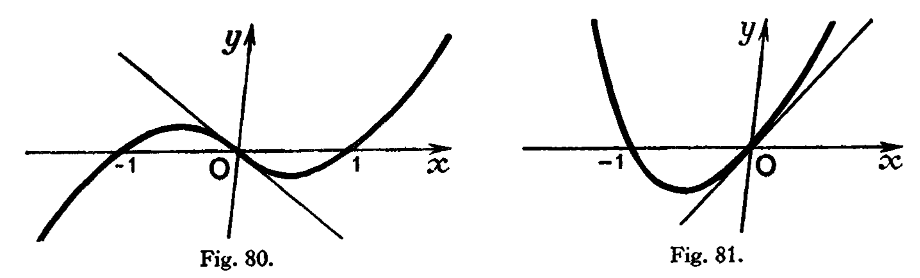


Fig. 80. Fig. 81.

Exemples. — La courbe $y = x^3 - x$ admet le point O comme point d'inflexion car $y'' = 6x$ s'annule en changeant de signe pour $x = 0$.

La courbe $y = x^{5/3} - x$ admet le point O comme point d'inflexion car $y'' = \frac{10}{9} x^{-1/3}$ change de signe en devenant infini pour $x = 0$. Les deux courbes ont même allure (fig. 80).

Lorsque y'' s'annule sans changer de signe, on dit qu'on a affaire à une *inflexion non apparente* ou que la courbe $y = f(x)$ présente un *point méplat*. Il en est ainsi de la courbe $y = x^4 + x$ pour $x = 0$ car $y'' = 12x^2$ (fig. 81). Que l'inflexion soit apparente ou non, il faut toujours construire tout point d'inflexion ainsi que la tangente d'inflexion correspondante.

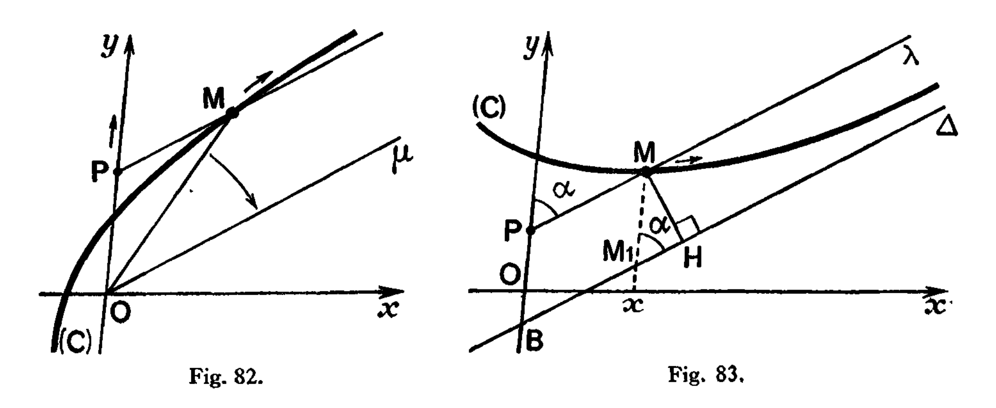


Fig. 82. Fig. 83.

BRANCHES INFINIES

376. Définitions. — Une courbe (C) admet une *branche infinie* si la distance OM du point $M(x, y)$ à l'origine O des coordonnées devient infinie lorsque M parcourt la courbe. Il en est ainsi dès que l'une des coordonnées x ou y du point M devient infinie.

1° Supposons que le point M (x, y) s'éloigne indéfiniment sur une branche infinie de (C). Si le coefficient directeur $\frac{y}{x}$ de OM tend vers une limite finie m ou infinie, la droite OM admet une position limite Oμ, appelée ***direction asymptotique de la courbe*** (C) (fig. 82). Ce sera la droite $y = mx$ si $\frac{y}{x} \longrightarrow m$, la droite O$y$ si $\frac{y}{x}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

2° ***On dit que la droite*** Δ ***est une asymptote de la courbe*** (C) ***si la distance*** MH ***du point*** M ***à la droite*** Δ ***tend vers zéro lorsque*** M ***s'éloigne indéfiniment sur la courbe.***

On dit aussi que la courbe (C) est asymptote à la droite Δ (fig. 83) (le mot asymptote s'emploie comme le mot tangente).

377. Asymptotes parallèles aux axes. — ***La courbe*** $y = f(x)$ ***est asymptote à la droite*** $x = a$ ***si*** $f(x)$ ***tend vers l'infini lorsque*** x ***tend vers*** a ***(à gauche ou à droite). Elle est asymptote à la droite*** $y = b$ ***si*** $f(x)$ ***tend vers*** b ***lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$ ***(ou*** $-\infty$***).***

1° Ainsi (fig. 84.) la courbe $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ est asymptote à la droite $x = 1$ car lorsque x tend vers 1 à gauche, y tend vers $+\infty$. Le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe et la distance MH $\leqslant$ MK $= |1 - x|$ tend vers 0.

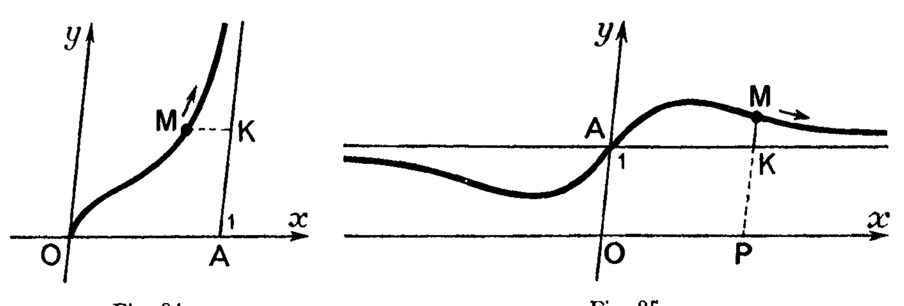


Fig. 84. Fig. 85.

2° La courbe $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$ est asymptote à la droite $y = 1$ (fig. 85) lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ car $\text{MH} \leqslant \text{MK} = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ tend vers 0.

378. Asymptotes obliques. — Soit Δ une asymptote d'équation $y = mx + p$ de la courbe (C) d'équation : $y = f(x)$. Désignons par M (x, y) et M_1 (x, y_1) les points de même abscisse x de (C) et de Δ et par α l'angle aigu (Oy, Δ). On obtient (fig. 83) :

$$\text{MH} = \text{M}_1\text{M} \sin\alpha \quad \text{et} \quad \overline{\text{M}_1\text{M}} = y - y_1 = f(x) - (mx + p).$$

Pour que MH tende vers 0, lorsque x devient infini, il faut et il suffit que $\overline{\text{M}_1\text{M}}$ soit une fonction $\varepsilon(x)$ admettant 0 pour limite lorsque x devient infini :

Pour que la courbe $y = f(x)$ ***soit asymptote à la droite*** $y = mx + p$ ***il faut et il suffit que l'on ait :*** $f(x) = mx + p + \varepsilon(x)$.

La courbe est située au-dessus de l'asymptote si $\varepsilon(x)$ est positif, au-dessous si $\varepsilon(x)$ est négatif.

Il en est ainsi lorsque $f(x)$ est une fraction rationnelle $y = \frac{A(x)}{B(x)}$ où $A(x)$ et $B(x)$ désignent des polynômes de degrés respectifs n et $n - 1$. On peut écrire :

$$A(x) = (mx + p)\,B(x) + C(x) \iff y = mx + p + \frac{C(x)}{B(x)}.$$

Le degré de $C(x)$ étant inférieur à celui de $B(x)$, la fraction $\frac{C(x)}{B(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (n° 313).

Exemple. — La courbe $y = \frac{2x^2 - x - 5}{x - 2}$ ou $y = 2x + 3 + \frac{1}{x - 2}$ est asymptote à la droite $y = 2x + 3$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$. Comme $\varepsilon(x) = \frac{1}{x - 2}$ on voit que la courbe est située au-dessus de l'asymptote pour $x > 2$, au-dessous pour $x < 2$.

379. Théorème. — ***Si la courbe*** $y = f(x)$ ***est asymptote à la droite*** $y = mx + p$, ***les coefficients*** m ***et*** p ***sont respectivement les limites sur la courbe de*** $\frac{y}{x}$ ***et de*** $y - mx$ ***lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$ ***ou vers*** $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{c} y = mx + p + \varepsilon(x) \\ \text{lorsque } x \to \pm\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim \frac{y}{x} = \lim \left[m + \frac{p}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}\right] = m \\ \lim (y - mx) = \lim [p + \varepsilon(x)] = p. \end{array}\right.$$

Il en résulte que m n'est autre que le coefficient directeur d'une direction asymptotique.

Exemple. — Soit la courbe $y = 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$. Lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\frac{y}{x} = 2 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \to 3. \quad \text{Donc } m = 3.$$

$$y - 3x = 1 - (x - \sqrt{x^2 + 1}) = 1 - \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \to 1. \quad \text{Donc } p = 1.$$

Comme $y = 3x + 1 + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ la courbe est située, lorsque $x \to +\infty$ au-dessus de son asymptote $y = 3x + 1$. On montrera de même qu'elle est située au-dessus de son asymptote $y = x + 1$ lorsque x tend vers $-\infty$ car $y = x + 1 + \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

380. Corollaire. — ***L'asymptote*** $y = mx + p$ ***est, lorsqu'elle existe, la position limite de la parallèle*** $M\lambda$ ***à la direction asymptotique*** $y = mx$ ***lorsque*** x ***devient infini.***

L'équation de cette parallèle s'écrit : $Y - y = m(X - x)$ ou $Y = mX + (y - mx)$.

Comme $y - mx$ tend vers p cette parallèle tend vers la droite $Y = mX + p$ (fig. 83).

Remarque. — On peut démontrer (cf. ex. n° 648) que si la tangente en M admet une position limite, lorsque M s'éloigne à l'infini sur la courbe (C), cette position limite est l'asymptote Δ. C'est pourquoi on peut dire qu'une asymptote n'est autre que la tangente au point à l'infini de la courbe (C).

381. Branches paraboliques. — Si la droite $M\lambda$, parallèle à la direction asymptotique $O\mu$ n'admet pas de position limite, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe, il n'y a pas d'asymptote parallèle à $O\mu$.

Ceci peut se produire, comme pour $y = mx + \sin x$, parce que $y - mx$ n'admet aucune limite. En général, il n'y a pas d'asymptote parallèle à Oμ parce que la droite Mλ s'éloigne indéfiniment en même temps que M (fig. 82) :

On dit alors que la courbe admet une branche infinie parabolique.

Il en est ainsi lorsque $y - mx$ devient infini en même temps que x. Par exemple : $y = 3x + \sqrt{x+1}$ admet $y = 3x$ comme direction asymptotique, mais la branche de courbe correspondante est parabolique car $y - 3x = \sqrt{x+1} \longrightarrow +\infty$ en même temps que x.

Il en est de même lorsque $\frac{y}{x}$ tend vers l'infini en même temps que x. La courbe admet la direction asymptotique Oy mais la droite Mλ d'abscisse x s'éloigne indéfiniment lorsque x devient infini. Il en est ainsi pour $y = x^2$, $y = ax^3 + bx$ et $y = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme de degré $n > 1$.

382. Résumé. — La marche à suivre pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction peut se résumer ainsi :

1° On étudie les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie et continue.
On calcule la dérivée $y' = f'(x)$ et on étudie son signe.

2° On établit un tableau de variation indiquant dans chaque intervalle le sens de variation par une flèche ↗ ou ↘, les valeurs limites de y et y' aux bornes de ces intervalles, les maxima et les minima.

3° On calcule y'' et on détermine la concavité et les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (Les résultats peuvent être inclus dans le tableau précédent.) Puis, s'il y a lieu, on recherche les asymptotes non parallèles aux axes.

4° On construit la courbe représentative en utilisant les résultats trouvés ainsi que les éléments de symétrie ou de translation que la courbe peut présenter. On détermine en plus, autant de points et tangentes particuliers que cela est nécessaire pour assurer un tracé précis que l'on effectuera d'un trait noir et bien ferme. Utiliser toujours une échelle assez grande.
Les indications des axes et des coordonnées remarquables seront portées correctement. Les asymptotes et les tangentes particulières seront tracées en trait fin noir ou de couleur.

FONCTION $y = ax^2 + bx + c$

383. Variations de la fonction $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. Sa dérivée $y' = 2ax + b$, qui s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$, est du signe de a pour $x > -\frac{b}{2a}$, du signe opposé pour $x < -\frac{b}{2a}$.

1er Cas : *a positif*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

2e Cas : *a négatif*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

La fonction $y = ax^2 + bx + c$ admet pour $x = -\frac{b}{2a}$, la valeur $\frac{4ac - b^2}{4a}$ pour minimum ou pour maximum suivant que a est positif ou négatif.

D'autre part lorsque x tend vers l'infini, y tend vers $+\infty$ pour $a > 0$, vers $-\infty$ pour a négatif (n° 312).

384. Théorème. — ***Dans un repère rectangulaire, la courbe $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole admettant pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$ et pour tangente au sommet la droite $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.***

Puisque $y'' = 2a$ la courbe tourne sa concavité du côté des y positifs pour $a > 0$ (fig. 86), du côté des y négatifs pour $a < 0$ (fig. 87).

Soit $\omega\left[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$ le sommet de la courbe. La translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ amène le repère xOy en $X\omega Y$ et $X = x + \frac{b}{2a}$; $Y = y - \frac{4ac - b^2}{4a}$. La courbe admet pour équation réduite :

$$\boxed{Y = aX^2}.$$

Si le repère $X\omega Y$ est orthonormé, on vérifie que le lieu des points équidistants du point $F\left(X = 0, Y = \frac{1}{4a}\right)$ et de la droite Δ, d'équation : $Y = -\frac{1}{4a}$ a pour équation :

$$X^2 + \left(Y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(Y + \frac{1}{4a}\right)^2 \implies X^2 = \frac{Y}{a} \quad \text{ou} \quad Y = aX^2.$$

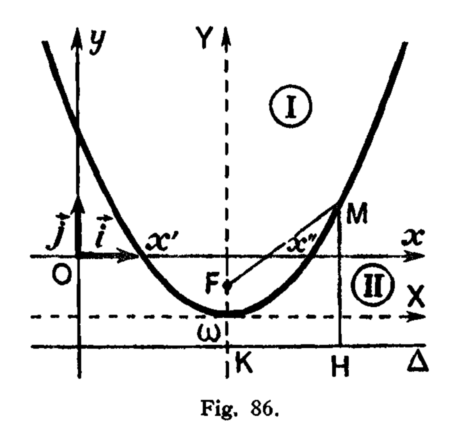


Fig. 86.

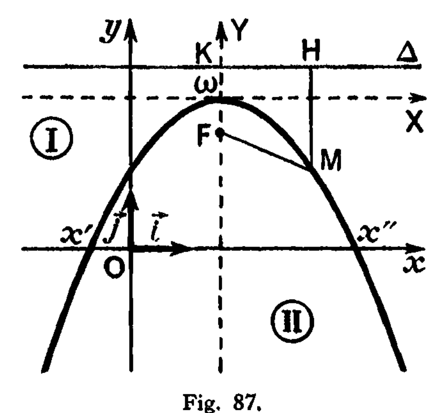


Fig. 87.

En revenant au repère orthonormé xOy, on voit que la parabole $y = ax^2 + bx + c$ a pour foyer $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ et pour directrice $\Delta : y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

Son paramètre p est tel que $X^2 = 2pY$ donc : $p = \frac{1}{2a}$.

Notons que la courbe partage le plan en deux régions :

La région (I) au-dessus de la courbe où : $y > ax^2 + bx + c$.

La région (II), au-dessous de la courbe où : $y < ax^2 + bx + c$.

On pourra donc résoudre graphiquement toute inéquation de la forme :

$$Ax^2 + Bx + Cy + D > 0.$$

FONCTION HOMOGRAPHIQUE

385. Variation de la fonction $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$

Cette fonction est définie et continue sur les intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[$.

Sa dérivée : $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ est sur chacun de ces intervalles, du signe de $ad - bc$.

1er Cas : $ad - bc > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
y'	$+$	‖	$+$
y	$\dfrac{a}{c}$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $\dfrac{a}{c}$

2e Cas : $ad - bc < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$\dfrac{a}{c}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\dfrac{a}{c}$

Sur chacun des intervalles où elle est définie la fonction $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est croissante ou décroissante suivant que*** $ad - bc$ ***est positif ou négatif.***

Si $ad - bc = 0$ la fonction se réduit à $y = \dfrac{a}{c}$ pour $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

386. Théorème. — ***Dans tout repère la courbe*** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ***est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites*** $x = -\dfrac{d}{c}$ ***et*** $y = \dfrac{a}{c}$ (fig. 88 et 89).

Soit ω le point de rencontre des asymptotes et $X\omega Y$ le repère qui se déduit de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$. Les formules : $x = -\dfrac{d}{c} + X$ et $y = \dfrac{a}{c} + Y$ conduisent en posant : $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$ à l'équation réduite :

$$\boxed{Y = \frac{k}{X}} \quad \text{ou} \quad \boxed{XY = k}$$

L'hyperbole est équilatère lorsque le repère xOy est rectangulaire. Dans tous les cas le point ω est le centre de symétrie de la courbe qui admet d'autre part pour axes de symétrie les bissectrices des angles formés par les asymptotes.

1° La courbe $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ou $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ est une hyperbole, admettant pour asymptotes les droites $x = 1$ et $y = 2$. Elle est située dans les régions I et III limitées par ces asymptotes.

2° La courbe $y = \frac{x-1}{x+1}$ ou $y = 1 - \frac{2}{x+1}$ est une hyperbole, dont les asymptotes ont pour équations $x = -1$ et $y = 1$. Elle est située dans les régions II et IV limitées par ces asymptotes.

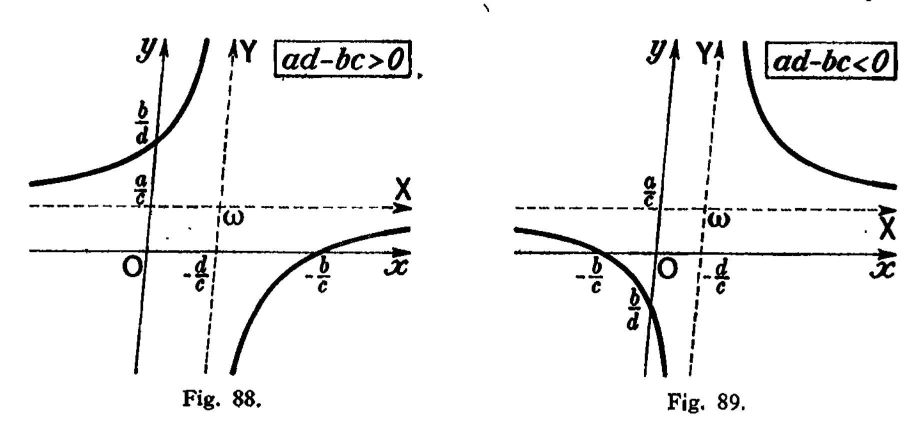


Fig. 88. Fig. 89.

387. Relation homographique : $Axy + Bx + Cy + D = 0$ (1)

C'est une relation du premier degré en x et du premier degré en y. A chaque valeur de x correspond donc une seule valeur de y et réciproquement.

1° $A = 0$. — La relation est du premier degré en x et y. Elle est donc représentée graphiquement par une droite : $Bx + Cy + D = 0$.

2° $A \neq 0$. — En posant $\frac{B}{A} = -\beta$, $\frac{C}{A} = -\alpha$ et $\frac{D}{A} = \gamma$, la relation (1) s'écrit :

$$xy - \alpha y - \beta x + \gamma = 0 \quad (2) \implies (x-\alpha)(y-\beta) = \alpha\beta - \gamma.$$

soit en posant $\alpha\beta - \gamma = k \implies \boxed{(x-\alpha)(y-\beta) = k}$. (3)

Si $x \neq \alpha$ on obtient : $y = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$.

La courbe représentative est une hyperbole d'asymptotes : $x = \alpha$ ***et*** $y = \beta$.

Cette hyperbole se réduit à ses asymptotes pour $k = 0 \implies (x-\alpha)(y-\beta) = 0$.

Si $B = C$, la relation (1), symétrique en x et y, est dite ***involutive***.

REMARQUE. — On obtient $y = x$ si : $x^2 - (\alpha + \beta)x + \gamma = 0$.

D'où, sur C, deux racines a et b, appelées *valeurs doubles*, distinctes ou confondues telles que : $a + b = \alpha + \beta$ et $ab = \gamma$. La relation (2) s'écrit alors :

1° $\frac{y-a}{y-b} = \lambda \frac{x-a}{x-b}$ avec $\lambda = \frac{\beta - a}{\beta - b} = \frac{\alpha - b}{\alpha - a}$ pour $a \neq b$.

2° $\frac{1}{y-a} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{\mu}$ avec $\mu = \beta - a = a - \alpha$ pour $a = b$.

FONCTION $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

388. Fonction générale du troisième degré. — La fonction du troisième degré $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est définie et continue quel que soit x.

Sa dérivée $y' = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$ est un trinôme de 2e degré dont le signe dépend de $\Delta = b^2 - 3\,ac$. Il est donc possible d'étudier les variations de cette fonction.

1er cas : $\Delta = b^2 - 3\,ac \leqslant 0$. Le trinôme $3\,ax^2 + 2\,bx + c$ n'a pas de racines réelles ou une racine double $x = -\dfrac{b}{3a}$. Il est du signe de a sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{b}{3a}\right[$ et $\left]-\dfrac{b}{3a}, +\infty\right[$. Donc $y = f(x)$ est une fonction monotone sur $]-\infty, +\infty[$, croissante de $-\infty$ à $+\infty$ pour $a > 0$, décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ pour $a < 0$, ne présentant ni maximum, ni minimum. La courbe $y = f(x)$ qui admet deux branches paraboliques de direction Oy et Oy', a la disposition de la figure 90 pour $a < 0$, la disposition symétrique par rapport à Ox pour $a > 0$.

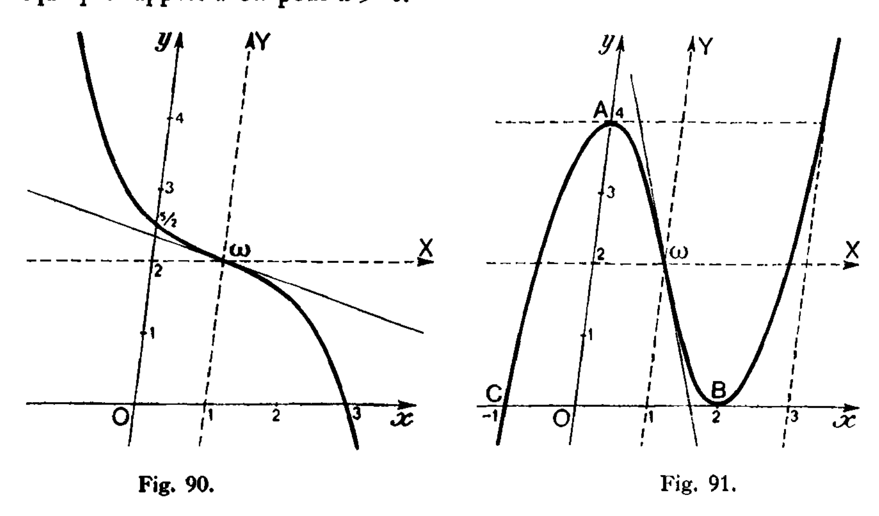


Fig. 90. Fig. 91.

2e cas : $\Delta = b^2 - 3\,ac > 0$. La dérivée $y' = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$ s'annule en changeant de signe pour deux valeurs distinctes α et β. On obtient :

a positif

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

a négatif

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	m	↗	M	↘	$-\infty$

La fonction présente cette fois un maximum M, un minimum m et la courbe $y = f(x)$

qui a deux sommets A et B comme sur la figure 91, admet encore deux branches paraboliques de directions asymptotiques Oy et Oy'.

— La dérivée $y'' = 6ax + 2b$ s'annule en changeant de signe pour $x = -\frac{b}{3a}$.

La courbe $y = f(x)$ admet toujours pour point d'inflexion le point ω d'abscisse $x = -\frac{b}{3a}$ et d'ordonnée $y = f\left(-\frac{b}{3a}\right) = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$. Rapportée au repère $X\omega Y$ se déduisant de xOy dans la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ et compte tenu des relations :

$$X = x + \frac{b}{3a} \quad ; Y = y - f\left(-\frac{b}{3a}\right),$$

on obtient l'équation réduite :

$$Y = aX^3 + \frac{3ac - b^2}{3a} X.$$

Y est donc une fonction impaire de X. *La courbe $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet donc son point d'inflexion pour centre de symétrie.*

389. Discussion de l'équation du 3e degré. — Il résulte de l'étude précédente que la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ varie d'une façon continue soit de $-\infty$ à $+\infty$ soit de $+\infty$ à $-\infty$. Elle admet donc au moins une racine réelle (n° 323). Elle en admet trois dans le seul cas où $f(x)$ admet un maximum $f(\alpha)$ et un minimum $f(\beta)$ de signes contraires.

EXEMPLES.

1° $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ a une seule racine réelle car $f'(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$ ne change pas de signe et $f(x)$ est monotone sur $]-\infty, +\infty[$.

2° $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + m = 0$. La dérivée $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$ s'annule pour $x = -1$ et $x = 2$. Or $f(-1)\,f(2) = (m + 7)(m - 20)$. On en déduit que pour $-7 < m < 20$ l'équation a trois racines distinctes, une seule pour $m > 20$ ou $m < -7$. Pour $m = -7$, on a : $f(-1) = f'(-1) = 0$, on en déduit (n° 356) que -1 est racine double. De même pour $m = 20$, on a : $f(2) = f'(2) = 0$, c'est $+2$ qui est racine double.

390. Cas de l'équation : $x^3 + px + q = 0$. Montrons d'abord que l'on peut toujours ramener à cette forme l'équation générale : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ qui s'écrit :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + d = 0 \iff \left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \lambda x + \mu = 0.$$

En posant : $x + \frac{b}{3a} = X$ on obtient : $X^3 + pX + q = 0$.

Ceci dit, l'équation $f(x) \equiv x^3 + px + q = 0$ a trois racines distinctes si et seulement si $f(x)$ admet un maximum et un minimum de signes contraires. Or $f'(x) = 3x^2 + p$ s'annule si p est négatif pour $x = \alpha = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ et pour $x = -\alpha$.

La condition $f(\alpha).f(-\alpha) < 0$ s'écrit puisque $p = -3\alpha^2$:

$(\alpha^3 + p\alpha + q)(-\alpha^3 - p\alpha + q) < 0 \iff (-2\alpha^3 + q)(2\alpha^3 + q) < 0$ ou $-4\alpha^6 + q^2 < 0$

ce qui donne : $4p^3 + 27q^2 < 0$, condition qui implique $p < 0$.

Si $4p^3 + 27q^2 = 0$ on a : $f(\alpha).f(-\alpha) = 0$. Il y a donc une racine double (α ou $-\alpha$) vérifiant (n° 356) $f(x) = f'(x) = 0$ et une racine simple x_1. La racine double x_2 vérifie : $3f(x) - xf'(x) = 0$ donc $2px + 3q = 0$, ce qui donne : $x_2 = -\frac{3q}{2p}$. En identifiant $f(x)$ et $(x - x_1)(x - x_2)^2$ on trouve $x_1 = -2x_2$ donc $x_1 = \frac{3q}{p}$. En résumé :

$4p^3 + 27q^2 < 0$:	*3 racines réelles distinctes.*
$4p^3 + 27q^2 = 0$:	*1 racine simple* $\frac{3q}{p}$, *une racine double* $-\frac{3q}{2p}$.
$4p^3 + 27q^2 > 0$:	*1 seule racine réelle.*

FONCTION $y = ax^4 + bx^2 + c$

391. Trinôme bicarré. — La fonction $y = ax^4 + bx^2 + c$ est un trinôme du second degré en x^2. Cette fonction est définie et continue quel que soit x. Sa dérivée :

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

admet dans tous les cas la racine $x = 0$. Elle admet deux racines opposées si a et b sont de signes contraires.

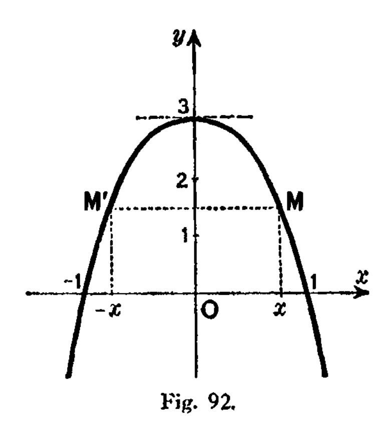


Fig. 92.

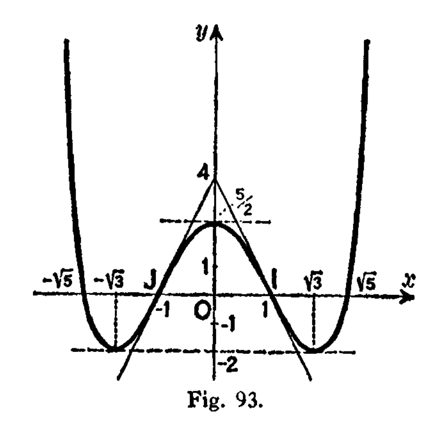


Fig. 93.

La variation et le graphe de la fonction : $y = ax^4 + bx^2 + c$ dépendent du signe de $\frac{b}{a}$.

1° $\frac{b}{a} \geqslant 0$. La dérivée $y' = 4ax\left[x^2 + \frac{b}{2a}\right]$ a une seule racine $x = 0$ et est du signe de ax. La fonction admet un minimum ou un maximum pour $x = 0$ suivant que a est positif ou négatif. La courbe représentative, en forme de U, est concave du côté des y positifs pour $a > 0$, du côté des y négatifs (fig. 92) pour $a < 0$.

2° $\frac{b}{a} < 0$. La dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. La courbe représentative, symétrique par rapport à Oy, possède trois sommets et présente la disposition de la figure 93 pour $a > 0$, et la disposition symétrique pour $a < 0$.

Dans tous les cas, les intersections avec Ox ont pour abscisses les racines réelles de l'équation : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

EXERCICES

643. 1° Soit $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Démontrer que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2° En déduire que, dans le cas d'une fonction du second degré la valeur c telle que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \text{ est égale à } \frac{a+b}{2}.$$

644. Soit $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Démontrer les égalités suivantes :

1° $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}[f'(b) + f'(a)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f''(b) - f''(a)]$.

2° $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}[f'(b) + f'(a)] - \frac{(b-a)^3}{12} f'''$.

645. Soit la fonction $f(x) = Ax^5 + Bx^4$. Démontrer que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}[f'(b) + f'(a)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f''(b) - f''(a)] + \frac{(b-a)^5}{6!} f^{(5)}.$$

Généraliser pour tout polynôme du 5e degré en x.

646. On considère les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On envisage la fonction : $\varphi(x) = [g(b) - g(a)] f(x) - [f(b) - f(a)] g(x)$.

1° Montrer que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2° Retrouver le théorème des accroissements finis d'après la formule précédente.

647. On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues et dérivables sur $]a, b[$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$.

1° Démontrer, en utilisant le résultat de l'exercice précédent qu'il existe $x_1 \in]a, x]$ tel que si $x \in]a, b[$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

2° En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ou infinie l lorsque $x \to a$, il en est de même de $\frac{f(x)}{g(x)}$. Ce résultat reste valable même si $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas dérivables pour $x = a$ ou si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se présente sous une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque $x \to a$.

3° On suppose que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $g(a) = g'(a) = \cdots g^{(n-1)}(a) = 0$. Démontrer que si $\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \to l$ lorsque $x \to a$, il en est de même de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

648. Le graphe Γ d'une fonction $f(x)$ définie, continue et dérivable sur $[a, \infty[$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = mx + p$. La parallèle à Δ passant par A $[a; f(a)]$ coupe Oy au point P $(0, \beta)$. Soit M $[x, f(x)]$ un point quelconque de Γ.

1° Calculer de coefficient directeur $\varphi(x)$ de la droite PM et montrer que $\varphi(x)$ admet pour limite $\varphi(a) = m$ lorsque $x \to +\infty$. En déduire qu'il existe $c > a$ tel que $\beta = f(c) - cf'(c)$.

2° Montrer qu'il existe sur Γ un point C dont la tangente passe par P. Quelles sont les positions limites de P et de la tangente PC lorsque a tend vers $+\infty$.

3° En déduire que si la tangente en M admet une position limite lorsque x tend vers $+\infty$, cette position limite est l'asymptote Δ. Quelles sont les limites de $f'(x)$ et de $f(x) - xf'(x)$?

649. On considère une fonction $f(x)$ définie et continue sur $[b, c]$ et admettant sur ce segment des dérivées première et seconde $f'(x)$ et $f''(x)$. On suppose $f''(x) > 0$ sur $]b, c[$.

1° Montrer que pour tout $a \in]b, c[$, la fonction $\varphi(x) = f(x) - (x - a)f'(a)$ est continue et dérivable sur $[b, c]$ et qu'elle admet un minimum égal à 0 pour $x = a$.

2° En déduire que le graphe BC de la fonction $f(x)$ sur $[b, c]$ est tout entier situé au-dessus de la tangente en l'un quelconque A de ses points.

650. Reprendre l'exercice précédent en supposant cette fois $f''(x) < 0$ sur $]b, c[$.

651. Un polynôme s'écrit : $P(x) = x^3 Q(x) + ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

1° Calculer $P(x)$ et ses dérivées $P'(x)$ et $P''(x)$ pour $x = 0$.

2° Montrer que la tangente à la courbe $y = P(x)$ au point B $(x = 0)$ s'écrit $y = bx + c$.

3° Déterminer suivant le signe de a la position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de B.

— Construire la tangente en O aux courbes suivantes et étudier, au voisinage de O la position de la courbe par rapport à cette tangente.

652. $y = x^2$; $\quad y = x^2 - x^4$; $\quad y = 4x^3 - x$.

653. $y = \sqrt{x}$; $\quad y = \sqrt[3]{x}$; $\quad y = \sqrt[3]{x^2}$.

654. $y = \sqrt[5]{x^3}$; $\quad y = \sqrt[3]{x^5}$; $\quad y = \sqrt[5]{x^4}$.

655. $y = x^{\frac{5}{3}} - x$; $\quad y = x^{\frac{7}{3}} - x$; $\quad y = x - x^3$.

— Construire les tangentes aux graphes des fonctions suivantes, aux d'intersection avec Ox.

656. $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$; $\quad y = (x^2 - 1)^2$; $\quad y = \sqrt{x^2 - 1}$.

657. $y = \dfrac{x - 2}{x + 2}$; $\quad y = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$; $\quad y = \dfrac{(x - 2)^2}{x + 2}$.

658. $y = x^3 - x$; $\quad y = \sqrt[3]{x^3 - x}$; $\quad y = (x^3 - x)^{\frac{2}{3}}$

659. $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$; $\quad y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$; $\quad y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

— Déterminer lorsque $x \to \infty$ ou $-\infty$ les asymptotes aux courbes suivantes et préciser dans chaque cas la position de la courbe par rapport à son asymptote.

660. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $\quad y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1}$; $\quad y = \dfrac{x^2 + x - 4}{2(x + 3)}$.

661. $y = \sqrt{x^2 - 4x}$; $\quad y = \sqrt{x^2 + x + 1}$; $\quad y = \sqrt{4x^2 - x + 1}$.

662. $y = x + 2 + \sqrt{x^2 - 1}$; $\quad y = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$; $\quad y = \dfrac{x}{2} - \sqrt{x^2 + 3}$.

663. $y = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$; $\quad y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\quad y = \dfrac{x^3+x+1}{x^2-x+1}$.

664. A. — On propose de prouver que les courbes (C) d'équation :

$$y = x^2 + 2\,px + (p-1)^2$$

restent tangentes à une droite fixe quand p varie. On donnera deux démonstrations indépendantes l'une de l'autre, en utilisant successivement les deux méthodes suivantes :

1° Écrire en fonction de p l'équation de la tangente au point d'abscisse x de la courbe (C), puis déterminer cette tangente pour qu'elle ne dépende pas de p.

2° Déterminer d'abord p pour que la courbe (C) passe par un point M donné de coordonnées $x = \alpha$; $y = \beta$. Chercher dans quelle région du plan le point M doit être situé pour que le problème soit possible; cette région est limitée par une droite. Vérifier que (C) reste tangente à cette droite quel que soit p.

B — Inversement déterminer b et c en fonction de a pour que la courbe $y = ax^2 + bx + c$ reste tangente, quel que soit a, aux deux droites d'équations respectives : $y = -2\,x$; $\quad y = x - 3$.

665. 1° On considère la courbe (C) dont l'équation est $y = \dfrac{1}{x}$, M_1 et M_2 désignant les deux points de la courbe dont les abscisses sont respectivement, x_1 et x_2, montrer que l'équation de la droite M_1M_2 est :

$$X + x_1 x_2 Y - (x_1 + x_2) = 0 \qquad (1)$$

2° Soient A et B les deux points où M_1M_2 rencontre OX et OY. Montrer que les segments M_1M_2 et AB ont même milieu. Peut-on en déduire une construction par points de la courbe (C) si on en connaît un point ?

3° Montrer que l'on peut déduire de l'équation (1) l'équation de la tangente à la courbe (C) au point M_1 d'abscisse x_1. Retrouver cette équation en calculant, directement, le coefficient directeur de la tangente en M_1. Soient T_1, T'_1 les points où cette tangente rencontre OX et OY. Démontrer que M_1 est le milieu de $T_1T'_1$. Aire du triangle $T_1OT'_1$.

4° Dans un repère orthonormé, M_3 (x_3) désignant un troisième point de la courbe (C), calculer les coordonnées du point de rencontre H des hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$ et montrer que, quels que soient les points M_1, M_2, M_3 sur la courbe (C), H est aussi sur la courbe (C).

— Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

666. $y = \dfrac{1}{|x|}$ $\qquad$ **667.** $y = \dfrac{1}{|x| + x}$ $\qquad$ **668.** $y = |x^2 - 4x + 3|$

669. $y = |x^2 - 4x| + 3$ $\qquad$ **670.** $y = x^2 - 4|x| + 3$ $\qquad$ **671.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

672. 1° Étudier la variation de $y = x^2 - 5\,x + 6$.

2° En déduire le graphique des fonctions suivantes :

$y = x - 5\sqrt{x} + 6$; $\qquad y = x^4 - 5x^2 + 6$; $\qquad y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x} + 6$.

— Tracer sur une même figure les graphes des fonctions suivantes :

673. $y_1 = x^2 + x + 1$ et $y_2 = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

674. $y_1 = x^2 - 2x + 1$ et $y_2 = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$.

675. $y_1 = x^2 - 3x + 2$ et $y_2 = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

— Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations suivants :

676. $(x^2 - y)(x^2 + y^2 - 1) > 0$

677. $\begin{cases} y - x^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 6 > 0 \end{cases}$

678. $(y - x^2 + 4)(x^2 + y^2 - 9)(y + 4x^2) < 0$

679. $\begin{cases} y - x^2 + 3x - 2 < 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

680. Déterminer les régions du plan xOy où doit se trouver P (x, y) pour que l'équation en u

$$16u^2 + 4(x - 5)u + y - 3x + 5 = 0 \quad \text{ait:}$$

1° une racine comprise entre 0 et 1,
2° deux racines comprises entre 0 et 1.

681. Dans un repère orthonormé les coordonnées d'un point M du plan sont données par les équations :

$$\begin{cases} x = 100\,t\cos\alpha \\ y = 100\,t\sin\alpha - 4{,}9\,t^2 \end{cases}$$

où t est une variable, α un angle donné.

1° Éliminer t entre les équations, étudier les variations de y en fonction de x pour les valeurs positives de ces nombres. Quel est l'angle de la tangente à l'origine avec Ox? Construire la courbe dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

2° On donne maintenant x et y et l'on demande de calculer tg α. Dans quelle région du plan doit se trouver le point M pour qu'il y ait des solutions ?

3° *Application :* On donne $x = 600$; $y = 100$. Calculer les valeurs de α et de t.

682. 1° Écrire l'équation de la tangente à la courbe $y = ax^2 + bx + c$ au point d'abscisse x_0. Vérifier que le système formé par l'équation de la courbe et par celle de sa tangente a une racine double.

2° Réciproquement, calculer p en fonction de a, b, c, m pour que le système

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + p \end{cases}$$

ait une solution double (x_0, y_0). Calculer x_0 en fonction de m, a, b. Vérifier que la tangente à la courbe d'équation : $y = ax^2 + bx + c$, au point d'abscisse x_0 a pour équation : $y = mx + p$.

3° Application aux trois questions suivantes.

a) Tracer les deux courbes d'équations respectives :

$$y = x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad y = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{49}{16}.$$

Trouver les équations de leurs tangentes communes et les coordonnées des points de contact.

b) Prouver que la courbe d'équation : $y = x^2 + 2bx + (b - 1)^2$ reste tangente à une droite fixe quand b varie.

c) Calculer b et c pour que la courbe d'équation : $y = x^2 + bx + c$ soit tangente aux droites d'équations : $y = -2x$ et $y = x - 3$.

683. Sur la courbe (P) qui représente l'équation : $y = ax^2 + bx + c$, on considère le point A de coordonnées (x_0, y_0). Écrire l'équation sous la forme $y = a(x - x_0)^2 + b'(x - x_0) + c'$.

Déterminer b' et c' en fonction de a, b, c, x_0, y_0. Montrer que l'équation de la tangente en A à la courbe (P) est : $y = b'(x - x_0) + c'$.

Application : On donne le point A $(x_0 = -2, y_0 = -1)$ de la courbe (P) et le coefficient directeur $b' = +3$ de la tangente en A. Déterminer a de manière que (P) passe par le point de l'axe Ox ayant pour abscisse $+5$. Construire la courbe (P) dans ce cas particulier.

684. 1° On donne les deux équations :

(1) $x^2 - 5x + 2 = 0$ [racines x'_1 et x''_1 ; $x'_1 < x''_1$]

(2) $x^2 - 2x - 2 = 0$ [racines x'_2 et x''_2 ; $x'_2 < x''_2$]

Calculer les quatre racines.

Construire, dans un repère orthonormé, les deux courbes définies par les équations

$$y = x^2 - 5x + 2; \quad y = x^2 - 2x - 2.$$

(On prendra le centimètre pour unité de longueur.)

Montrer que ces deux courbes ont un seul point commun à distance finie; trouver ses coordonnées. En utilisant le signe de l'ordonnée de ce point commun, montrer comment on peut prévoir la réalité et le classement des racines des équations (1) et (2).

2° Plus généralement, on donne les deux équations

(3) $x^2 + (2m - 7)x + 4 - 2m = 0$ racines X'_1 et X''_1 ; $X'_1 < X''_1$

(4) $x^2 + (m - 3)x - (m + 1) = 0$ racines X'_2 et X''_2 ; $X'_2 < X''_2$.

Pour quelles valeurs de m, ces équations admettent-elles simultanément des racines ?

3° On considère les deux courbes (supposées tracées sur le même graphique) définies par les équations :

(C_1) $y = x^2 + (2m - 7)x + 4 - 2m$

(C_2) $y = x^2 + (m - 3)x - (m + 1)$.

Montrer que ces deux courbes ont, en général, un point commun A (cas d'exception). Trouver les coordonnées de A en fonction de m et discuter le signe de l'ordonnée de ce point commun.

4° Peut-on déterminer m pour que les équations (3) et (4) aient une racine commune ? Dans ce cas, résoudre les équations (3) et (4).

5° Comment choisir m pour que l'équation (3) admette une racine et une seule comprise entre les racines de l'équation (4). Dans ce cas, classer les quatre racines X'_1, X''_1, X'_2, X''_2. Vérifier pour $m = 1$.

6° Trouver la relation, indépendante de m, qui relie les coordonnées de A. En déduire le lieu de A quand m varie. Construire ce lieu.

685. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

2° En déduire les variations des fonctions suivantes et construire leurs graphiques :

$$y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}; \qquad y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}; \qquad y = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$$

686. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{2x - 5}{3x - 4}$.

2° En déduire le graphique des fonctions suivantes :

$$y = \left|\frac{2x - 5}{3x - 4}\right|; \qquad y = \frac{2|x| - 5}{3|x| - 4}; \qquad y = \frac{2x - 5}{3|x| - 4}.$$

— **Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs graphiques :**

687. $y = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

688. $y = \dfrac{1 - 3|x + 1|}{2 - |x + 1|}$.

689. $y = \dfrac{1 - 3\sqrt{x + 1}}{2\sqrt{x + 1} - 1}$

690. $y = \dfrac{\sqrt{(x + 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2} + 1}{\sqrt{x^2} - \sqrt{(x - 4)^2} + 2}$.

— **Simplifier les expressions suivantes puis représenter graphiquement les fractions obtenues :**

691. $y = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$

692. $y = \dfrac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 4}$.

693. $y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 + x - 4}}$

694. $y = \dfrac{x + \sqrt{x} - 2}{2x + \sqrt{x} - 3}$.

695. $y = \left| \dfrac{(2x-1)^3 + (2x-1) - 2}{x-1} \right|$ **696.** $y = \sqrt{\dfrac{(2x-1)^3 - (13x^2 - 13x + 1)}{(x-1)^2 (x-2)}}$

— Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

697. $xy - 1 > 0$. **698.** $x^2y^2 - 1 < 0$. **699.** $(x-1)(y+2) > 2$

700. $xy + y - 3x + 4 < 0$. **701.** $(xy-1)(x^2+y^2-9)(x^2-y) < 0$.

702. $x^4y^2 + x^2y^4 - 2x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 < 0$.

703. $4x^2y^4 + 4x^4y^2 - 4x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 > 0$.

704. 1° On considère la fonction : $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} + \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$.

Montrer que si les quantités $ad - bc$ et $a'd' - b'c'$ sont de même signe, la fonction y est monotone dans les intervalles où elle est définie. Que peut-on dire dans le cas où les quantités $ad - bc$ et $a'd' - b'c$ sont de signes contraires ?

2° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{x+2}{x+1}$.

3° A quelles conditions la somme de deux fonctions homographiques est-elle identique à une fonction homographique ?

705. On considère la fonction y de x définie par la relation : $y = \dfrac{ax - 11}{x + a - 12}$

dans laquelle a désigne un nombre donné.

1° On choisit $a = 5$. Représenter graphiquement les variations de la fonction ainsi précisée. Montrer qu'il existe deux tangentes à cette courbe parallèle à la droite d'équation $y = -x$. Calculer à $\dfrac{1}{100}$ près les coordonnées des deux points de contact. (Indiquer le détail des calculs.)

2° Soit C_a la courbe représentant les variations de la fonction y de x qui correspond au nombre donné a. Chercher pour quelles valeurs de a cette fonction est croissante, décroissante ou constante.

Déterminer a de façon que la courbe C_a passe par le point donné P de coordonnées p et q. Discuter suivant la position du point P.

Rechercher, suivant la position du point P, si la courbe C_a qui passe par ce point correspond à une fonction y de x croissante, décroissante ou constante.

On indiquera les résultats en les traduisant graphiquement.

706. On considère, en orthonormées, la courbe C d'équation $xy = 1$ et les points A, B, C de cette courbe d'abscisses respectives a, b et c.

1° Trouver les coordonnées de l'orthocentre H du ttiangle ABC.

2° Vérifier que le point H appattient à la courbe C.

707. E (x) désignant la partie entière du nombre positif x, représenter graphiquement la fonction $y = \dfrac{x^{E(x)}}{E(x)}$ dans les intervalles [1; 2], [2; 3] et [3; 4].

— Représenter sur un même graphique les fonctions suivantes :

708. $y = x$; $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt[3]{x}$.

709. $y = x^{-2}$; $y = x^{-1}$; $y = x^{-1/2}$; $y = x^{-3}$.

710. $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^{3/2}$; $y = x^{2/3}$.

— Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

711. $y = x^3 + 3x$ **712.** $y = x^3 - 2x$.

713. $y = 2x^3 - 3x + 1$ **714.** $y = -\dfrac{x^3}{3} + x - 5$.

715. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

716. $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7.$

717. $y = 2x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 5x$

718. $y = -\frac{5}{3}x^3 + 7x^2 + 3x - 4.$

— **Représenter graphiquement les fonctions suivantes :**

719. $y = x^4 - 2x^2.$

720. $y = x^4 - 3x^2.$

721. $y = 2x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 5$

722. $y = -x^4 - 2x^2 + 1.$

723. $y = -3x^4 + 4x^2 - 1.$

724. $y = 5x^4 - 5x^2 + 1.$

725. Nombre des racines de l'équation : $x^3 - 4x^2 = m.$

Résoudre dans le cas où $m = -\frac{256}{27}.$

726. 1° Déterminer p et q en fonction de p' et q' de manière que les fonctions

$$x^3 + px + q$$
$$x^3 + p'x + q'$$

aient la même valeur maximum et la même valeur minimum.

2° Étudier dans ce cas les variations de la fonction : $y = x^3 + px + q - q'$ et tracer la courbe représentative.

Trouver les racines du polynôme y.

FONCTION $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

392. Étude de la fonction : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

Cette fonction dans laquelle nous supposons $aa' \neq 0$ est définie et continue sauf pour son pôle $x = -\dfrac{b'}{a'}$. Sa dérivée $y' = \dfrac{(2ax + b)(a'x + b') - a'(ax^2 + bx + c)}{(a'x + b')^2}$ est du signe de son numérateur $aa'x^2 + 2ab'x + bb' - a'c$, trinôme du 2e degré en x. Nous pourrons donc étudier la variation de cette fonction.

393. Cas général. — En posant : $-\dfrac{b'}{a'} = \alpha$, on obtient : $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'(x - \alpha)}$, définie pour $x \neq \alpha$. Or :

$$\frac{1}{a'}(ax^2 + bx + c) = (x - \alpha)(mx + p) + k \implies \boxed{y = mx + p + \frac{k}{x - \alpha}} \quad (1)$$

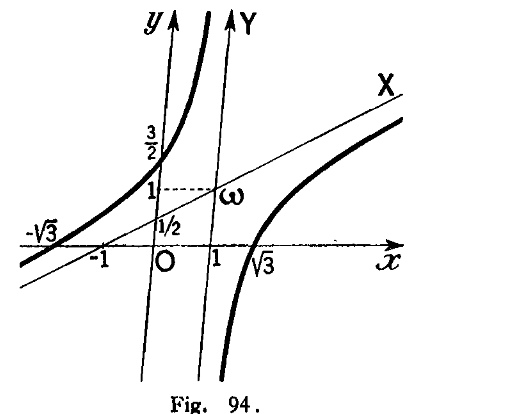


Fig. 94.

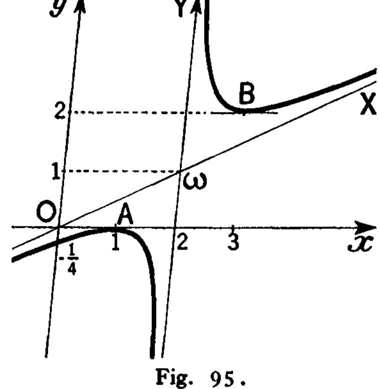


Fig. 95.

Le coefficient k n'est pas nul si α n'est pas racine de $ax^2 + bx + c$, ce que nous supposerons par la suite. La dérivée $y' = m - \dfrac{k}{(x - \alpha)^2}$ est du signe de m si $km < 0$. Dans ce cas la fonction y est monotone croissante pour $m > 0$, décroissante pour $m < 0$. Cette

dérivée s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2 de x égales à $\alpha \pm \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ si $km > 0$ et est du signe opposé à m sur $]x_1, x_2[$. La fonction admet alors un maximum et un minimum : $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

La courbe représentative admet pour asymptotes les droites $x = \alpha$ et $y = mx + p$ qui se coupent en ω de coordonnées $x = \alpha$ et $y = \beta = m\alpha + p$. La translation $\overrightarrow{O\omega}$ transforme le repère xOy en $X\omega Y$ et les formules : $x = \alpha + X$, $y = m\alpha + p + Y$ donnent

$$\boxed{Y = mX + \frac{k}{X}} \qquad (2)$$

Y étant fonction impaire de X, le point ω est un centre de symétrie de la courbe (nº 297).

394. Théorème. — *La courbe $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ est une hyperbole.*

D'après la formule (2) la courbe est égale à la courbe $y = mx + \dfrac{k}{x}$ qui admet pour asymptotes Oy et la droite OX d'équation $y = mx$. Prenons pour vecteur unitaire sur OX (fig. 96) le vecteur $\vec{I} = \vec{i} + m\vec{j}$ et posons $\vec{j} = \vec{J}$. Tout point M de la courbe vérifie donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \left(mx + \frac{k}{x}\right)\vec{j} = x(\vec{i} + m\vec{j}) + \frac{k}{x}\vec{j} = x\vec{I} + \frac{k}{x}\vec{J}.$$

Rapportée au repère XOY de vecteurs unitaires $\vec{I}$ et $\vec{J}$, les coordonnées X et Y de M vérifient :

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = \frac{k}{x} \iff \boxed{XY = k}$$

ce qui montre que la courbe est une hyperbole d'asymptotes OX et OY et de centre O (nº 386).

Selon que la dérivée y' s'annule deux fois ou non on obtient le graphe de la figure 95 ou celui de la figure 94.

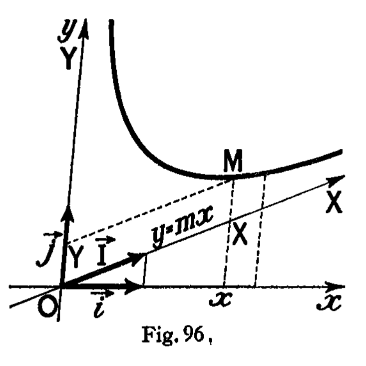


Fig. 96.

FONCTION $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

395. Considérations préliminaires. — Cette fonction où nous supposons $a' \neq 0$ est le quotient de deux trinômes du second degré :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{et} \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c'.$$

Nous supposerons que la fraction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est irréductible donc que :

$$R = (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)\,(bc' - b'c) \neq 0.$$

La fonction y est définie et continue, pour toute valeur de x distincte de l'un de ses pôles, c'est-à-dire des racines de $g(x)$. Lorsque ces valeurs α et β sont réelles, la fonction y devient infinie lorsque x tend vers α ou β. D'autre part lorsque x tend vers $\pm\infty$, la fonction y tend vers $\frac{a}{a'}$ valeur asymptotique de cette fonction (nº 312). Sa dérivée qui s'écrit :

$$y' = \frac{(ab' - a'b)\, x^2 + 2\,(ac' - a'c)\, x + bc' - b'c}{(a'x^2 + b'x + c')^2} \qquad (1)$$

est du signe du trinôme placé au numérateur dont on sait étudier le signe. Notons que les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative (C) avec une droite :

$$y = mx + p$$

sont racines de :

$$ma'x^3 + (mb' + pa' - a)\, x^2 + (mc' + pb' - b)\, x + pc' - c = 0. \qquad (2)$$

Cette équation du 3e degré montre qu'il existe, au plus trois points d'intersection si $m \neq 0$, deux seulement si $m = 0$ (cas d'une droite parallèle à Ox). Ces remarques permettent d'éviter des erreurs dans le tracé de la courbe.

396. Cas général. — La fonction $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

s'écrit :

$$y = \frac{a}{a'} - \frac{(ab' - a'b)\, x + ac' - a'c}{a'\,(a'x^2 + b'x + c')}. \qquad (1)$$

Nous supposerons d'abord : $ab' - a'b \neq 0$ si bien qu'en posant $x = -\frac{b'}{2a'} + X$, on obtient la forme réduite :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{MX + N}{X^2 + K} \quad \text{avec } M \neq 0. \qquad (2)$$

Désignons par Δ le discriminant $b'^2 - 4\,a'c'$ du dénominateur $a'x^2 + b'x + c'$.

1er Cas : $\Delta < 0$. La fonction y n'a pas de pôle réel et K est positif. Puisque la dérivée $X' = 1$, on voit que : $y' = \dfrac{-MX^2 - 2\,NX + MK}{(X^2 + K)^2}$ s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2 de x. La fonction y est définie et continue quel que soit x et admet un maximum et un minimum $f(x_1)$ et $f(x_2)$. La courbe représentative (fig. 97) admet deux sommets de part et d'autre de son asymptote horizontale $y = \frac{a}{a'}$. Elle présente visiblement trois points d'inflexion réels. On peut montrer qu'ils sont alignés sur la droite :

$$(ab' - a'b)\, x - (b'^2 - 4\, a'c')\, y + bb' - 3\, a'c - ac' = 0.$$

Pour cela, on détermine les coefficients m et p de la droite $y = mx + p$ pour que l'équation (2) du n° 395 coïncide avec l'équation donnée par $y'' = 0$.

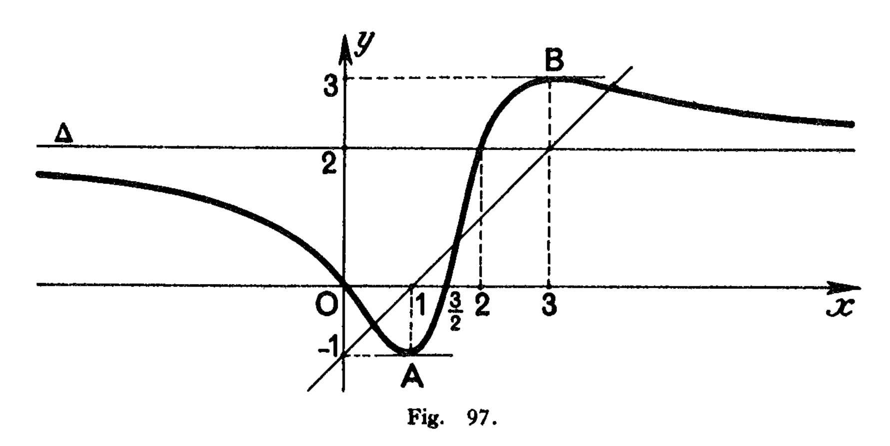


Fig. 97.

2e Cas : $\Delta = 0 \Longrightarrow K = 0$. La fonction y admet un pôle double $x = -\dfrac{b'}{2a'}$, et s'écrit :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{M}{X} + \frac{N}{X^2} \Longrightarrow y' = -\frac{M}{X^2} - \frac{2N}{X^3} \Longrightarrow y'' = \frac{2M}{X^3} + \frac{6N}{X^4}.$$

La courbe (fig. 98) admet la droite $X = 0$ pour asymptote double, un seul sommet pour $X = -\dfrac{2N}{M}$ et un seul point d'inflexion réel pour

$$X = -\frac{3N}{M}.$$

Elle coupe son asymptote horizontale $y = \dfrac{a}{a'}$ pour $X = -\dfrac{N}{M}$.

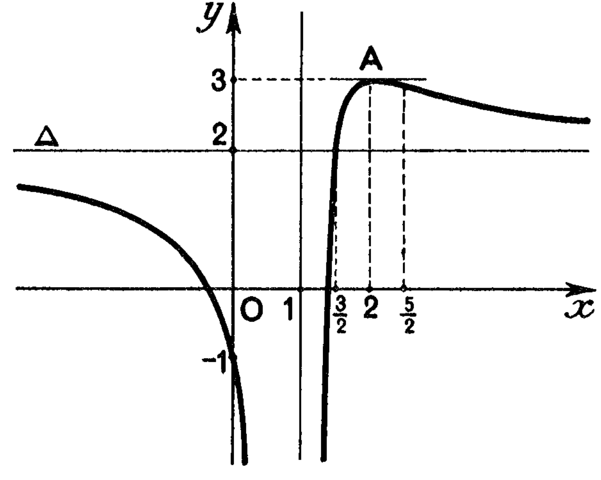


Fig. 98.

3e Cas : $\Delta > 0$. La fonction y a deux pôles distincts α et β. Par identification, on peut écrire :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} \Longrightarrow y' = -\frac{A}{(x - \alpha)^2} - \frac{B}{(x - \beta)^2}$$

$$\Longrightarrow y'' = \frac{2A}{(x - \alpha)^3} + \frac{2B}{(x - \beta)^3}.$$

a) $AB < 0$. La dérivée y' s'annule pour deux valeurs distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}}$$

donc, conjuguées harmoniques par rapport à α et β. La courbe (C) (fig. 99) a deux sommets situés l'un entre les asymptotes verticales $x = \alpha$ et $x = \beta$, l'autre à l'extérieur.

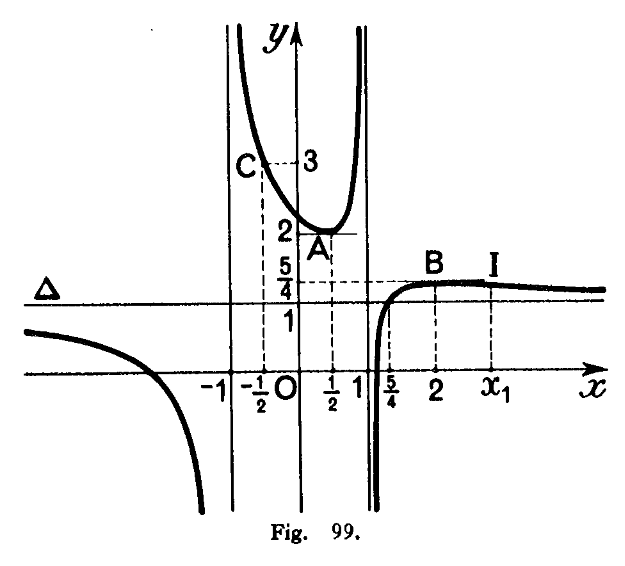


Fig. 99.

b) AB > 0. La dérivée y' conserve le même signe sur chacun des intervalles limités par α et β. Donc y varie toujours dans le même sens. La courbe n'a pas de sommet (fig. 100).

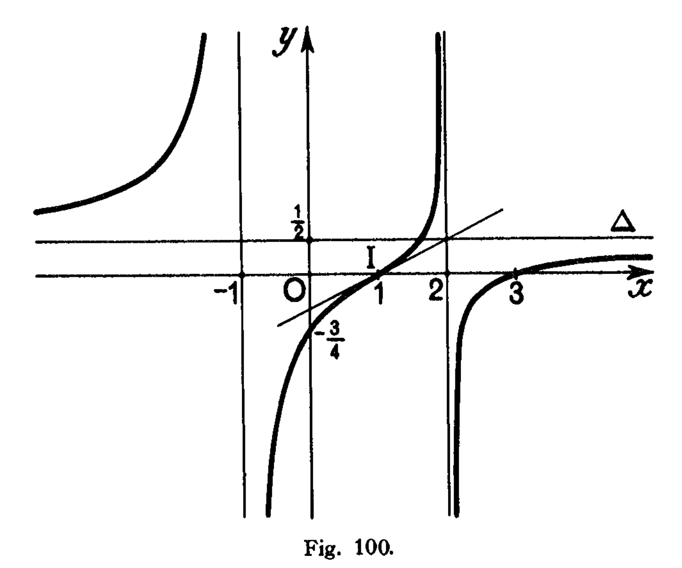


Fig. 100.

Quel que soit le signe de AB, la courbe présente un point d'inflexion pour x tel que $\frac{x - \alpha}{x - \beta} = - \sqrt[3]{\frac{A}{B}}$, situé à l'extérieur des asymptotes verticales $x = \alpha$, $x = \beta$ pour $AB < 0$, entre ces asymptotes pour $AB > 0$ (fig. 99 et 100). Elle coupe son asymptote horizontale pour $\frac{x - \alpha}{x - \beta} = - \frac{A}{B}$.

4e Cas: $ab' - a'b = 0 \Longrightarrow$ M = 0. On obtient $y = \frac{a}{a'} + \frac{N}{X^2 + K} = \frac{a}{a'} + \frac{k}{g(x)}$.

On voit que $Y = y - \frac{a}{a'}$ est l'inverse d'un trinôme du second degré. La courbe qui présente l'une des trois dispositions des figures 101 à 103 suivant que Δ est négatif, nul ou positif, admet la droite X = 0 ou $x = -\frac{b'}{2a'}$ comme axe de symétrie.

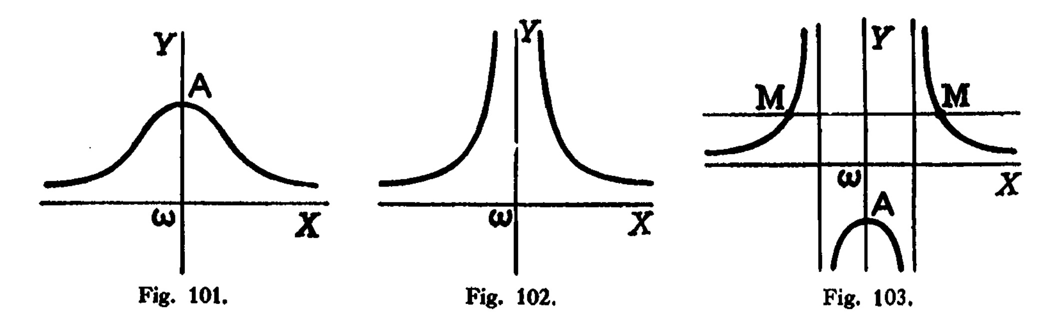


Fig. 101. Fig. 102. Fig. 103.

Remarque. — En posant $Y = y - \frac{a}{a'}$, on obtient $Y = \frac{MX + N}{X^2 + K}$. Si N = 0,
$Y = \frac{MX}{X^2 + K}$ est fonction impaire de X.

La courbe admet alors le point $\omega \left(x = -\frac{b'}{2a'}, y = \frac{a}{a'}\right)$ comme centre de symétrie. Ceci peut se produire dans le cas des figures 97 et 100.

FONCTIONS IRRATIONNELLES

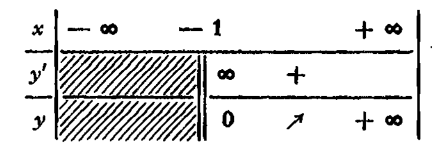
397. Considérations générales. — Toute fonction de la forme $y = \sqrt{P(x)}$, où P(x) est un polynôme, est définie et continue pour $P \geqslant 0$. Sa dérivée $y' = \frac{P'}{2\sqrt{P}}$ est du signe de P' pour P > 0 et devient en général infinie lorsque $P \longrightarrow 0$. Dans un repère rectangulaire, le graphe de la fonction $y = \sqrt{P(x)}$ et celui de la fonction conjuguée : $y = -\sqrt{P(x)}$ sont symétriques par rapport à Ox et leur ensemble est la courbe d'équation : $y^2 = P(x)$.

En particulier, les graphes de $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ et de $y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sont dans un repère rectangulaire symétriques par rapport à Ox et leur ensemble est la conique d'équation : $y^2 = ax^2 + bx + c$.

De même la fonction $y = \sqrt{P(x)} + Q(x)$ est définie pour $P \geqslant 0$.
Sa dérivée $y' = \frac{P'}{2\sqrt{P}} + Q'$ est donc du signe de $P' + 2\,Q'\sqrt{P}$. Rappelons qu'une expression de la forme $\sqrt{A} + B$ est positive pour $B \geqslant 0$ et qu'elle est du signe de $A - B^2$ pour B < 0.

398. Étude de la fonction : $y = \sqrt{x+1}$.

Cette fonction est définie pour $x \geqslant -1$. Sa dérivée $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ est donc positive pour $x > -1$ et tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -1$.



x	$-\infty$	-1		$+\infty$
y'	//////	∞	$+$	
y	//////	0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative satisfait à $y \geqslant 0$; $y^2 = x + 1$. C'est donc la branche y positif, de la parabole $x = y^2 - 1$, d'axe Ox et de sommet A $(-1, 0)$ où la tangente est parallèle à Oy (fig. 104).

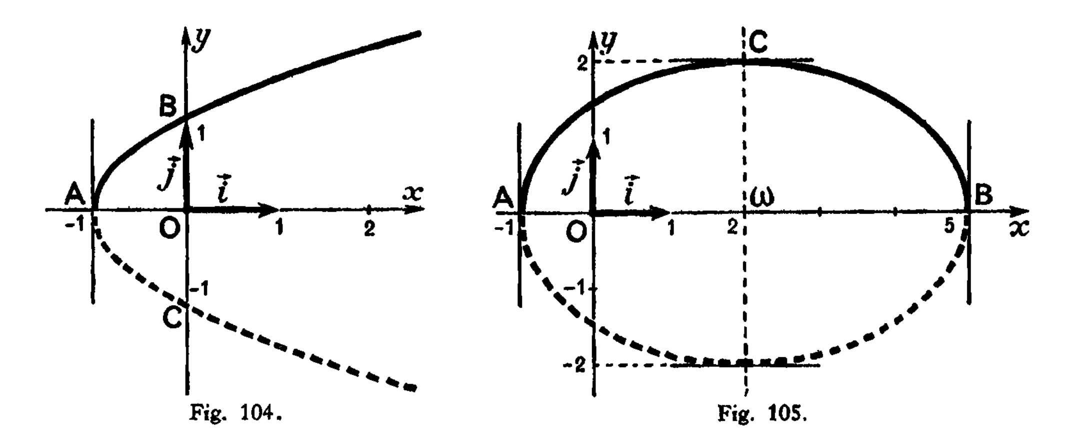


Fig. 104. Fig. 105.

Notons que cette propriété se généralise pour toute fonction de la forme $y = \sqrt{ax+b}$; dont le graphe est la branche $y \geqslant 0$ de la parabole $y^2 = ax + b$ de sommet A $\left(x = -\frac{b}{a}, y = 0\right)$ et de paramètre $\frac{a}{2}$. Le foyer est donc le point F $\left(x = -\frac{b}{a} + \frac{a}{4}\right)$ et la directrice la droite Δ d'équation $x = -\frac{b}{a} - \frac{a}{4}$.

399. Étude de la fonction : $y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$.

Cette fonction est définie et continue pour $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Sa dérivée $y' = \dfrac{2(2-x)}{3\sqrt{(1+x)(5-x)}}$ nulle pour $x = 2$, est positive sur $]-1\,;2[$, négative sur $]2\,;5[$. Elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -1+0$ et vers $-\infty$ lorsque x tend vers $5-0$. Donc :

x	$-\infty$	-1		2		5	$+\infty$
y'	//////	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	//////
y	//////	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	//////

Le graphe est, dans un repère rectangulaire (fig. 105), un arc de courbe d'extrémités A $(-1;0)$ et B $(+5;0)$ où la tangente est parallèle à Oy, admettant pour sommet le point C $(+2, +2)$.

En écrivant $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-(x-2)^2}$, on voit que ce graphe est la partie $y \geqslant 0$ de la courbe $y^2 = \frac{4}{9}[9-(x-2)^2] \iff \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Cette courbe est une ellipse de centre $\omega(+2;0)$ et admettant pour équation réduite, dans le repère $X\omega Y$ se déduisant de xOy par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$: $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

400. Étude de $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2-2x-3} = \frac{3}{4}\sqrt{(x+1)(x-3)}$.

Cette fonction est définie et continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $[+3;+\infty[$. Sa dérivée $y' = \frac{3(x-1)}{4\sqrt{(x+1)(x-3)}}$ est positive pour $x > 3$, négative pour $x < -1$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $3+0$, vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-1-0$.

x	$-\infty$		-1		$+3$		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

Dans un repère rectangulaire, le graphe se compose de deux branches infinies issues des points A $(-1;0)$ et B $(+3;0)$ où la tangente est parallèle à Oy (fig. 106, trait plein).

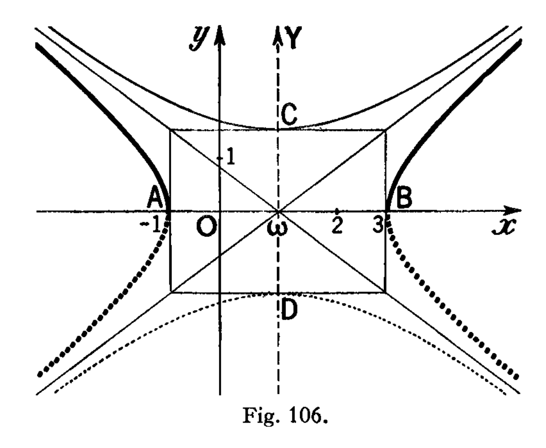


Fig. 106.

Soit ω le point $x = 1, y = 0$. La translation de vecteur $\overrightarrow{O\omega}$ transforme le repère xOy en $X\omega Y$ et les formules : $x = 1 + X$ et $y = Y$ montrent que la courbe $y = \frac{3}{4}\sqrt{(x-1)^2-4}$ admet pour équation réduite : $Y = \frac{3}{4}\sqrt{X^2-4}$.

Y est fonction paire de X si bien que la courbe admet la droite ωY pour axe de symétrie. D'autre part lorsque x tend vers $+\infty$:

$$X > 0 \implies \frac{Y}{X} = +\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{4}{X^2}} \to \frac{3}{4}.$$

D'où : $$Y = \frac{3X}{4} - \frac{3}{X+\sqrt{X^2+4}}.$$

La branche de droite est donc asymptote à $Y = \frac{3X}{4}$ ou $y = \frac{3}{4}(x-1)$. Par symétrie la branche de gauche est asymptote à $Y = -\frac{3X}{4}$ ou $y = -\frac{3}{4}(x-1)$.

Cette courbe est la partie $y \geqslant 0$ de la courbe $y^2 = \frac{9}{16}[(x-1)^2-4]$ d'équation réduite :

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = \frac{1}{4}.$$

C'est donc une demi-hyperbole qui a été complétée en pointillé sur la figure 106.

401. Étude de $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x + 5} = \frac{3}{4}\sqrt{(x-1)^2 + 4}$.

Cette fonction est définie pour tout x. Sa dérivée $y' = \dfrac{3(x-1)}{4\sqrt{(x-1)^2+4}}$ est du signe de $x - 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

Le graphe est donc une courbe continue admettant pour sommet $C\left(+1, +\frac{3}{2}\right)$ et deux branches infinies (en trait fin sur la fig. 106). Le même changement de repère qu'au paragraphe précédent conduit à l'équation réduite $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = -\frac{1}{4}$ avec $Y \geqslant 0$. C'est donc une branche de l'hyperbole conjuguée de la précédente et admettant les mêmes asymptotes $y = \pm\frac{3}{4}(x-1)$.

402. Étude de la fonction : $y = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$.

Cette fonction est définie et continue pour $x \geqslant -1$. Sa dérivée s'écrit :

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}}.$$

Elle est du signe de $\sqrt{x+1} - 1$ donc (n° 397) du signe de $(\sqrt{x+1})^2 - 1^2 = x$. On en déduit :

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
y'	//////	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	//////	1	↘	0	↗	$+\infty$

La courbe représentative (fig. 107) admet le point O comme sommet et une tangente verticale au point de départ $\omega\,(-1, +1)$. Le rapport $\frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{x} - 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini. Or $y - x = 2 - 2\sqrt{x+1}$ tend vers $-\infty$. La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$.

Soit $X\omega Y$, le repère d'origine ω et de vecteurs unitaires $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$. La relation

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\omega} + X\vec{I} + Y\vec{J} \iff x\vec{i} + y\vec{j} = -\vec{i} + \vec{j} + X(\vec{i} + \vec{j}) + Y\vec{j}$$

implique : $x = -1 + X$ et $y = 1 + X + Y$. L'équation de la courbe devient : $Y = -2\sqrt{X}$.

En complétant par la courbe $y = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$ ou $Y = 2\sqrt{X}$ (en ponctué sur la fig. 107), on obtient l'équation $Y^2 = 4X$, qui est l'équation d'une parabole rapportée à une tangente et au diamètre conjugué de la direction de cette tangente. La courbe initiale est donc un arc de parabole.

Dans un repère orthonormé, la tangente au sommet S d'une parabole est perpendiculaire à la direction asymptotique. Ici : $y' = -1 \implies \mathrm{S}\left(x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}\right)$.

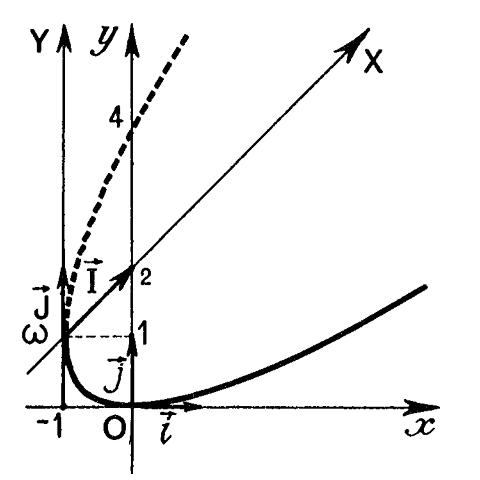


Fig. 107.

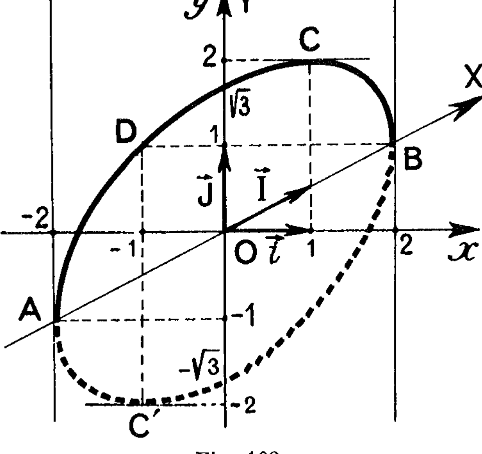


Fig. 108.

403. Étude de la fonction : $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3x^2}$.

Cette fonction est définie et continue pour $12 - 3x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

Sa dérivée : $y' = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2\sqrt{12 - 3x^2}} = \frac{\sqrt{12 - 3x^2} - 3x}{2\sqrt{12 - 3x^2}}$ est du signe de $\sqrt{12 - 3x^2} - 3x$.

Pour $x \leqslant 0$ cette expression est positive. Pour $x > 0$, elle est (nº 397) du signe de

$$(12 - 3x^2) - (3x)^2 = 12(1 - x^2).$$

Elle est positive pour $0 < x < 1$ et négative pour $x > 1$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'		$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	
y		-1	↗	2	↘	1	

La courbe représentative (fig. 108) admet une tangente verticale en A $(-2, -1)$ et B $(+2, +1)$. Elle présente un sommet C $(1, +2)$ et coupe l'axe Ox au point $x = -\sqrt{3}$, l'axe Oy au point $y = +\sqrt{3}$.

Soit XOY le repère de vecteurs unitaires $\vec{\mathrm{I}} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{\mathrm{J}} = \vec{j}$. La relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{X}\vec{\mathrm{I}} + \mathrm{Y}\vec{\mathrm{J}} \text{ donne : } x\vec{i} + y\vec{j} = \mathrm{X}\left(\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) + \mathrm{Y}\vec{j} \implies x = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad y = \frac{\mathrm{X}}{2} + \mathrm{Y}.$$

D'où : $$y - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3x^2} \iff \mathrm{Y} = \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3\mathrm{X}^2}.$$

La courbe complétée par : $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3x^2}$ ou $\mathrm{Y} = -\frac{1}{2}\sqrt{12 - 3\mathrm{X}^2}$.

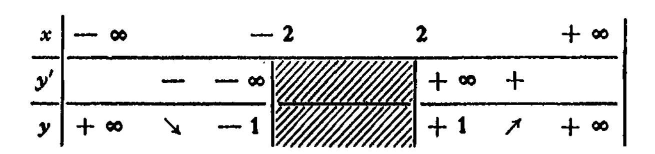
admet pour équation : $4\mathrm{Y}^2 = 12 - 3\mathrm{X}^2 \iff \frac{\mathrm{X}^2}{4} + \frac{\mathrm{Y}^2}{3} = 1$, qui est une ellipse de centre O et de directions conjuguées OX et OY. La courbe $y = \frac{x}{2} + \sqrt{12 - x^2}$ est donc une demi-ellipse.

404. Étude de la fonction : $y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 4}$.

Cette fonction est définie et continue pour $x \geqslant 2$ et pour $x \leqslant -2$. Sa dérivée :

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 2x}{2\sqrt{x^2 - 4}}$$

est du signe de l'expression $\sqrt{x^2 - 4} + 2x$. Pour $x \geqslant 2$ cette expression est positive. Pour x négatif elle est du signe de $(x^2 - 4) - 4x^2 = -(3x^2 + 4)$. Elle est donc négative pour $x \leqslant -2$. On en déduit :



x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	//////	$+1$	↗	$+\infty$

La courbe représentative (fig. 109) est formée de deux branches infinies issues respectivement de A $(-2, -1)$ et de B$(+2, +1)$, points où la tangente est parallèle à Oy.

Pour $x > 0$, on a :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \to \frac{3}{2}$$

lorsque $x \to +\infty$. Comme on peut écrire :

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{4}{x + \sqrt{x^2 - 4}},$$

la branche de droite est asymptote à $y = \frac{3}{2}x$.

Pour $x < 0$ on a :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \to -\frac{1}{2}$$

lorsque $x \to -\infty$. Puisque :

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{4}{\sqrt{x^2 - 4} - x}$$

la branche de gauche est asymptote à :

$$y = -\frac{x}{2}.$$

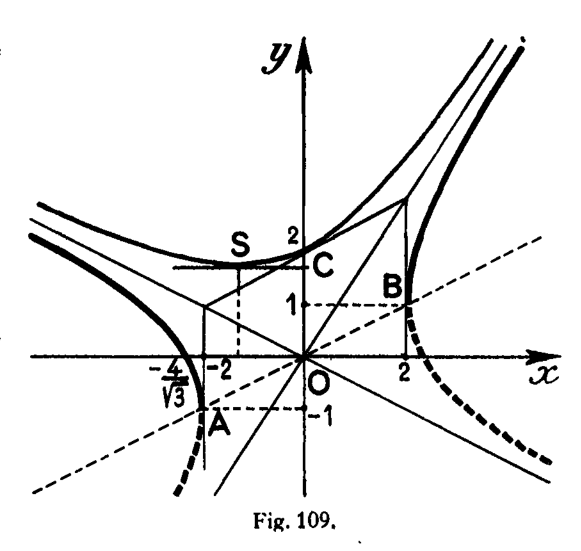


Fig. 109.

Le même changement de repère qu'au paragraphe précédent conduit à l'équation réduite $Y = \sqrt{X^2 - 4} \implies X^2 - Y^2 = 4$. La courbe est donc une demi-hyperbole de centre O.

405. Étude de la fonction : $y = \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + 4}$.

Cette fonction est définie et continue pour tout x.

Sa dérivée : $y' = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2x}{2\sqrt{x^2 + 4}}$ est du signe de $\sqrt{x^2 + 4} + 2x$.

Pour $x \geqslant 0$, elle est positive. Pour $x < 0$ elle est du signe de $x^4 + 4 - (2x)^2 = 4 - 3x^2$. Elle est donc positive pour $x > -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et négative pour $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. On en déduit :

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

La courbe représentative (en trait fin sur la fig. 109) admet un sommet $S\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ à tangente horizontale. On démontre comme au paragraphe précédent qu'elle admet pour asymptotes les droites $y = \frac{3x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$ et que, dans le même repère XOY, elle admet pour équation réduite $Y = \sqrt{X^2 + 4} \implies X^2 - Y^2 = -4$.

406. Application aux équations : $A + \sqrt{B} = m$.

Pour discuter une telle équation il suffit de construire la courbe $y = A + \sqrt{B}$ et de chercher ses intersections avec la droite $y = m$.

EXEMPLE. — *Étudier suivant les valeurs de* m *l'existence et la position par rapport aux nombres* -1 et $+2$ *des racines de l'équation :* $x + \sqrt{12 - 3x^2} = 2m$.

Nous sommes amenés à couper par la droite $y = m$ la courbe $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12 - 3x^2}$ construite au n° 403 (fig 108). En marquant sur cette courbe le point D d'abscisse -1 et d'ordonnée 1 on voit que :

$m < -1$: *Pas de racines réelles.*
$-1 \leqslant m < 1$: *Une racine :* $-2 \leqslant x' < -1$.
$m = 1$: *Deux racines :* $x' = -1,\ x'' = 2$.
$1 < m < 2$: *Deux racines :* $-1 < x' < 1 < x'' < 2$.
$m = 2$: *Une racine double :* $x' = x'' = 1$.
$m > 2$: *Pas de racines réelles.*

FONCTIONS DIVERSES

407. Étude de la fonction : $y = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 5}$.

Le dénominateur $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ étant positif, cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x. Sa dérivée :

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 4x + 5) - x^3(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{x^2(x^2 - 8x + 15)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

qui s'annule pour $x = 0$, 3 et 5, est du signe du produit : $x^2(x - 3)(x - 5)$. On obtient :

x	$-\infty$		0		3		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{27}{2}$	↘	$\frac{25}{2}$	↗	$+\infty$

La courbe représentative (C) (fig. 110) admet deux sommets A $\left(3, \frac{27}{2}\right)$, B $\left(5, \frac{25}{2}\right)$ et l'origine O comme point d'inflexion à tangente horizontale. En écrivant

$$y = x + 4 + \frac{11x - 20}{x^2 - 4x + 5}$$

on voit que la courbe admet pour asymptote oblique la droite $y = x + 4$ qu'elle coupe au point d'abscisse $x = \frac{20}{11}$.

D'autre part : $y' = 1 + \frac{-11x^2 + 40x - 25}{(x^2 - 4x + 5)^2}$ et $y'' = \frac{2x(11x^2 - 60x + 75)}{(x^2 - 4x + 5)^3}$.

Outre le point O, la courbe admet deux points d'inflexion : $x = \frac{5}{11}(6 \pm \sqrt{3})$.

La courbe est une cubique car son équation entière : $y(x^2 - 4x + 5) - x^3 = 0$ est du 3e degré en x et y. Elle est, pour $m \neq 1$, coupée en trois points par la droite $y = mx + p$. On peut vérifier, que les trois points d'inflexion sont les intersections de la courbe avec la droite : $y = \frac{15x}{4}$.

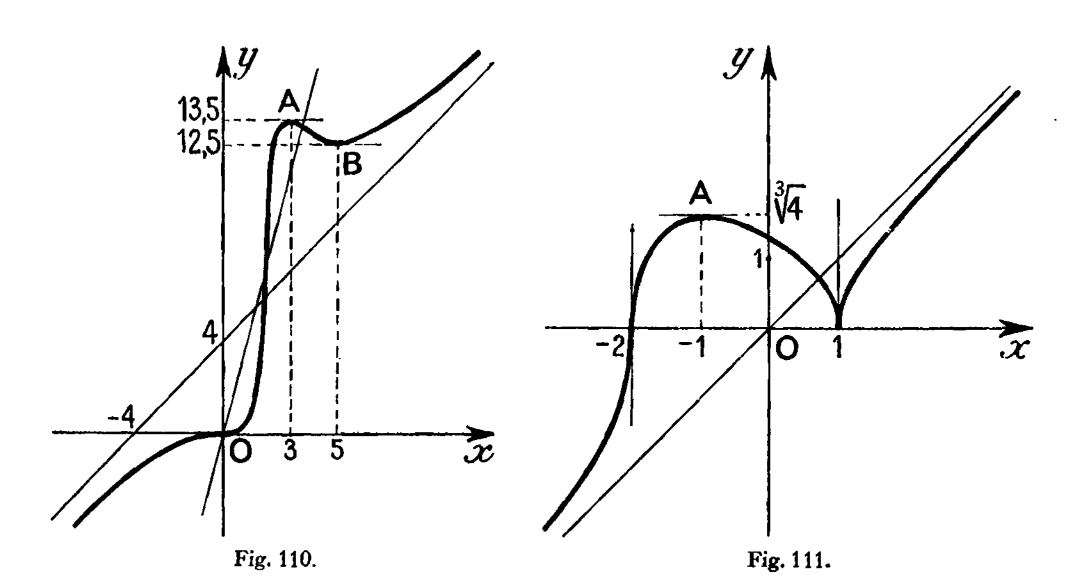


Fig. 110.　　Fig. 111.

408. Étude de la fonction : $y = \sqrt[3]{(x + 2)(x - 1)^2}$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. En écrivant $y = (x^3 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$

on obtient : $y' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} u' = \frac{3(x^2 - 1)}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2 (x - 1)^4}} = \frac{x + 1}{\sqrt[3]{(x + 2)^2 (x - 1)}}$.

Cette expression qui est du signe de $(x + 1)(x - 1)$, devient infinie pour $x = -2$ et $x = 1$. D'où :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

La courbe qui est la cubique : $y^3 - x^3 + 3x - 2 = 0$ (fig. 111) admet un sommet A $(-1, \sqrt[3]{4})$. Au point B $(-2; 0)$ elle admet un point d'inflexion à tangente verticale car y' prend à gauche et à droite de $x = -2$ la valeur $+\infty$. Au point C $(1; 0)$ elle admet un point de rebroussement car y' tend vers $-\infty$ à gauche de 1 et vers $+\infty$ à droite de 1. Cherchons si la courbe admet une asymptote oblique (n° 378).

Si $x \to \pm\infty$: le rapport $\dfrac{y}{x} = \sqrt[3]{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2}$ tend vers $+1$.

D'autre part : $$y - x = \frac{y^3 - x^3}{y^2 + xy + x^2} = \frac{-3x + 2}{x^2 + xy + y^2}$$

s'écrit : $$y - x = \frac{-\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}}{1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}} \quad \text{et} \quad \text{tend vers} \quad \frac{0}{1 + 1 + 1} = 0.$$

La courbe admet donc la droite $y = x$ comme asymptote. Comme $y - x$ est du signe de $y^3 - x^3 = -3x + 2$, on voit que la courbe coupe son asymptote au point $x = y = \dfrac{2}{3}$, qu'elle se trouve au-dessous de l'asymptote pour $x > \dfrac{2}{3}$, au-dessus pour $x < \dfrac{2}{3}$.

409. Étude de la fonction : $y = x\sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$.

En supposant $a > 0$, cette fonction est définie et continue pour $-a \leqslant x < a$. Pour calculer sa dérivée posons $u = \dfrac{a + x}{a - x} = -1 - \dfrac{2a}{x - a} \Longrightarrow u' = \dfrac{2a}{(a - x)^2}$; $v = \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}} = \sqrt{u}$ a pour dérivée $v' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{a}{(a - x)^2} \times \sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$ d'où, puisque $y = xv$:

$$y' = v + xv' = \sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + \frac{ax}{\sqrt{(a - x)^3 (a + x)}} = \frac{(a^2 - x^2) + ax}{\sqrt{(a - x)^3 (a + x)}}.$$

y' est donc du signe de : $-x^2 + ax + a^2$. Ce trinôme admet deux racines $x_1 = \dfrac{a}{2}(1 - \sqrt{5})$ et $x_2 = \dfrac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ visiblement telles que : $-a < x_1 < a < x_2$.

On peut donc dresser le tableau :

x	$-\infty$	$-a$		x_1		0		a	$+\infty$
y'	//////	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$		//////
y	//////	0	↘	y_1	↗	0	↗	$+\infty$	//////

La fonction admet pour $x_1 = \dfrac{a}{2}(1 - \sqrt{5}) \# -\dfrac{3a}{5}$ un minimum $y_1 \# -\dfrac{3a}{10}$. La courbe (fig. 112) qui admet le point B (x_1, y_1) comme sommet, est tangente en A $(-a, 0)$ à la droite $x = -a$ et admet comme asymptote la droite $x = a$.

En complétant la courbe par la courbe symétrique $y = -x\sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$, on obtient une cubique d'équation entière $y^2(a - x) - x^2(a + x) = 0$ appelée *strophoïde droite* (c'est l'inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à un de ses sommets).

410. Fonction $y = |f(x)|$. — On peut écrire $y = \sqrt{f^2(x)}$. Par suite $y' = \dfrac{ff'}{\sqrt{f^2}}$ est donc du signe de ff' pour tout intervalle où $f(x)$ n'est pas nul. Mais on peut aussi remarquer que y est identique à $f(x)$ lorsque $f(x) \geqslant 0$ et à $-f(x)$ lorsque $f(x) \leqslant 0$. On étudie le signe de $z = f(x)$ et sa variation et puisque $-f(x)$ varie en sens contraire de $f(x)$ on en déduit les variations de y. La courbe $y = |f(x)|$ comprend la partie de la courbe $z = f(x)$ située au-dessus de Ox et la symétrique par rapport à Ox de la partie de cette courbe située au-dessous de Ox.

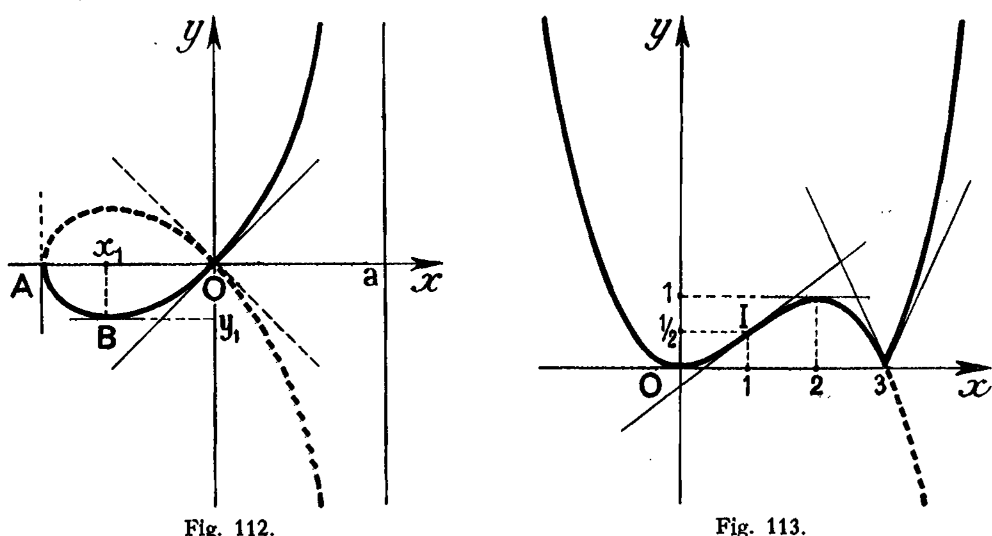


Fig. 112. Fig. 113.

411. Étude de la fonction : $y = \dfrac{1}{4}|3x^2 - x^3|$.

La fonction $z = \dfrac{1}{4}(3x^2 - x^3)$ est positive ou nulle pour $x \leqslant 3$, négative pour $x > 3$. Sa dérivée est : $z' = \dfrac{3}{4}x(2 - x)$. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	0	$-$	$-9/4$	$-$	
z	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

La courbe représentative (fig. 113) est la courbe $y = \dfrac{1}{4}(3x^2 - x^3)$ pour $x \leqslant 3$ et la courbe $y = -\dfrac{1}{4}(3x^2 - x^3)$ pour $x > 3$. Elle admet pour sommet les points O et A (2; 1). Le point B (3; 0) est un point anguleux admettant une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{9}{4}$ à gauche de $+3$ et $+\dfrac{9}{4}$ à droite de $+3$. Le point I $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion admettant une tangente de pente 3/4.

D'après le graphique on voit que l'équation : $\dfrac{1}{2}|3x^2 - x^3| = m$ admet pour :

$m = 0$: *Deux racines doubles* 0 *et* 3.
$0 < m < 1$: *Quatre racines.*

$m = 1$: *Deux racines simples et une racine double* $+ 2$.
$m > 2$: *Deux racines simples.*

412. Étude de la fonction : $y = \frac{x}{2} + \sin x$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. Posons $x_1 = x + 2\pi$, on obtient :

$$y_1 = \frac{x}{2} + \pi + \sin x \quad \text{soit} \quad y_1 = y + \pi.$$

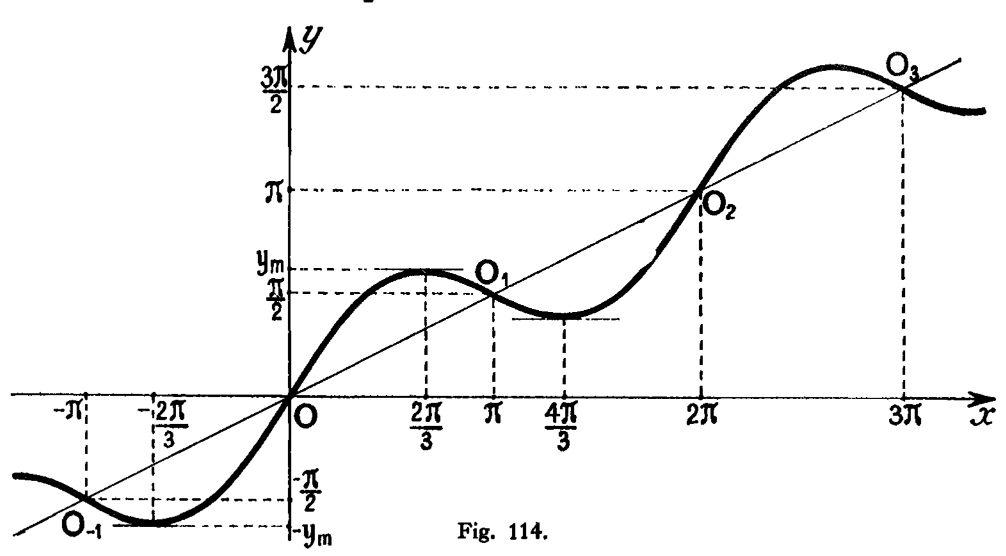


Fig. 114.

Il en résulte qu'à tout point M (x, y) de la courbe représentative (fig. 114) correspond le point M_1 (x_1, y_1) tel que $\overrightarrow{MM_1}$ soit égal au vecteur constant $\vec{V}$ $(2\pi, \pi)$. La courbe se compose d'arcs se déduisant de l'un d'eux dans les translations de vecteurs $k\vec{V}$ (k entier relatif). Comme y est une fonction impaire nous l'étudierons dans l'intervalle $(0, \pi)$. Dans cet intervalle $y' = \frac{1}{2} + \cos x$ s'annule pour $x = \frac{2\pi}{3}$. On obtient :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
y'	$3/2$	$+$	0	$-$	$-1/2$
y	0	↗	$y_m = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\pi}{2}$

Comme $y'' = -\sin x$ est négatif dans cet intervalle, l'arc de courbe correspondant OO_1 est concave du côté des y négatifs et admet pour sommet le point $A\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. En complétant cet arc par symétrie de centre O, on obtient l'arc $O_{-1}O_1$ qu'il suffit ensuite de reproduire par les translations de vecteur $k\vec{V}$ comme on l'a vu ci-dessus. Le point O et les différents points $O_k\left(k\pi, \frac{k\pi}{2}\right)$ sont des points d'inflexion et des centres de symétries de la courbe qui est alternativement tangente aux deux droites $y = \frac{x}{2} + 1$ et $y = \frac{x}{2} - 1$ pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Signalons que $\frac{y}{x} \to \frac{1}{2}$ lorsque $x \to \pm\infty$ mais la courbe n'admet pas d'asymptotes car $y - \frac{x}{2}$ ne tend vers aucune limite

EXERCICES

— Étudier la variation et le graphe des fonctions suivantes :

727. $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. **728.** $\frac{2x}{x^2 - 1}$. **729.** $y = \frac{(x + 1)^2}{x}$

730. $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{2x}$. **731.** $y = \frac{x^2 - 5x + 11}{x - 2}$. **732.** $y = \frac{x(x + 1)}{x - 2}$

733. $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$. **734.** $x + 2 + \frac{1}{x - 1}$. **735.** $y = x + 5 \frac{4}{x}$.

736. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - x + 1}$. **737.** $y = \frac{a(x - b)}{x(x - 1)}$; $a > 0 ; b > 1$ **738.** $y = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - x - 2}$.

739. $y = \frac{3(x - 3)}{(x + 1)(x - 2)}$. **740.** $y = \frac{8x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 1}$ **741.** $x = \frac{3}{- x^2 + 6x - 5}$.

742. $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2}$. **743.** $y = \frac{- 3x^2 + 17}{x^2 + 1}$. **744.** $y = \frac{3(x - 1)^2}{x^2 - 4}$.

745. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$. **746.** $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 15}$. **747.** $y = \frac{2x^2 + x - 6}{2x^2 - 2x - 3}$.

748. $y = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ **749.** $y = \frac{x}{2x^2 - 5x + 2}$. **750.** $y = \frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$.

751. On considère la fonction $y = \frac{(ax + 1)^2}{(2x - b)}$, où a et b désignent des constantes données.

1° Quelles sont les intervalles de définition ?

2° Cette fonction présente un minimum m et un maximum M respectivement pour $x = 3$ et $x = - 1$; pour ces valeurs de x elle admet une dérivée. Déterminer les valeurs de a et celle de b.

3° On donne à a la valeur 1 et à b une valeur telle que la courbe représentative passe par le point A ($x = 3$, $y = 4$). Déterminer b et écrire la fonction.

4° Étudier la fonction ainsi obtenue et la représenter graphiquement.

Définition et continuité; branches infinies et asymptotes, sens de variation, tableau de variation, tracé (en axes orthonormés : unité 1 cm).

On calculera, par exemple $f(-3)$, $f(0,5)$, $f(1,5)$, $f(2)$, $f(4)$ et $f(5)$.

5° On fait le changement d'axes suivant : nouvelle origine : O′ ($x = 1$, $y = 2$); nouveaux axes O′X et O′Y respectivement parallèles à Ox et Oy.

Déterminer l'équation de la courbe dans ce nouveau système d'axes et montrer que O′ est centre de symétrie de la courbe.

752. 1° On considère la fonction : $y = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 4}$.

a) Pour quelles valeurs du paramètre m cette fonction n'a-t-elle ni minimum, ni maximum ?
b) Pour quelles valeurs de m a-t-elle un minimum et un maximum ?

2° On donne à m la valeur 1, soit : $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$.

a) Étudier la variation de cette fonction.

b) Déterminer les valeurs des extrémums; en calculer les valeurs approchées à $\frac{1}{100}$ près.

c) Trouver les asymptotes du graphe, (C), de cette fonction.

Déterminer en particulier la position de (C) par rapport à l'asymptote de direction parallèle à l'axe des abscisses.

Montrer que (C) coupe cette asymptote en un point, dont on précisera les coordonnées.

d) Calculer les coefficients directeurs des tangentes à (C) aux points d'abscisses -4 et $+4$.

e) Construire le graphe (C) par rapport à un système d'axes perpendiculaires.

On prendra 1 cm pour représenter l'unité sur l'axe des abscisses et 3 cm pour représenter l'unité sur l'axe des ordonnées.

753. On considère la fonction : $y_m = \dfrac{x^2 + 3x + 2m}{x^2 + \left(\frac{5}{2}m + 1\right)x + 3}$

où x est la variable et m un paramètre. A chaque valeur de m correspondent une fonction y_m et sa courbe représentative (C_m) par rapport à un repère orthonormé (Ox, Oy).

1° Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes, indépendants de m, dont on déterminera les coordonnées (on remarquera que l'un de ces points a pour abscisse 1).

2° Montrer que toutes les courbes (C_m) admettent pour asymptote la droite $y = 1$. Dans toute la suite du problème, on choisira m de façon que le point P, intersection de (C_m) avec cette asymptote, ait pour abscisse $\frac{3}{2}$. Montrer que la fonction y_m ainsi déterminée est la fonction y_0. Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative, (C_0).

3° Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de (C_0) et de la droite (D) d'équation $y = tx$. Discuter le nombre de points d'intersection, suivant les valeurs de t. Former les équations des tangentes issues de O à (C_0) et trouver les coordonnées des points de contact. Étudier la position de (C_0) par rapport à sa tangente en O.

4° Calculer la dérivée seconde de y et les valeurs de x qui l'annulent. Montrer que les points correspondants de (C_0) sont alignés sur une droite d'équation $y = tx$.

5° Pour λ convenablement choisi, la droite $y = \lambda$ coupe (C_0) en deux points, L et L', dont les projections sur l'axe $x'Ox$ sont appelées N et N'. Écrire l'équation du cercle (L_λ) de diamètre NN'. Montrer que, lorsque λ varie, (L_λ) appartient à un faisceau, dont on déterminera la nature et l'axe radical (Δ).

Déterminer l'équation du cercle (L_λ) qui passe par O. Soit MT une tangente menée à ce cercle par un point M (x, y) du plan et H la projection de M sur (Δ), montrer que, s'il n'est pas vide, l'ensemble des points M tels que $MT^2 = k\,\overline{MH}$ (k : constante positive donnée) est un cercle du faisceau précédent (T est le point de contact de la tangente MT avec le cercle).

754. 1° Déterminer les coefficients numériques a, b, c, d, sachant :

— que la courbe représentative de la fonction : $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

est asymptote à la droite $x = 2$,

— qu'elle n'admet pas d'asymptote horizontale,

— qu'elle contient le point A ayant pour coordonnées $(+1, -2)$ et qu'en ce point la tangente a pour pente -5.

2° On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$.

Étudier ses variations et construire sa courbe représentative, (H), dans un repère orthonormé Oxy (unité : 2 cm sur chaque axe). Montrer que (H) possède un centre de symétrie.

3° Montrer, sans calculer la dérivée de la fonction z, que, de l'étude précédente, on peut déduire les variations de la fonction : $$z = \frac{x-2}{x^2+x}.$$
Tracer la courbe représentative de cette fonction.

4° Déterminer les points de (H) dont les coordonnées sont des nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls.

755. 1° Étudier les variations de la fonction : $$y = f(x) = \frac{8x^2 - 8x + 3}{4x^2 - 1}.$$

Construire le graphe de cette fonction, par rapport à un repère rectangulaire. (On prendra pour unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

2° On désigne par α une inconnue appartenant à l'intervalle fermé $[0, \pi]$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ et par m un paramètre appartenant à l'ensemble des réels. Étudier graphiquement, suivant les valeurs de m, et en utilisant les résultats de la question précédente, l'existence et le nombre de solutions de l'équation :

$$4(2-m)\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + m + 3 = 0.$$

A l'aide des tables de logarithmes, calculer en degrés, minutes et secondes la valeur de α lorsque $m = \frac{19}{3}$.

— Étudier les fonctions suivantes et tracer leur graphe :

756. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

757. $y = \sqrt{4 - x^2}$.

758. $y = \sqrt{x^2 - 1}$,

759. $y = \sqrt{x^2 - 4}$,

760. $y = x - 1 + \sqrt{x}$.

761. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

762. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

763. $y = x + \sqrt{|x|}$.

764. $y = x - \sqrt{|x|}$.

765. $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$.

766. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

767. $y = x - 1 + \sqrt{x(2-x)}$.

768. $y = x - 1 + \sqrt{x(x-2)}$.

769. $y = x - 1 - \sqrt{x(2-x)}$.

770. $y = x - 1 - \sqrt{x(x-2)}$.

771. $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

772. $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

773. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

774. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

775. $y = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

776. $y = \sqrt{\dfrac{x(2-x)}{x^2 - 4x + 3}}$.

777. $y = (1-x)\sqrt{1+x}$.

778. $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$.

779. $y = x\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.

780. $y = \dfrac{3x - 12x^3}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}}$.

781. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

782. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

783. $y = 2(2x+1) + 3\sqrt{6 - x - x^2}$.

784. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-3} - 2}{x^2 - 4}$.

785. 1° Tracer le graphe de la fonction : $y = 2\sqrt{1 - x^2}$.

2° Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre des racines de l'équation :

$$2\sqrt{1 - x^2} = x + m.$$

786. 1° Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m l'équation :

$$\sqrt{4 - x^2} - mx = 2 - m.$$

2° Construire les courbes représentatives des fonctions $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$; $y_2 = mx + 2 - m$. Étudier les points d'intersection des deux courbes et retrouver les résultats de la discussion du 1°.

787. Soit le demi-cercle O, décrit sur le diamètre AB = 2 R. En A, on mène la tangente AT, et, d'un point T de cette droite, la tangente TC. De C on abaisse les perpendiculaires CD, CE sur les droites AT, AB et on joint les points C, B. Cela posé on demande :

1° de calculer la longueur BE = x pour laquelle les triangles CBE, CDT sont équivalents;

2° d'étudier les variations de la surface du rectangle ADCE.

788. Étudier les variations de la fonction : $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ et construire la courbe représentative (repère orthonormé).

Elle coupe $x'Ox$ en deux points A et B d'abscisses -2 et $+1$. Construire les tangentes en ces points. Montrer que quand x croît indéfiniment la différence entre les ordonnées d'un point de la courbe et du point de la première bissectrice situés sur une même parallèle à $y'Oy$ tend vers zéro.

789. 1° On considère la fonction : $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$.

Étudier ses variations. Tracer la courbe représentative (points et tangentes remarquables). En déduire la résolution et la discussion graphique de l'équation : $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} = a$ où a est un nombre donné.

2° On pose $x = \cos t$, en supposant t compris entre 0 et π. Exprimer y en fonction de t.

En passant par l'intermédiaire de la variable t, étudier les variations de y en fonction de x et résoudre l'équation énoncée au paragraphe 1°.

790. Soit la fonction : $y = \dfrac{(x + 2)(x + 6)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$.

1° Indiquer dans quels intervalles cette fonction est définie et étudier avec précision ce que devient cette fonction lorsque la variable x tend vers les bornes de ces intervalles.

2° Étudier les variations de la fonction y.

3° Montrer que $y - x - 6$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ et que $y + x + 6$ tend vers zéro lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire pour la courbe représentative de la fonction l'existence de deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées et placer la courbe par rapport à ces asymptotes.

4° Tracer la courbe représentative et chercher les tangentes aux points où elle coupe les axes de coordonnées.

5° Une sécante variable de coefficient directeur m tourne autour du point fixe A ($x = -2$; $y = 0$). Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de la sécante et de la courbe représentative. On contrôlera sur la courbe représentative les résultats de la discussion algébrique.

791. Étudier la variation de chacune des fonctions :

$$y_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}; \qquad y_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

Construire les courbes représentatives. Quand x est positif et augmente indéfiniment, trouver la limite de $y_1 - 2x$ et de y_2. Interprétation géométrique.

2° Montrer que y_1 et y_2 sont les deux racines de l'équation $y^2 - 2xy + 1 = 0$ où y est considérée comme l'inconnue. On pourrait construire la courbe H représentée par cette équation en écrivant $x = \dfrac{y^2 + 1}{2y}$ et en faisant varier y de $-\infty$ à $+\infty$. Quel serait le graphique obtenu ?

792. On considère dans un cercle une corde et un diamètre perpendiculaires l'un sur l'autre. Soient O le centre du cercle, C une extrémité de la corde, D une extrémité du diamètre, L la ligne formée par le rayon OC et l'arc de cercle CED (moindre qu'une demi-circonférence), x la distance des deux points C et D, y le rayon du cercle, a une longueur constante donnée.

Étudier la relation qui doit exister entre les deux longueurs variables x et y pour que l'aire engendrée par la révolution de la ligne L autour du diamètre considéré ci-dessus soit constamment égale à πa^2; en déduire les limites entre lesquelles peut alors varier x, et étudier la variation du volume fonction de x compris à l'intérieur de cette aire constante.

793. On désigne par M tout point d'un plan dont les coordonnées rapportées à un repère orthonormé xOy, vérifient l'équation : $(y - 2x)(3y - x) + 2x - 6y + 3 = 0$.

1° On donne à x une valeur variable m. Pour quelles valeurs de m existe-t-il des points M ayant cette abscisse? En déduire l'existence d'une bande du plan, limitée par deux droites parallèles, ne contenant pas de point M. Placer les points M sur les droites qui limitent cette bande. Mêmes questions si l'on donne à y une valeur variable p.

2° Montrer que, sur chaque droite d'équation $y - 2x = \lambda$, il existe un seul point M, sauf pour une de ces droites D, que l'on déterminera.

Trouver une autre droite D′ ayant la même propriété. Où se coupent-elles ?

3° Pour $x = m$, on a formé au 1° l'équation qui donne les ordonnées des deux points M correspondant à cette valeur de x, quand ils existent. Soient M_1 et M_2 ces deux points. Trouver le lieu du milieu P du segment M_1M_2. Le construire.

Calculer, en fonction de m, la distance M_1M_2. Étudier sa variation quand m varie. Calculer la distance des points P_1 et P_2, pris sur D et D′ et d'abscisse m. Déterminer la limite de la différence des longueurs P_1P_2 et M_1M_2 quand m croît indéfiniment.

De ces derniers résultats et du lieu de P, déduire une représentation graphique de tous les points M.

— Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

794. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$. **795.** $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$. **796.** $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$.

797. $y = x^3 + \dfrac{1}{x^2}$. **798.** $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$. **799.** $y = \dfrac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$.

800. $y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. **801.** $y = \dfrac{x^3 - 10x^2}{1 - x}$. **802.** $y = \dfrac{9x^2 - 10}{x(x^2 - 1)}$.

803. Étudier les varations de la fonction : $y = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ et tracer la courbe représentative.

2° En déduire que l'équation : $x^3 - 9x - mx^2 + m = 0$ a trois racines quel que soit m.

804. 1° Construire la courbe C représentant la fonction : $y = \dfrac{3(x - x^3)}{1 - 9x^2}$.

Discuter, lorsque m varie, le nombre des points d'intersection avec la droite $y = mx$.

2° On pose : $\operatorname{tg} a = x\sqrt{3}$ et $\operatorname{tg} b = y\sqrt{3}$. Vérifier que $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} 3a$.

805. 1° Construire dans un repère orthonormé la courbe C : $y = \dfrac{(x - 3)^2(2x + 3)}{3(x^2 - 1)}$.

Montrer l'existence d'une asymptote de pente $\dfrac{2}{3}$ en cherchant la limite de $y - \dfrac{2}{3}x$ lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

2° Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $-\dfrac{3}{2}$ ainsi que les coordonnées du point où T recoupe C.

3° Une droite variable D pivote autour du point C d'abscisse $-\frac{3}{2}$ et recoupe C en A et B. Trouver l'abscisse du milieu M de AB et construire le lieu de M.

806. On considère la fraction rationnelle : $y = \frac{x^3 + px + q}{x^2 - x - 2}$.

Calculer p et q de façon que le reste de la division du numérateur par le dénominateur se réduise à 4, et construire dans ce cas la courbe représentative. On coupe cette courbe par la droite $y = x + a$. Discuter l'existence des points d'intersection M′, M″ suivant les valeurs de a. Lieu du milieu de M′M″.

807. On considère la fonction : $y = x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2 - 1}$.

1° Représenter graphiquement les variations de la fonction pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

2° Calculer en fonction de λ les coordonnées des points de la courbe où la tangente est parallèle à Ox. Discuter leur nombre suivant les valeurs de λ.

3° Montrer que si λ varie, ces points sont situés sur une demi-droite et une conique fixe que l'on construira.

808. 1° On considère la fonction : $y = \frac{x^3 - 10x^2}{1 - x}$.

Étudier les variations de y et construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé. Cette courbe coupe l'axe des x en deux points dont l'un A a une abscisse positive.

2° Une droite L de pente m pivote autour de A. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des points d'intersection de C et L. Quelles sont les coordonnées des points de contact des tangentes à C issues de A ?

3° Soient M′ et M″ les points d'intersection lorsqu'ils existent et autres que A de la droite L et de la courbe C. Calculer en fonction de m les coordonnées du milieu I de M′M″ et construire le lieu de I. Quels sont les points communs à ce lieu et à la courbe C ?

809. Soit la fonction $y = 5\cos x - 10\cos^3 x + 8\cos^5 x$.

1° Montrer que $y = \frac{5}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 5x$.

2° Variation et graphe de cette fonction sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

810. 1° Étudier la fonction $y = \sin x\,(7 + \cos 2x)$ sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2° Tracer le graphe de cette fonction pour $x \in [-\pi; +\pi]$.

811. Construire dans un repère orthonormé le graphe de $y = 2\sin^2 x - 2\sin x - 1$.

812. 1° On donne $f(x) = 9\cos^2 x - 6(p + q)\cos x + p^2 + q^2$ où p et q sont les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé.

1° Discuter l'existence et le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ suivant la position du point M.

2° Étudier la variation et le graphe de la fonction $y = f(x)$ sur $[0; \pi]$ lorsque $p = 6$ et $q = 3$.

813. Variation et graphe de la fonction : $y = 2\sin 3x + 6\sin x - 3\cos 2x$.

814. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x + 1$; résoudre dans R les équations :

1° $f(x) = 0$

2° $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x + \dfrac{f(x)}{1 - \sqrt{3}}}$.

815. On considère la fonction : $y = \cos^3 x - 3 \cos + 2$.

1° Étudier ses variations dans l'intervalle $[0, \pi]$. Justifier ce choix.

2° Tracer le graphe sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

816. On considère la fonction $y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1° Calculer y' et y''. Former une relation indépendante de x liant y' et y et une relation indépendante de x liant y et y''.

2° Représenter graphiquement les variations de y pour $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

817. On considère la fonction $y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$.

1° Résoudre l'équation $y = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

2° Montrer que $y' = \frac{-\cos x\,(3 \sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$.

3° Étudier la variation et le graphe de y sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

FONCTIONS PRIMITIVES

413. Définition. — ***Lorsque sur un segment*** $[a, b]$, ***une fonction*** $F(x)$ ***admet pour dérivée une fonction donnée*** $f(x)$ ***on dit que*** $F(x)$ ***est une fonction primitive de*** $f(x)$ ***sur ce segment.***

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow F(x) \text{ primitive de } f(x).$$

Nous démontrerons plus loin (n° 426) que toute fonction $f(x)$ définie et continue sur un segment $[a, b]$ admet au moins une primitive sur ce segment.

On vérifie par dérivation que $f(x) = 2x + 4$ admet pour primitives : $x^2 + 4x$, $(x + 1)(x + 3)$ ou $(x + 2)^2$. Une fonction donnée peut donc admettre plusieurs primitives.

414. Théorème. — ***Si la fonction donnée*** $f(x)$ ***admet sur*** $[a, b]$ ***une primitive*** $F(x)$ ***elle en admet une infinité donnée par la formule :*** $G(x) = F(x) + C$ ***où*** C ***désigne une constante arbitraire.***

Cela résulte du n° 334.

Réciproquement, si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$, les deux fonctions $G(x)$ et $F(x)$ ayant même dérivée sur $[a; b]$ ont une différence constante C sur $[a; b]$:

$$\forall x \in [a, b] \quad G'(x) = F'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{G(x) = F(x) + C}$$

Deux primitives d'une même fonction ont une différence constante sur $[a, b]$.

Il en résulte que pour connaître les primitives de $f(x)$ sur $[a; b]$, il suffit d'en connaître une seule, $F(x)$. Les primitives de $f(x)$ se nomment aussi *intégrales* de $f(x)$ et leur ensemble se note :

$\int f(x)\, dx$ qui se lit « somme de $f(x)\, dx$ » ou « intégrale de $f(x)\, dx$ ».

et :

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \Longleftrightarrow f(x) = F'(x) \Longleftrightarrow dF = f(x)\, dx.$$

415. Corollaire. — ***Toute fonction*** $f(x)$ ***définie et continue sur*** $[a, b]$, ***admet une primitive unique prenant en un point donné*** α ***de*** $[a, b]$ ***une valeur donnée*** β.

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$. Pour que la primitive : $G(x) = F(x) + C$ soit égale à β pour $x = \alpha$, il faut et il suffit que :

$$G(\alpha) = F(\alpha) + C = \beta \Longrightarrow C = -F(\alpha) + \beta \quad \text{et} \quad G(x) = F(x) - F(\alpha) + \beta.$$

La primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = \alpha$ est donc : $F(x) - F(\alpha)$.

416. Primitives classiques. — En désignant par A, B, C des constantes, on vérifie par dérivation le tableau suivant dans lequel les primitives de x^m et $u^m\,u'$ sont valables pour m rationnel irréductible autre que -1.

$\int A\,dx = Ax + C$	$\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int u^m\,u'\,dx = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + C$	$\int (ax+b)^m\,dx = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos u . u'dx = \sin u + C$	$\int \sin u . u'dx = -\cos u + C$
$\int \cos (ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}\sin (ax+b) + C$	$\int \sin (ax+b)\,dx = -\dfrac{1}{a}\cos (ax+b) + C$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)\,dx = \mathrm{tg}\,x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \mathrm{cotg}^2 x)\,dx = -\mathrm{cotg}\,x + C$

417. Primitives d'une somme. — Si $F(x)$ et $G(x)$ sont respectivement primitives de $f(x)$ et $g(x)$, la fonction $F(x) + G(x)$ est une primitive de $f(x) + g(x)$ car la dérivée de $F(x) + G(x)$ est $F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Donc :

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C$$

Cette propriété s'étend aisément à une somme de plusieurs fonctions.

418. Primitives de $\alpha f(x)$. — Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et α un réel constant, la fonction $\alpha\,F(x)$ est une primitive de $\alpha f(x)$ car la dérivée de $\alpha\,F(x)$ est $\alpha f(x)$. Donc :

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + C \qquad \text{et (n° 417) :}$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C.$$

419. Exemples.

1° $\int (x^3 + 3x^2 - 4x + 5)\,dx = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 5x + C$

2° $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \cdots + a_{n-1}x + a_n)\,dx = a_0 \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \dfrac{x^n}{n} \cdots + a_{n-1}\dfrac{x^2}{2} + a_n\,x + C.$

3° $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

4° $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

5° $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{dx}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

6° $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, dx - dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

7° *Primitives de* $f(x) = \dfrac{3x}{x+\sqrt{x^2-1}}$. — Rendons rationnel le dénominateut.

On obtient : $f(x) = 3x^2 - 3x\sqrt{x^2-1}$. Une primitive de $3x^2$ est x^3. Pour déterminer une primitive de $3x\sqrt{x^2-1}$, posons $u = x^2-1$, $u' = 2x$ et $3x\sqrt{x^2-1} = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}u' = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)'$

Ce qui donne : $F(x) = x^3 - u^{\frac{3}{2}} + C = x^3 - (x^2-1)^{\frac{3}{2}} + C.$

8° *Primitives de* $f(x) = \dfrac{3-2x}{(x+1)^3}$. En posant $x+1 = X$, on obtient : $g(X) = \dfrac{5-2X}{X^3} = \dfrac{5}{X^3} - \dfrac{2}{X^2}$

comme $X' = 1$ on voit que $f(x) = \left(-\dfrac{5}{2X^2} + \dfrac{2}{X}\right)' = \left(\dfrac{4X-5}{2X^2}\right)' = \left[\dfrac{4x-1}{2(x+1)^2}\right]'$.

Donc $f(x)$ admet pour primitives : $F(x) = \dfrac{4x-1}{2(x+1)^2} + C.$

420. Remarque. — Si on peut écrire $f(x)$ sous la forme uv', on voit immédiatement en posant $z = uv \Longrightarrow z' = u'v + uv'$, que $uv' = z' - vu' = (uv)' - vu'$.

On ramène ainsi la recherche d'une primitive de uv' à celle de vu' qui peut être plus simple. Ainsi : $y' = (ax+b)f'(x) \Longrightarrow y = (ax+b)f(x) - a\,F(x) + C.$

EXEMPLE : $f(x) = \dfrac{3-2x}{(x+1)^3}$. — En posant $u = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $u' = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$ et $v = \frac{1}{2}(2x-3)$:

$$f(x) = vu' = (uv)' - v'u = \left[\frac{2x-3}{2(x+1)^2}\right]' - \frac{1}{(x+1)^2}$$

et

$$F(x) = \frac{2x-3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + C = \frac{4x-1}{2(x+1)^2} + C.$$

On retrouve la primitive du 8e exemple ci-dessus.

INTERPRÉTATION DES PRIMITIVES

421. Théorème. — ***Si la fonction $f(x)$ est définie, continue et positive sur le segment $[a, b]$, l'aire S de la portion de plan rapportée au repère orthonormé xOy et limitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisses a et x, est une fonction de x, primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$.***

Considérons (fig. 115 et 116) sur la courbe $y = f(x)$, l'arc AB correspondant à $a \leqslant x \leqslant b$, et le point donné M de coordonnées x et $y = f(x)$ de cet arc. Désignons par A', B', M' les projections orthogonales de A, B et M sur Ox. L'aire $S_{AA'M'M}$ du trapèze mixtiligne AA'M'M est une fonction $S(x)$ de l'abscisse x du point M, dont nous nous proposons de calculer la dérivée.

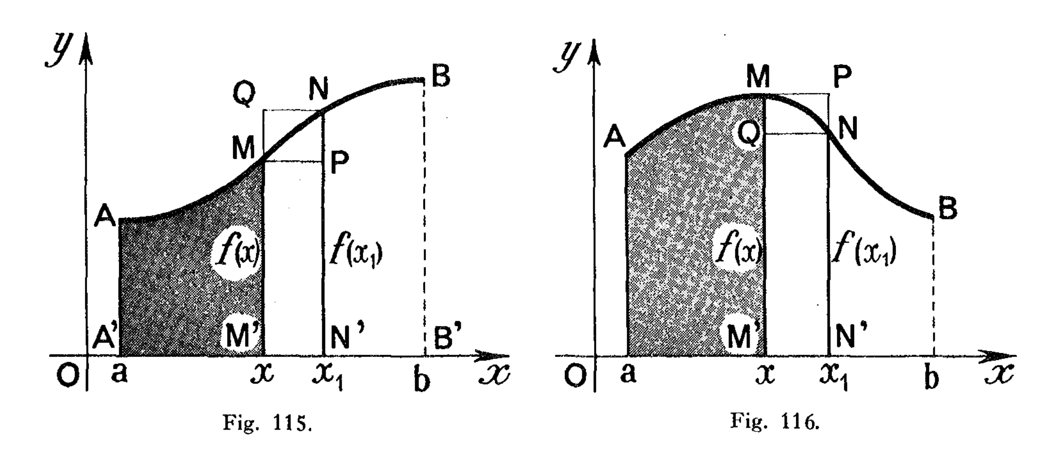


Fig. 115. Fig. 116.

A cet effet considérons une valeur x_1 suffisamment voisine de x pour que la fonction $f(x)$ soit monotone sur $[x, x_1]$ ou $[x_1, x]$. Lorsque x prend l'accroissement $\Delta x = x_1 - x$, l'aire $S(x)$ prend l'accroissement $\Delta S = S_1 - S$. Or $|S_1 - S|$ est l'aire du trapèze mixtiligne MM'N'N (fig.115et116) visiblement comprise entre les aires des rectangles MM'N'P et QM'N'N.

1° Pour $\Delta x = x_1 - x > 0$, on obtient suivant que $f(x)$ est croissante ou décroissante :

a) $f(x) < f(x_1) \Longrightarrow (x_1 - x) f(x) < S_1 - S < (x_1 - x) f(x_1)$.

et puisque $x_1 - x > 0$: $f(x) < \dfrac{S_1 - S}{x_1 - x} < f(x_1)$. (1)

b) $f(x) > f(x_1) \Longrightarrow (x_1 - x) f(x_1) < S_1 - S < (x_1 - x) f(x)$

et de même $f(x_1) < \dfrac{S_1 - S}{x_1 - x} < f(x)$. (2)

2° Pour $\Delta x = x_1 - x < 0$ on voit de même que $S - S_1$ est compris entre $(x - x_1) f(x)$ et $(x - x_1) f(x_1)$ ce qui conduit encore à l'une des conclusions (1) ou (2). Comme $f(x)$ est par hypothèse continue sur $[a, b]$, $f(x_1) \to f(x)$ lorsque $x_1 \to x$, ce qui permet de conclure que dans tous les cas :

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \in [f(x), f(x_1)] \Longrightarrow \lim_{x_1 \to x} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x) \Longleftrightarrow S'(x) = f(x).$$

La fonction $S(x)$ admettant $f(x)$ pour dérivée sur $[a, b]$ est donc une primitive de $f(x)$. Puisque $S(a) = 0$, c'est la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = a$. Notons que la démonstration ci-dessus est valable même si $f(a)$ ou $f(b)$ est nul. Si la fonction $f(x)$ présente un maximum ou un minimum pour $x = c$, le théorème valable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ est donc valable sur $[a, b]$.

REMARQUE. — Si le repère xOy n'est pas orthonormé, mais simplement rectangulaire le théorème reste valable à condition de prendre pour unité d'aire, l'aire du rectangle admettant pour côtés consécutifs les unités de longueur utilisées sur l'axe Ox et sur l'axe Oy. Ainsi pour $|\vec{i}| = 2$ cm, $|\vec{j}| = 3$ cm, l'unité d'aire sera : $s = 3 \times 2 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$.

422. Corollaires. — 1° ***Si*** $F(x)$ ***désigne une primitive quelconque de*** $f(x)$ ***sur*** $[a, b]$ ***on obtient :***

$$\boxed{S(x) = F(x) - F(a).}$$

Cela résulte du n° 415 car $S(x) = F(x) + C$ avec $F(a) + C = 0$ d'où $C = -F(a)$.

On écrit en abrégé : $S(x) = [F(x)]_a^x$ et l'*aire* $S(x) = S_{AA'M'M}$ *est dite associée sur* $[a, x]$ *à la fonction positive* $f(x)$.

2° ***L'aire associée sur*** $[a, b]$ ***à la fonction continue et positive*** $f(x)$ ***est donc pour*** $a < b$ **:**

$$S_{AA'B'B} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette formule n'est établie que pour $a < b$ et $f(x) > 0$ sur $]a, b[$. Elle est cependant valable si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$.

423. Aire algébrique associée sur $[a, b]$ **à la fonction continue** $y = f(x)$. Afin d'étendre la formule précédente à tous les cas possibles, nous ferons les conventions suivantes :

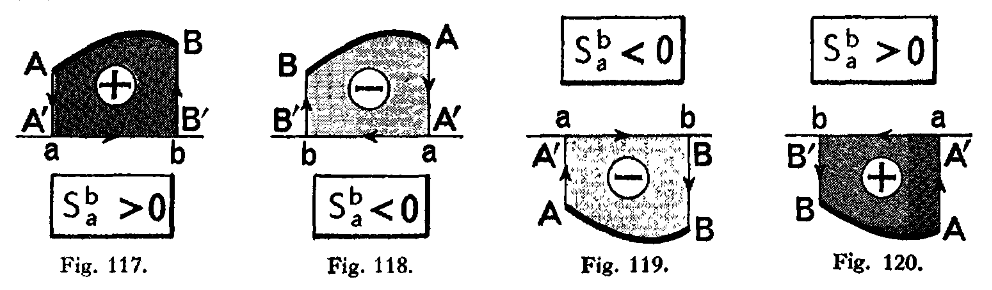


Fig. 117. Fig. 118. Fig. 119. Fig. 120.

1° Si $f(x)$ conserve un signe donné sur $[a, b]$ (fig. 117 à 120), nous affecterons l'aire arithmétique $S_{AA'B'B}$ du trapèze mixtiligne AA'B'B du signe + ou du signe — suivant que le sens du contour AA'B'BA est le sens direct ou le sens rétrograde dans le plan orienté par le repère xOy. L'aire algébrique associée sur $[a, b]$ à la fonction $f(x)$ sera désignée par S_a^b même si $f(a)$ et $f(b)$ sont nuls.

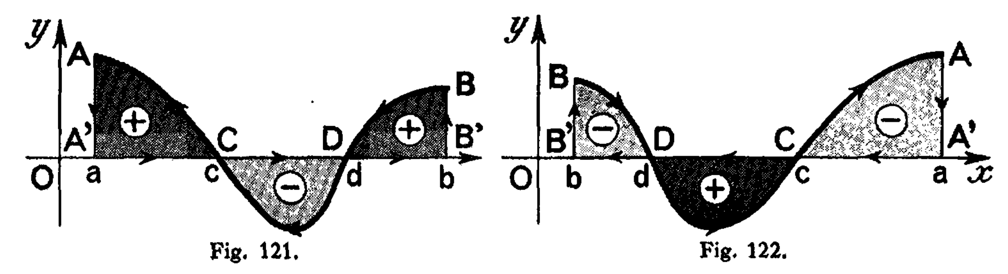


Fig. 121. Fig. 122.

2° Si la fonction $f(x)$ s'annule pour c et d sur $[a, b]$ tels que $a < c < d < b$ nous prendrons par définition : $S_a^b = S_a^c + S_c^d + S_d^b$ (fig. 121 et 122).

Ces conventions étant posées, montrons que :

424. Théorème. — ***L'aire algébrique*** S_a^b ***associée sur*** $[a, b]$ ***à la fonction continue*** $y = f(x)$ ***est dans tous les cas égale à*** $F(b) - F(a)$ ***où*** $F(x)$ ***désigne une primitive quelconque de*** $f(x)$.

1° $f(x) > 0$ sur $]a, b[$. Si $a < b$ le contour AA'B'B est de sens direct (fig.117) et l'on a :

$$S_a^b = F(b) - F(a) \text{ (n° 422, 2°).}$$

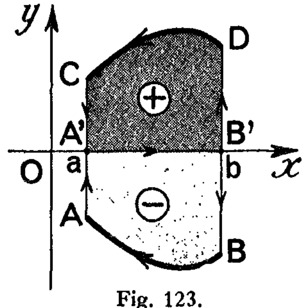


Fig. 123.

Si $b < a$ le contour AA'B'B est de sens rétrograde (fig. 118) et l'aire algébrique :

$$S_a^b = -S_b^a = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$$

2° $f(x) < 0$ sur $]a, b[$. Posons

$$f(x) = -g(x) \quad \text{et} \quad F(x) = -G(x).$$

La fonction $g(x)$ étant positive, l'aire algébrique associée sur $[a, b]$ à $g(x)$ est $\Sigma_a^b = G(b) - G(a)$. Or les contours AA'B'BA et CA'B'DC (fig. 123) étant de sens contraires on en déduit que :

$$S_a^b = -\Sigma_a^b = -[G(b) - G(a)] = -G(b) + G(a) = F(b) - F(a).$$

3° Si la fonction $f(x)$ s'annule pour c et d sur $]a, b[$, on obtient (fig. 121 et 122) :

$$S_a^b = S_a^c + S_c^d + S_d^b = [F(c) - F(a)] + [F(d) - F(c)] + [F(b) - F(d)]$$

soit après réduction : $S_a^b = F(b) - F(a).$

Donc dans tous les cas :

$$f(x) = F'(x) \text{ continue sur } [a, b] \implies \boxed{S_a^b = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}\,.$$

425. Notation $\int_a^b f(x)dx$. — Par définition, l'aire algébrique S_a^b, associée sur $[a; b]$ à la fonction $f(x)$, se nomme *intégrale définie* de $f(x)$ sur $[a; b]$ et se symbolise par :

$$S_b^a = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{lire : « somme de } a \text{ à } b \text{ de } f(x)dx \text{ ».}$$

L'expression $f(x)\,dx$ est *l'élément différentiel*, tandis que a et b sont les *bornes (inférieure et supérieure)* de cette intégrale. D'après ce qui précède :

$$\boxed{S_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Ce nombre S_a^b est indépendant de la variable d'intégration. On peut écrire :

$$S_a^b = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

En particulier l'aire algébrique : $S_a^x = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$ s'écrit de préférence : $S_a^x = \int_a^x f(t)\,dt$ lorsqu'on veut éviter de confondre la variable d'intégration t avec la borne supérieure x.

426. Corollaire. — ***L'intégrale*** $S_a^x = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ ***est une primitive de*** $f(x)$ ***sur*** $[a, b]$ ***nulle pour*** $x = a$.

$y = S_x^a$ est une fonction de x, définie sur $[a, b]$ nulle pour $x = a$ et admettant pour dérivée : $y' = F'(x) = f(x)$. Ainsi se trouve établie la proposition admise au n° 386 :

Toute fonction $f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$ admet au moins une primitive sur cet intervalle.

1° $\int f(x)\, dx$ symbolise l'ensemble des primitives de $f(x)$.

2° $\int_a^x f(t)\, dt$; a constant, x variable symbolise la primitive de $f(x)$, nulle pour $x = a$.

3° $\int_a^b f(x)\, dx$, où a et b sont deux constantes réelles est un nombre réel qui mesure l'aire algébrique S_a^b associée sur $[a; b]$ à la courbe $y = f(x)$.

APPLICATIONS DES PRIMITIVES

427. Surface plane limitée par la courbe $y = f(x)$. — La formule

$$S_a^b = \int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b] = F(b) - F(a)$$

du n° 425 donne immédiatement pour $a < b$ et $f(x) > 0$ l'aire du trapèze mixtiligne AA'B'B. Si $f(x)$ est négatif sur $[a, b]$, on change le signe de $f(x)$.

EXEMPLE I. — *Aire limitée par un arc de la parabole :* $y = \frac{x^2}{2p}$ (fig. 124).

Une primitive de $\frac{x^2}{2p}$ est $\frac{1}{2p}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6p}$. D'où : $S_{OA'A} = \int_0^a \frac{x^2}{2p}\, dx = \left[\frac{x^3}{6p}\right]_0^a = \frac{a^3}{6p}$.

Or : $OA' = a$, $A'A = \frac{a^2}{2p}$ donc : $S_{OA'A} = \frac{1}{3}\, OA'.A'A = \frac{1}{3}\, OA'.OK$.

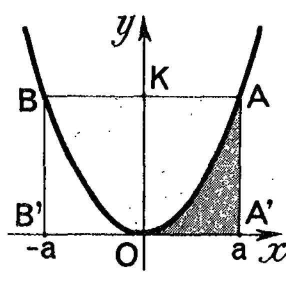


Fig. 124.

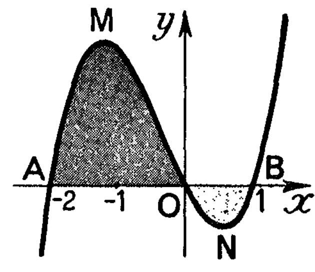


Fig. 125.

On peut en déduire l'aire du segment de parabole OAB, car :

$$S_{OAB} = 2S_{OAK} = 2\left[OA'.OK - \frac{1}{3}\, OA'.OK\right] = \frac{4}{3}\, OA'.OK = \frac{2}{3}\, AB.OK.$$

L'aire du segment de parabole OAB est les 2/3 de celle du rectangle ABB'A'.

EXEMPLE II. — *Aires des segments limités par* Ox *et la courbe* $y = x^3 + x^2 - 2x$.

La courbe $y = x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$ coupe Ox en 3 points A (-2), O(0) et B$(+1)$ (fig. 125). La fonction y admettant pour primitive : $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$ on obtient :

$$S_{OMA} = \int_{-2}^{0} y\,dx = \left[\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{8}{3}$$

$$S_{ONB} = -\int_{0}^{1} y\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + 0 = \frac{5}{12}.$$

428. Surface comprise entre les courbes $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$.

Supposons d'abord que, sur $[a, b]$, les deux fonctions continues $f_1(x)$ et $f_2(x)$ vérifient $0 \leqslant f_1(x) < f_2(x)$. L'aire S du trapèze mixtiligne $A_1B_1B_2A_2$ (fig. 126) est la différence

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx \qquad (1)$$

1° ***L'aire* S *de la portion de plan* $A_1B_1A_2B_2$ *n'est autre que l'aire* S_a^b *associée sur* $[a, b]$ *à la fonction* $y = f_2(x) - f_1(x)$ *positive sur* $[a, b]$.**

Si on suppose A_1 et A_2 confondus (fig. 127), ainsi que B_1 et B_2 on voit que la formule (1) permet de déterminer l'aire d'une portion de plan limitée par une courbe non croisée.

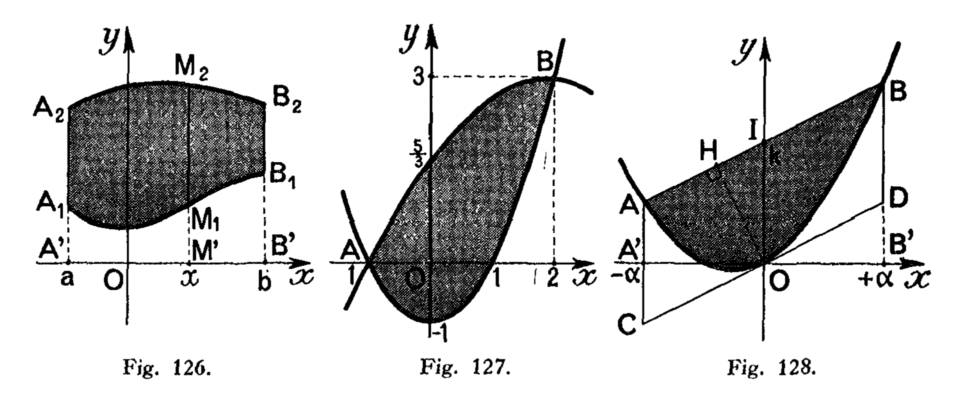


Fig. 126. Fig. 127. Fig. 128.

2° ***L'aire* S(x) *de la portion de plan* $A_1M_1M_2A_2$ *admet pour dérivée la longueur de la corde* M_1M_2 *d'abscisse* x.**

$S(x) = [F_2(x) - F_1(x)] - [F_2(a) - F_1(a)]$ admet sur $[a, b]$ pour dérivée (fig. 126) :

$$S'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f_2(x) - f_1(x) = \overline{M'M_2} - \overline{M'M_1} = \overline{M_1M_2} = M_1M_2.$$

3° ***Toute affinité orthogonale de rapport k transforme une portion de plan d'aire* S *en une portion de plan d'aire* kS.**

Dans l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport k, les courbes $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$ deviennent $Y_1 = kf_1(x)$ et $Y_2 = kf_2(x)$ et l'aire Σ_a^b correspondante s'écrit :

$$\Sigma_a^b = [k\,F_2(x) - k\,F_1(x)]_a^b = k\,[F_2(x) - F_1(x)]_a^b \implies \boxed{\Sigma_a^b = k\,S_a^b}.$$

— Ces résultats restent valables lorsque les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ne sont pas constamment positives sur $[a, b]$. Il suffit d'appliquer à la portion de plan $A_1M_1B_1B_2M_2A_2$ la translation de vecteur $\vec{V}\,(0, h)$ en prenant h suffisamment grand. Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont remplacées par les fonctions positives $f_1(x) + h$ et $f_2(x) + h$, ce qui ne change pas leur différence $f_2(x) - f_1(x)$, ni la longueur de la corde M_1M_2.

429. Exemples.

1° *Aire de la portion de plan comprise entre les deux paraboles :*

$$y_1 = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad y_2 = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5).$$

Ces deux paraboles (fig. 127) se coupent en A (— 1; 0) et B (2; 3) et dans l'intervalle [— 1; 2] on a : $y_2 > y_1$. D'après ce qui précède l'aire S cherchée est :

$$S = \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-1}^{2} -\frac{4}{3}(x^2 - x - 2)\,dx$$

La fonction à intégrer admet : $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8x}{3}$ pour primitive.

D'où :

$$S = \left[-\frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{3} + \frac{8}{3}x\right]_{-1}^{2} = -\frac{4}{9}(8 + 1) + \frac{2}{3}(4 - 1) + \frac{8}{3}(2 + 1) = 6.$$

2° *Aire d'un segment de parabole.* — Considérons (fig. 128) la parabole : $y_1 = ax^2 + bx$, tangente en O à la droite $y = bx$ et la corde AB, parallèle à cette tangente d'équation $y_2 = bx + k$. Les abscisses de A et B sont racines de $ax^2 = k$. Ce sont donc deux nombres opposés $-\alpha$ et $+\alpha$ tels que $a\alpha^2 = k$, ce qui montre que Oy passe par le milieu I de AB.

L'aire du segment limité par l' arc AOB de la parabole et par sa corde AB est donc :

$$S_{AOB} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (bx + k - ax^2 - bx)\,dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (k - ax^2)\,dx$$

D'où : $$S_{AOB} = \left[kx - \frac{ax^3}{3}\right]_{-\alpha}^{+\alpha} = 2k\alpha - \frac{2a\alpha^3}{3}.$$

Or : $a\alpha^2 = k$. Donc $$S_{AOB} = 2k\alpha - \frac{2}{3}k\alpha = \frac{4}{3}\alpha.k = \frac{2}{3}\text{A'B'.OI}.$$

Ce qui représente les 2/3 de l'aire du parallélogramme ACDB circonscrit au segment de parabole. En posant AB = B et OH = h l'aire de ce parallélogramme est aussi $B.h$.

$$\boxed{S_{AOB} = \frac{2}{3}B.h}.$$

L'aire d'un segment de parabole est les 2/3 du produit de la longueur de sa corde par celle de sa flèche.

430. Extensions de la formule $S_a^b = [F(x)]_a^b$. — La formule donnant l'aire S_a^b attachée, dans l'intervalle $[a, b]$, à la fonction $f(x)$ a été établie au supposant a et b finis ainsi que $f(a)$ et $f(b)$. Montrons comment on peut, dans certains cas utiliser la formule pour b ou $f(b)$ infini, ce qui permet de mesurer l'aire d'une portion de plan dont tous les points de sont pas à distance finie.

1° L'aire S_0^x attachée à la fonction $y = \frac{2}{(x + 1)^2}$ qui admet pour primitive $F(x) = -\frac{2}{(x + 1)}$ est donnée par la formule : $S_0^x = \left[\frac{-2}{x + 1}\right]_0^x = 2 - \frac{2}{x + 1}$ et mesure l'aire de la portion de plan

AOM'M (fig. 129). Or lorsque l'abscisse x de M croît indéfiniment, il n'en est pas de même, comme on pourrait le penser, de l'aire S_0^x, qui admet la limite + 2. Par définition nous écrirons :
$S_0^\infty = [F(x)]_0^\infty = F(\infty) - F(0) = 2.$

$$S_a^\infty = \int_a^\infty f(x)\,dx = [F(x)]_a^\infty = F(\infty) - F(a)$$

Le symbole $S_a^\infty = [F(x)]_a^\infty$ a donc un sens si $F(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini.

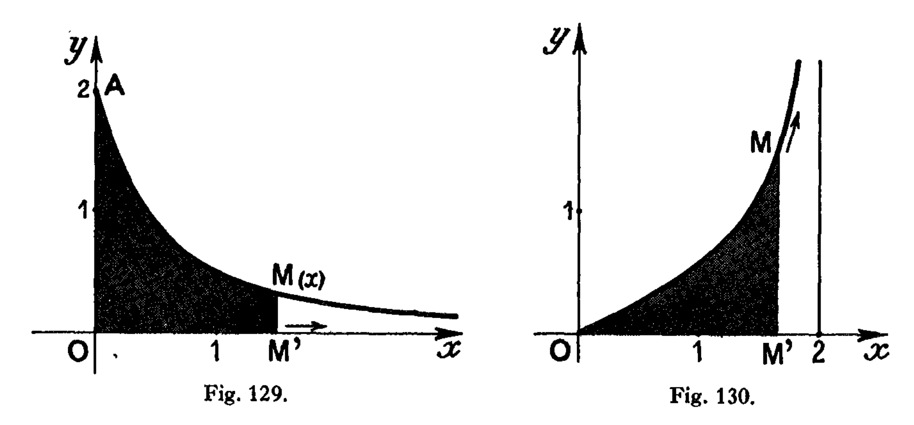


Fig. 129. Fig. 130.

2° L'aire S_0^x attachée à la fonction $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ qui admet pour primitive

$$F(x) = -\sqrt{4 - x^2},$$

est égale à : $S_0^x = [-\sqrt{4 - x^2}]_0^x = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

Or lorsque x tend vers $+2$, y tend vers $+\infty$, mais S_0^x tend vers la limite $+2$ (fig. 130). Nous écrirons :

$$S_0^2 = \int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{4 - x^2}} = [-\sqrt{4 - x^2}\,]_0^2 = +2.$$

Le symbole $S_a^b = [F(x)]_a^b$ a donc un sens, même si $f(b)$ est infini, lorsque $F(x)$ admet une limite finie pour $x = b$.

EXERCICES

— Trouver les primitives des fonctions suivantes :

818. $3x^2 - 4x + 7$; $2x^3 - 6x^2 + 1$; $5x^4 - 3x^2 + 4$.

819. $6x^2 - \dfrac{4}{x^2}$; $2x^3 + 4 + \dfrac{2}{x^3}$; $1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}$.

820. $4(x + 1)^4$; $8(2x - 5)^3$; $\dfrac{4}{(3x - 2)^3}$.

821. $x^3(x^4 + 1)^2$; $(2x + 3)(x^2 + 3x)^4$; $(3x^2 + 1)(x^3 + x)^{5/2}$.

822. $\dfrac{2x + 1}{(x^2 + x - 3)^2}$; $\dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 7)^{3/2}}$; $\dfrac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n}$.

823. $\sqrt{4x + 5}$; $(3x - 7)^{3/2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{2x + 3}}$.

824. $\dfrac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$; $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4 + 7}}$; $\dfrac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 5x - 9}}$.

825. Trouver suivant les valeurs de x les primitives de :

$$\sqrt{(3x-1)^2}; \qquad \sqrt{(4x+5)^6}; \qquad \sqrt{9x^4-4x^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{4x^{10}-x^6}.$$

— Trouver la primitive de :

826. $6x^5 - 4x^3 + 2x - 7$ égale à $\frac{1}{8}$ pour $x = \frac{1}{4}$.

827. $(x+2)^6$ égale à 4 pour $x = -1$.

828. $3x^2(x^3+5)$ égale à 2 pour $x = -3$.

829. $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 9}{(x-1)^2}$ égale à 0 pour $x = 1$.

830. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ égale à 5 pour $x = 3$.

831. $\sqrt{x^6}$ égale à 1 pour $x = 1$.

832. 1° Équation d'une parabole P passant par l'origine des coordonnées, dont l'axe est parallèle à Oy et dont le foyer F est sur Ox; on pose $\overline{\text{OF}} = a$.

2° Aire comprise entre la parabole et l'axe Ox.

833. 1° Décomposer en un produit de facteurs du premier degré le polynôme :

$$P(x) = x^4 - 8x^2 + 4.$$

2° Trouver l'aire limitée par la courbe $y = P(x)$ et l'axe des x dans la région $x > 0$.

834. 1° Courbe C représentative de la fonction : $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$.

2° Aire comprise entre la courbe C et les axes Ox et Oy.

835. 1° Construire la courbe représentative de la fonction : $y = (x^2 - 3x + 1)^2$.

2° La droite $y = 1$ coupe cette courbe en 4 points qui déterminent 3 arcs consécutifs. Calculer l'aire comprise entre chacun de ces arcs et sa corde.

836. 1° Construire la courbe représentative de la fonction : $y = x + \dfrac{4}{x^2}$.

2° Calculer l'aire comprise entre cette courbe, son asymptote oblique et les droites :

$$x = 2; \quad x = \lambda > 2.$$

3° Limite de cette aire quand λ tend vers l'infini.

837. 1° Construire les paraboles P et P' d'équations : $x^2 = 2py$ et $y^2 = 2p'x$ ($p > 0$ et $p' > 0$). Coordonnées de leur point d'intersection autre que l'origine.

2° Calculer l'aire comprise entre ces deux paraboles.

838. 1° Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$y = x^3 - 12x + 16 \quad \text{et} \quad y = 4x^2 - 8x.$$

Ces deux courbes se coupent en trois points M, N, P, le premier sur Ox.

2° Calculer l'aire comprise entre les deux arcs MN et l'aire comprise entre les deux arcs MP.

— Calculer les aires limitées par deux arcs ayant mêmes extrémités et appartenant à l'une et à l'autre des courbes d'équations suivantes :

839. $y = x^4 - 10x^2 + 9$ et $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

840. $y = x^4 - 5x^2 + 4$ et $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

841. $y = |x^4 - 5x^2 + 4|$ et $y = |x^3 + 2x^2 - x - 2|$.

842. $y = x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 1$ et $y = -x^6 + 4x^4 - 4x^2 + 1$.

843. 1° Étudier les variations de la fonction $y = x^2 - x - 6$. Construire la courbe représentative.

2° Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et l'ordonnée du point correspondant au maximum de y.

844. 1° Construire la courbe représentative de la fonction : $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

2° Aire comprise entre l'axe Ox et la partie de la courbe située au-dessous de cet axe.

845. 1° Les coordonnées d'un point M étant (x, y), dans quelle région doit-on choisir ce point M pour avoir en même temps :

$$x^2 - 2x - y - 5 < 0$$
$$x^2 - 4x + 4y - 24 < 0.$$

2° Évaluer l'aire de cette région.

846. 1° Déterminer a de façon que la courbe d'équation :

$$y = x^3 - ax^2 + 1$$

soit tangente à la droite d'équation $y = 5$ et construire la courbe correspondante.

2° La droite d'équation $y = 5$ touche la courbe précédente en un point A et la rencontre à nouveau en un point B dont on calculera l'abscisse. Calculer l'aire comprise entre le segment AB et la courbe.

847. On considère les courbes représentées par l'équation :

$$y = x^3 - 1 - m(x - 1)$$

où m désigne un paramètre variable.

1° Déterminer m de façon que la courbe soit tangente à l'axe des x.

2° Construire la courbe en donnant à m les diverses valeurs ainsi obtenues.

Pour chacune des courbes construites calculer l'aire limitée par la courbe et l'axe des x.

848. 1° Variations de la fonction : $z = x^2(3 - 2x)$.

2° Variations et courbe (C) représentative de la fonction : $y = x\sqrt{3 - 2x}$.

3° Déterminer les coefficients a, b, c pour que l'expression : $(ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$ soit une primitive de la fonction y.

En déduire l'aire de la portion de plan comprise entre la partie positive de l'axe Ox et la partie figurative de (C) dont les points ont des abscisses positives.

849. Les équations de deux paraboles rapportées à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ sont : $y^2 = ax$; $x^2 = by$ où a est l'abscisse, b l'ordonnée d'un point C du plan. On demande :

1° de calculer en fonction de a et b les coordonnées du point d'intersection D des deux paraboles autre que O, le coefficient directeur de la droite CD et de démontrer que l'angle $\widehat{CDO}$ est droit;

2° d'évaluer en fonction de a et b l'aire de la portion du plan située à l'intérieur des deux paraboles. Lieu décrit par les points C et D quand a et b varient de telle sorte que cette aire reste constante.

850. 1° Trouver le quotient et le reste de la division du polynôme $x^3 - ax^2 - a^2x + 5a^3$ par $x^2 - 2ax + a^2$.

2° Construire la courbe (C) représentant la variation de la fonction $y = \dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + 5a^3}{x^2 - 2ax + a^2}$ a étant une longueur donnée. Indiquer ses asymptotes.

3° Montrer qu'il existe une fonction de la forme : $z = \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x}{x - a}$ telle que la dérivée de z par rapport à x soit précisément la fonction y.

4° Chercher l'aire du trapèze curviligne compris entre la courbe (C), son asymptote oblique et deux parallèles à Oy d'abscisses $3a$ et $\lambda > 3a$.

Cette aire a-t-elle une limite quand λ augmente indéfiniment?

851. On considère un repère orthonormé xOy et la courbe (C) représentant la fonction $y = \dfrac{x^2}{a}$ (a donné).

1° Comment peut-on définir géométriquement cette courbe C ?

2° Calculer l'aire comprise entre la courbe C, l'axe Ox et une droite $x = x_0$.

3° Calculer l'aire $S(x_0, x_1)$ comprise entre la courbe (C) et une droite qui coupe (C) aux points M_0 et M_1 d'abscisses x_0 et x_1. Que peut-on dire de cette aire lorsque M_0 et M_1 se déplacent de façon que $x_1 - x_0$ reste constant ?

4° On prend M_0 et M_1 de façon que les tangentes en ces points soient rectangulaires. Exprimer $S(x_0, x_1)$ en fonction de l'une des variables x_0 ou x_1. Étudier les variations de $\sqrt[3]{S(x_0, x_1)}$.

Quel est le minimum de $S(x_0, x_1)$.

852. 1° Montrer que, par une translation convenable des axes, on peut réduire l'équation de la courbe $y = ax^2 + bx + c$ à la forme $Y = AX^2$. Relation entre a et A.

Déduire de la forme réduite les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice de la parabole donnée par rapport aux axes primitifs.

2° On considère, sur la parabole donnée, trois points P_0, P_1, P_2 dont les ordonnées sont y_0, y_1, y_2; la projection de P_0 sur Ox est le point milieu de P_1P_2. Démontrer que :

a) la tangente à la parabole en P_0 est parallèle à la droite P_1P_2;

b) les tangentes en P_1 et P_2 se coupent en Q, dont l'abscisse est la même que celle de P_0; le symétrique de Q par rapport à P_0 est sur P_1P_2;

c) l'aire S limitée par Ox, les droites D_1, D_2, parallèles à Oy menées par P_1, P_2, et l'arc de parabole P_1P_2 a pour expression : $S = \frac{x_2 - x_1}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0)$.

3° Si l'on appelle T_1 et T_2 les points où la tangente en P_0 coupe les droites D_1 et D_2 comparet, en utilisant les résultats précédents, les aires du parallélogramme $T_1P_1P_2T_2$ et du segment de parabole limité par l'arc P_1P_2 et la corde P_1P_2.

4° En déduire le rapport des aires du segment de patabole et du triangle QP_1P_2.

— Trouver les primitives de :

853. $\sin 2x$; $\cos 4x$; $\sin 2x \cos 2x$.

854. $\sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; $\sin^2 x \cos x$; $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

— Trouver la primitive de :

855. $\cos 3x \cos 4x$, égale à $\sqrt{3}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

856. $\cos x \cos 2x \cos 3x$, égale à 2 pour $x = \frac{\pi}{4}$.

857. $\cos x \cos 2x \cos 3x \cos 4x$, égale à 2 pour $x = \frac{\pi}{4}$.

858. $\sin 2x \sin 3x$, égale à 3 pout $x = \frac{\pi}{2}$.

— Calculer les primitives égales à 0 pour $x = \frac{\pi}{4}$ des fonctions suivantes

859. $\sin x \cos 2x$; $\sin 2x \sin 3x \sin 5x$; $\sin x \sin 2x \cos 4x$.

860. $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\sin^3 x$; $\cos^4 x$.

861. $\sin^5 x \cos x$; $\sin^3 2x$; $\cos^4 \frac{x}{2}$.

862. $\operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{cotg}^2 x$; $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^4 x}$; $\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{\sin^2 x}$.

863. $\text{tg}\, x + \text{tg}^3 x$; $\text{tg}^2 x + \text{tg}^4 x$; $\text{cotg}\, x + \text{cotg}^3 x$.

864. $\sin^3 x \cos^2 x$; $\sin^4 x \cos^4 x$; $\cos^4 x - \sin^4 x$.

865. $\cos^2 x + \sin^4 x$; $\cos^6 x + \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

866. 1° Construire le graphe des fonctions : $y = 4 \cos x$ et $y = |\sin 2x|$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$ et dans un même repère orthonormé.

2° Calculer l'aire comprise entre ces deux courbes.

867. 1° Construire, dans le même repère orthonormé, le graphe des fonctions : $y = 4 \sin x$ et $y = |\sin 2x|$ pour $x \in [0; \pi]$.

2° Calculer l'aire comprise entre ces deux courbes.

868. 1° Tracer dans le même repère orthonormé le graphe de :

$$y = x^4 - 5\pi^2 x^2 + 4\pi^4 \quad \text{et} \quad y = \cos \frac{x}{2}.$$

2° Calculer les aires limitées par deux arcs appartenant à l'une ou l'autre de ces deux courbes.

869. 1° Tracer dans le même repère orthonormé le graphe de :

$$y = |x^3 - \pi^2 x| \quad \text{et} \quad y = |\sin x|$$

2° Calculer les aires limitées par deux arcs appartenant à l'une ou l'autre de ces deux courbes.

CALCUL DE VOLUMES

431. Volume à bases parallèles.

Considérons le solide limité par une surface latérale donnée Σ et deux sections planes horizontales de cette surface (fig. 131) : l'une fixe de cote a, l'autre variable de cote $z > a$. Le volume V de ce solide est une fonction de z et il en est de même de l'aire $S(z)$ de sa base supérieure. Calculons la dérivée de ce volume $V(z)$.

Lorsque z prend la valeur $z_1 = z + \Delta z$, le volume V s'accroît d'un volume ΔV de hauteur $|\Delta z|$. Lorsque l'accroissement Δz est suffisamment petit en valeur absolue nous admettrons que la surface latérale $\Delta \Sigma$ de ΔV se projette orthogonalement sur le plan hori-

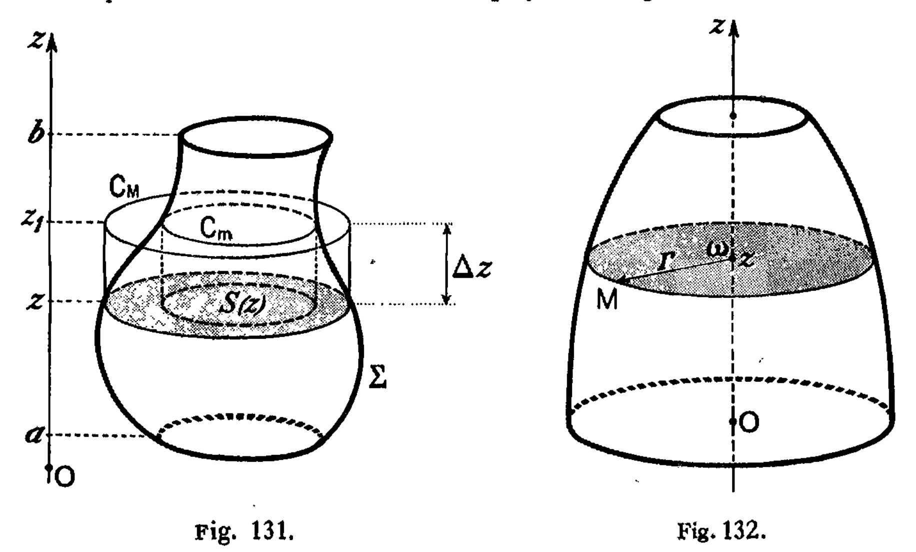


Fig. 131.

Fig. 132.

zontal de cote z suivant une portion de plan annulaire de contours C_m et C_M. Les cylindres droits de bases C_m et C_M et de hauteur $|\Delta z|$, sont l'un inscrit et l'autre, circonscrit à ΔV. En désignant par S_m et S_M les aires de leurs bases respectives on obtient :

$$S_m . |\Delta z| < |\Delta V| < S_M . |\Delta z|.$$

et puisque Δz et ΔV sont de même signe : $S_m < \frac{\Delta V}{\Delta z} < S_M$.

D'autre part, puisque le contour de la base supérieure $S(z)$ appartient à $\Delta\Sigma$ on a :

$$S_m \leqslant S(z) \leqslant S_M \text{ ce qui entraîne : } 0 \leqslant \left|\frac{\Delta V}{\Delta z} - S(z)\right| < S_M - S_m.$$

Or $S_M - S_m$ est l'aire de la projection de la surface latérale $\Delta\Sigma$. Lorsque Δz tend vers zéro, il en est de même de cette surface et par suite de $S_M - S_m$. Par conséquent $\frac{\Delta V}{\Delta z} - S(z)$ tend vers zéro avec Δz et $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ admet pour limite $S(z)$, d'où : $\frac{dV}{dz} = S(z)$.

Le volume $V(z)$ compris entre la surface Σ et les plans horizontaux de cotes a et z admet pour dérivée l'aire $S(z)$ de sa section plane de cote z.

Si $F(z)$ désigne une primitive de la fonction $S(z)$ on obtient comme au n° 425 :

$$V(z) = \int_a^z S(z)\,dz = F(z) - F(a) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{V_a^b = F(b) - F(a)}. \qquad (4)$$

432. Cas d'un volume de révolution. — Si Σ est une surface de révolution la section plane de cote z est un cercle de rayon $r = f(z)$ et $S(z) = \pi f^2(z)$.

En désignant par $F(z)$ une primitive de $\pi f^2(z)$ on obtient (fig. 132) :

$$V(z) = \int_a^z \pi\, f^2(z)\,dz = F(z) - F(a) \quad \text{et} \quad V_a^b = F(b) - F(a)$$

La méthode s'applique au cas d'un volume de révolution autour de Ox ou Oy.

Exemple I. — *Calculer le volume engendré par la révolution autour de Ox de la surface définie dans le repère xOy par : $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $0 \leqslant y \leqslant \sin x$ (fig. 133).*

On a : $\frac{dV}{dx} = \pi y^2 = \pi \sin^2 x$ et : $V_0^\pi = \int_0^\pi \pi \sin^2 x\,dx$ soit :

$$V_0^\pi = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi = \pi\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}\pi^2.$$

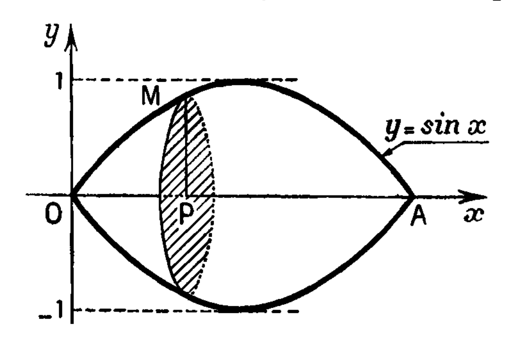


Fig. 133.

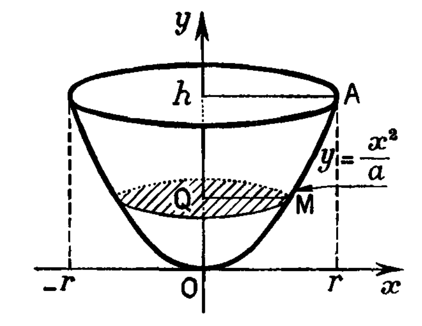


Fig. 134.

Exemple II. — *Calculer le volume engendré par la révolution autour de l'axe Oy de la surface définie dans le repère orthonormé xOy par : $x \geqslant 0$ et $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant h$ (fig. 134).*

On a : $\frac{dV}{dy} = \pi x^2 = a\pi y$ et : $V_0^h = \pi \int_0^h ay\,dy$ soit : $V_0^h = a\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi a h^2}{2}$.

En posant : $h = \frac{r^2}{a}$, on obtient : $V_0^h = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

Ce volume est égal à la moitié du cylindre de révolution de rayon de base r et de hauteur h.

433. Volume de la pyramide. — Soit OABCD une pyramide de sommet O, dont la base ABCD, d'aire B est située dans le plan horizontal de cote h (fig. 135). La section de la pyramide par le plan horizontal de cote z, se déduit de la base dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{z}{h}$. C'est donc un polygone semblable à la base et le rapport entre l'aire S (z) de cette section et l'aire B de la base est égale au carré du rapport de similitude. Donc :

$$\frac{S(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2 = \frac{z^2}{h^2} \iff S(z) = \frac{B}{h^2} z^2.$$

Cette fonction $S(z)$ admettant pour primitive : $F(z) = \frac{B}{h^2} \frac{z^3}{3} = \frac{B z^3}{3 h^2}$, on obtient le volume V de la pyramide OABCD (n° 431, formule 4) :

$$V = \left[\frac{Bz^3}{3 h^2}\right]_0^h = \frac{Bh^3}{3h^2} - 0 = \frac{Bh}{3} \implies \boxed{V = \frac{1}{3} Bh}.$$

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Ce théorème, valable quel que soit le nombre des côtés de la base, s'applique en particulier à la pyramide triangulaire c'est-à-dire à un tétraèdre. On en déduit que :

1° *Deux pyramides qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalentes.*

2° *Si on déplace le sommet d'une pyramide dans un plan parallèle au plan de base son volume reste constant.*

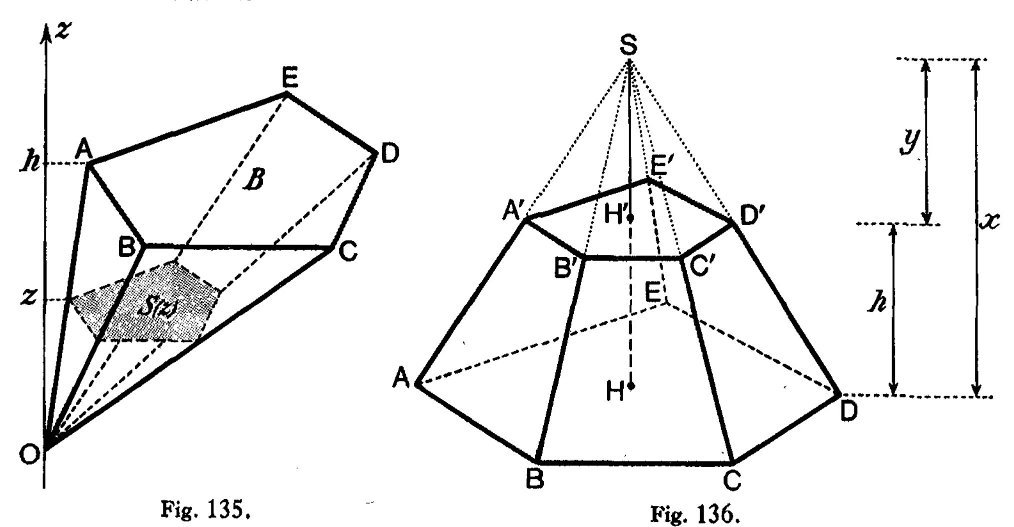


Fig. 135. Fig. 136.

434. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. — Le volume du tronc de pyramide ABCDA'B'C'D' à bases parallèles (fig. 136) de bases B et B' et de hauteur h est la différence des volumes des deux pyramides SABCD et SA'B'C'D' de hauteurs respectives x et y.

$$V = \frac{1}{3} Bx - \frac{1}{3} B'y. \qquad (1)$$

Démontrons que :

Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles est égal au tiers du produit de la hauteur du tronc par la somme des aires des deux bases et de leur moyenne géométrique.

Le problème consiste à exprimer x et y dans la formule (1) en fonction des données B, B' et h. Or on sait que : $x - y = h$ et $\frac{B}{B'} = \frac{x^2}{y^2}$ soit :

$$\frac{x}{\sqrt{B}} = \frac{y}{\sqrt{B'}} = \frac{x-y}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}} = \frac{h}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}$$

D'où : $$x = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}} \quad \text{et} \quad y = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}.$$

En portant ces valeurs dans la relation (1) on obtient :

$$V = \frac{Bh\sqrt{B}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{B'})} - \frac{B'h\sqrt{B'}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{B'})} = \frac{h}{3}\,\frac{(\sqrt{B})^3-(\sqrt{B'})^3}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}$$

et en utilisant l'identité : $$\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$$

$$V = \frac{h}{3}[(\sqrt{B})^2 + \sqrt{B}\sqrt{B'} + (\sqrt{B'})^2] \iff \boxed{V = \frac{h}{3}[B + \sqrt{BB'} + B']}.$$

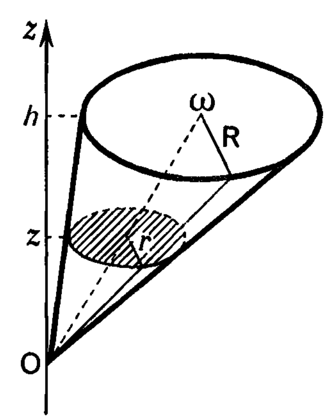


Fig. 137.

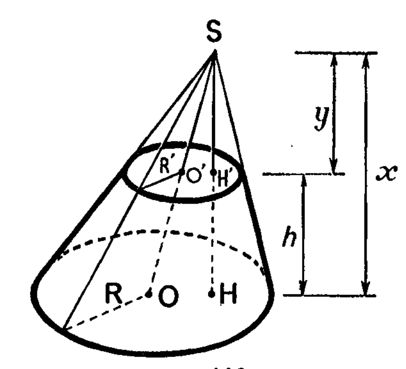


Fig. 138.

435. Volume du cône à base circulaire. — Soit Γ un cône de sommet O dont la base est un cercle de rayon R situé dans le plan horizontal de cote h (fig. 137). L'aire de la base est $B = \pi R^2$. Le même calcul qu'au n° 433, montre que l'aire de la section plane de cote z s'écrit :

$$S(z) = \frac{B}{h^2}z^2 = \frac{\pi R^2}{h^2}z^2.$$

Cette fonction $S(z)$ admettant pour primitive $F(z) = \frac{\pi R^2 z^3}{3h^2}$, on obtient le volume V du cône Γ (n° 431, formule 4) :

$$V = \left[\frac{\pi R^2 z^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{\pi R^2 h^3}{3h^2} \implies \boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}.$$

On arrive au même résultat que pour la pyramide :

Le volume d'un cône à base circulaire est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Ce résultat s'applique en particulier au cône de révolution.

436. Volume du tronc de cône à bases parallèles circulaires. — Considérons (fig. 138) le tronc de cône à bases parallèles circulaires Σ obtenu en coupant un cône de sommet S par un plan parallèle au plan de base. Désignons par R et R′ les rayons des cercles de base (C) et (C′), par h la hauteur du tronc de cône. Le volume V de ce tronc est la différence des volumes des deux cônes de sommet S, de bases respectives (C) et (C′) et de hauteurs respectives $SH = x$ et $SH' = y$. Donc :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi R'^2 y = \frac{1}{3}\pi\,[R^2 x - R'^2 y]. \qquad (1)$$

Or puisque les cercles (C) et (C′) se correspondent dans l'homothétie $\left(S, \frac{y}{x}\right)$ on peut écrire :

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{R'} = \frac{x - y}{R - R'} = \frac{h}{R - R'} \implies x = \frac{Rh}{R - R'} \quad \text{et} \quad y = \frac{R'h}{R - R'}.$$

En portant ses valeurs dans la relation (1) on obtient :

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{R^3 h}{R - R'} - \frac{R'^3 h}{R - R'}\right] = \frac{1}{3}\pi h\,\frac{R^3 - R'^3}{R - R'} \implies \boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\,[R^2 + RR' + R'^2]}$$

Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles circulaires est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune celle du tronc et pour rayons de bases respectifs celui de la grande base, celui de la petite base et leur moyenne géométrique.

En effet on peut écrire : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi R'^2 h + \frac{1}{3}\pi\rho^2 h$ avec $\rho = \sqrt{RR'}$.

Cette formule s'applique au tronc de cône de révolution.

437. Volume du segment sphérique. — Soit Σ une sphère de centre O et de rayon R (fig. 139). La section par un plan horizontal de cote z est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ et d'aire $S(z) = \pi r^2 = \pi (R^2 - z^2)$.

Cette fonction $S(z)$ admettant pour primitive $F(z) = \pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)$, on en déduit (nº 431) que le volume V_S du segment sphérique compris entre les plans horizontaux de cotes z_1 et z_2 (fig. 140) est égal à :

$$V_S = [F(z)]_{z_1}^{z_2} = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{z_1}^{z_2} = \pi R^2 (z_2 - z_1) - \frac{\pi}{3}(z_2^3 - z_1^3)$$

soit :

$$V_S = \frac{\pi}{6}(z_2 - z_1)\,[6R^2 - 3(z_1^2 + z_2^2) + (z_2 - z_1)^2].$$

Si on connaît la hauteur $h = z_2 - z_1$ et les rayons de base $r_1 = \sqrt{R^2 - z_1^2}$ et $r_2 = \sqrt{R^2 - z_2^2}$ du segment sphérique :

$$V_S = \frac{\pi}{6} h\,[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2] \implies \boxed{V_S = \frac{1}{2}(\pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h) + \frac{1}{6}\pi h^3}.$$

438. Volume de la sphère. — La sphère Σ de centre O et de rayon R (fig. 139) est le segment sphérique compris entre les plans $z_1 = -R$ et $z_2 = R$. D'après le calcul du paragraphe précédent son volume V est égal à :

$$V = [F(z)]_{-R}^{+R} = 2[F(z)]_0^R = 2\pi\left[Rz - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right].$$

soit :

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Cette formule s'écrit $V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3}$. Or $4\pi R^2$ est l'aire de la sphère :

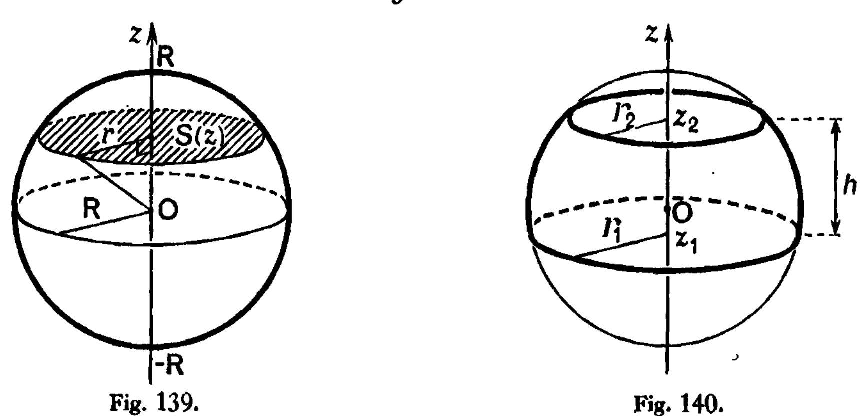


Fig. 139. Fig. 140.

Le volume de la sphère est égal au produit de son aire par le tiers de son rayon.

Si on désigne par $d = 2R$ le diamètre de la sphère on obtient :

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \implies \boxed{V = \frac{1}{6}\pi d^3}.$$

On peut ainsi interpréter la formule du segment sphérique établie ci-dessus : *Le volume du segment sphérique est égal à la demi-somme des volumes des deux cylindres ayant même hauteur que le segment et pour bases respectives les bases du segment augmentée du volume de la sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment.*

439. Formule des trois niveaux. — Donnons une formule classique du volume compris entre deux bases parallèles horizontales et une surface latérale Σ (fig. 141) lorsque l'aire $S(z)$ de la section horizontale de cote z est un polynôme du troisième degré au plus : $S(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ admettant pour primitive :

$$F(z) = \frac{A}{4}z^4 + \frac{B}{3}z^3 + \frac{C}{2}z^2 + Dz.$$

Le volume compris entre les plans $z_1 = -a$ et $z_2 = +a$ est donc (n° 431) :

$$V = [F(z)]_{-a}^{a} = \left[\frac{A}{4}a^4 + \frac{B}{3}a^3 + \frac{C}{2}a^2 + Da\right] - \left[\frac{A}{4}a^4 - \frac{B}{3}a^3 + \frac{C}{2}a^2 - Da\right]$$

Soit : $$V = \frac{2}{3}Ba^3 + 2Da = \frac{a}{3}(2Ba^2 + 6D).$$

Désignons par B_1, B_2 et B_m les aires de la base inférieure, de la base supérieure et de la base moyenne de cotes respectives $-a$, $+a$, 0 et par $h = 2a$, la hauteur totale du volume V. On obtient :

$$B_1 = -Aa^3 + Ba^2 - Ca + D, \quad B_2 = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D \quad \text{et} \quad B_m = D.$$

D'où : $\quad B_1 + B_2 + 4B_m = 2Ba^2 + 6D$ et puisque $\frac{a}{3} = \frac{h}{6}$:

$$V = \frac{a}{3}(2Ba^2 + 6D) \implies \boxed{V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B_m)}.$$

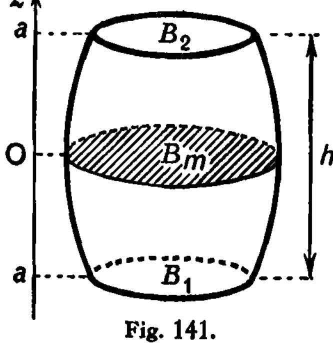


Fig. 141.

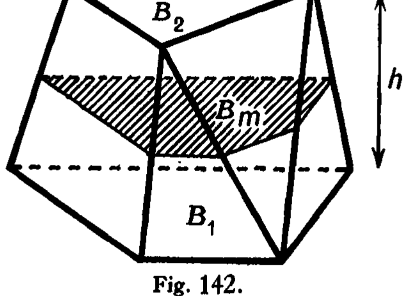


Fig. 142.

— On pourra vérifier que cette formule s'applique au tronc de pyramide, au tronc de cône à bases circulaires, au segment sphérique ou à la sphère. Elle s'applique à la plupart des solides usuels tels que le prismatoïde, solide compris entre deux bases parallèles et des faces latérales triangulaires ou trapézoïdales (fig. 142), et donne une excellente approximation du volume d'un tonneau.

EXERCICES

870. 1° Une pyramide a pour base un rectangle ABCD, de centre O ($AB = 2a$; $AD = a\sqrt{3}$, a étant une longueur donnée). Son sommet S est sur la perpendiculaire en O au plan de base, à la distance $OS = a\sqrt{3}$. On désigne par E et F les milieux respectifs de AD et BC.

a) Calculer le volume de la pyramide.

b) Quelle est la nature du triangle SEF ?

2° Un point P du segment SF est défini par la longueur $SP = x$. Le plan ADP coupe tespectivement les arêtes SB et SC en M et N.

a) Montrer que la pyramide SAMND admet un plan de symétrie. Quelle est la nature de la base AMND ?

b) Calculer la longueur du segment MN.

c) Calculer l'aire du triangle SEP.

d) Calculer le volume V de la pyramide SAMND.

[On remarquera que le résultat du (2°, *c*) permet d'obtenir le produit de deux longueurs intervenant dans le calcul de V.]

3° Étudier, quand P décrit le segment SF, les variations de la fonction $y = \frac{V}{a^2}$. Tracer la courbe représentative pour $a = 2$ cm. Déterminer les tangentes aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 2a$.

871. On considère dans un plan (Π) un rectangle ABCD tel que AB $= 2a$ et AD $= a$ (a étant une longueur donnée). Sur la perpendiculaire en A au plan (Π) on porte AS $= 2a$. En un point M du segment AD, tel que AM $= x$, on construit le plan perpendiculaire à AD. Soit (R) ce plan.

1° Montrer que le plan (R) est parallèle au plan d'une des faces de la pyramide (S.ABCD).

2° Le plan (R) coupe BC en N, SC en P et SD en Q. Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ? Calculer en fonction de a et de x les côtés de ce quadrilatère.

3° Calculer, toujours en fonction de a et de x, l'aire y du quadrilatère MNPQ. Étudier et représenter graphiquement la variation de y quand le point M décrit le segment AD.

4° Calculer en degrés la valeur du dièdre (S. BC. A), d'arête BC.

5° Le plan (R) partage la pyramide en deux solides. Montrer que celui de ces deux solides qui ne contient pas le point S peut se décomposer en un prisme droit et une pyramide. En déduire le calcul de son volume en fonction de a et de x, puis le volume de l'autre solide.

872. On considère le volume V compris entre deux sphères concentriques de rayons x et $x + 1$.

1° Calculer V en fonction de x; soit $V(x)$ cette fonction.

2° Déterminer le rayon x de façon que $V(x)$ soit égal à un volume donné $\frac{4}{3}\pi k$ où k désigne une constante positive. Discuter suivant la valeur de k.

3° Construire la courbe représentée par $y = V(x)$; en déduire une solution et une discussion graphique de la 2e question.

873. Calculer la hauteur et les bases d'un trapèze rectangle connaissant : la longueur l du côté oblique, l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution du trapèze autour du côté oblique. Discuter. Maximum et minimum de b^3. Cas particuliers : $l = a$ et $l = 3a$.

874. Trouver sur un cercle donné un point M ayant la propriété suivante : si l'on abaisse de M la perpendiculaire MP sur le diamètre AB et si l'on trace MA et MO, le volume de l'anneau sphérique engendré par le petit segment de cercle limité par AM est égal à celui qu'engendre le triangle MPO quand la figure tourne autour du diamètre.

875. Soit une sphère (Σ) fixe, de centre O, de rayon R et dont AB est un diamètre fixe. On considère un point P variable sur le segment AB, dont la position est définie par AP $= 2x$ et l'on désigne par (S) et (S') les deux sphères variables de diamètres respectifs AP et PB, par C et C' leurs centres respectifs.

1° Calculer, en fonction de R et de x, le volume V_1, somme des volumes des sphères (S) et (S'), et le volume V_2 du solide compris entre la sphère (Σ) et les sphères (S) et (S'). [On trouvera $V_1 = \frac{4\pi R}{3}(R^2 - 3Rx + 3x^2)$]. Déterminer, si c'est possible, x pour que $V_1 = V_2$. Nombre de solutions.

2° Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $V_1 = \frac{1}{3}V_2$? Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $V_1 > \frac{1}{3}V_2$?

876. On considère un rectangle OACB, de dimensions OA $= a$, OB $= b$. On désigne par I le milieu de OB et par M un point variable du segment OA et l'on pose OM $= x$. On fait tourner la figure successivement autour de CA, CB, OB et l'on désigne par V_1, V_2, V_3, respectivement, les volumes engendrés par le triangle MCI dans chacune de ces rotations.

1° En la comparant à l'aire du trapèze OACI, évaluer, en fonction de a, b, x, la surface S du triangle MCI. Utiliser l'expression ainsi obtenue pour calculer, en fonction de a, b, x, chacun des volumes V_1, V_2, V_3. Montrer qu'il existe entre V_1, V_2, V_3 une relation indépendante de x.

2° On suppose maintenant que $a = b = 1$. Représenter sur un même graphique les courbes représentatives des variations des fonctions $y = \frac{6V}{\pi}$, où V est remplacé successivement par V_1, V_2, V_3 et où l'on suppose que x peut prendre toutes les valeurs.

3° Délimiter sur ces lignes les parties qui correspondent aux points M du segment OA. Déter-

miner les points communs aux trois lignes et construire leurs tangentes en ces points, après en avoir calculé les coefficients directeurs.

877. Sur un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ on prend un point M quelconque. On désigne par O le milieu de AB, par C le milieu de OA, par Q la projection de M sur AB et par P la projection de M sur la tangente en B au demi-cercle. On déterminera la position de M par la donnée de $AQ = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2R)$.

1° Évaluer, en fonction de R et de x, la somme $y = MC^2 + MP^2$. Étudier et représenter les variations de la fonction y de la variable x lorsque M décrit le demi-cercle AB.

2° En déduire, suivant les valeurs de la longueur l, le nombre des points M du demi-cercle tels que $MC^2 + MP^2 = l^2$.

3° On désigne par V_1, V_2, V_3 les volumes engendrés respectivement par le triangle AMQ, par le rectangle BPMQ et par le triangle CMQ en tournant autour de AB. Donner les expressions de ces trois volumes en fonction de R et de x.

Calculer le rapport $z = \dfrac{V_1 + V_2}{V_3}$ et étudier les variations de cette fonction de x lorsque M décrit le demi-cercle donné.

4° On prend OA pour unité de longueur. Construire la courbe représentative de la fonction z. Préciser la pente de la tangente à cette courbe en son point d'abscisse zéro. Construire cette tangente avec soin.

— Calculer le volume engendré dans une révolution autour de Ox par la surface limitée par la courbe C, qui dans le repère orthonormé xOy a pour équation :

878. $2x^2 + y^2 - 2x = 0$

879. $y^2 = -3x^2 - 3x + 18$

880. $y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x}{2} - 1$

881. $3y^2 = (x - 4)(3 - x)$.

882. Dans le repère orthonormé xOy on considère l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Calculer le volume engendré par la révolution de la surface limitée par cette ellipse :

1° Autour de l'axe Ox.

2° Autour de l'axe Oy.

883. 1° Étudier la fonction $y = 2\cos x + 3\sin x - 1$ et construire son graphe C dans le repère orthornomé xOy.

2° Calculer le volume engendré dans une révolution autour de Ox par la surface limitée par la courbe C, l'axe $x'x$ et les droites d'équations $x = -\pi$ et $x = \pi$.

884. Dans le repère orthonormé O (xyz) on considère le volume V limité par la surface Σ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

1° Calculer l'aire $S(z)$ de la section de ce volume par un plan de cote donnée z.

2° En déduire le volume V.

3° Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la formule des trois niveaux.

SUITES DE NOMBRES RÉELS

440. Suites infinies. — ***On appelle suite infinie l'ensemble des éléments associés aux différents entiers naturels dans toute application de l'ensemble*** N ***dans un ensemble donné*** E c'est-à-dire dans toute fonction définie sur N et à valeurs dans E.

On désigne par u_n le *terme général* de E associé à l'entier naturel n :

$$\forall n \in \mathrm{N}, \exists u_n \in \mathrm{E} \quad \text{tel que} \quad n \mapsto u_n.$$

La suite $\{ u_n \}$ s'écrit : $u_0, u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots$

On fait souvent commencer la suite à u_1 de façon que l'indice de u_n soit égal à son rang ou parfois à u_p lorsque les premiers termes ne sont pas définis.

1° ***Une suite*** $\{ u_n \}$ ***peut être définie par la donnée de*** $u_n = f(n)$.

Il en est ainsi de $u_n = n!$, $u_n = \sqrt{2n^2 + 1}$, $u_n = \frac{1}{n}$ (suite harmonique)

$$u_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \text{ (commençant à } u_3\text{)}, \qquad u_n = \sin(2n-1)\frac{\pi}{4} \quad \text{etc.}$$

2° ***Une suite*** $\{ u_n \}$ ***peut être définie par une relation de récurrence telle que*** $u_n = f(u_{n-1})$; $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2})$ ***ou une relation mixte*** $u_n = \varphi(n, u_{n-1}, u_{n-2})$.

Il en est ainsi de la suite telle que $u_0 = 3$; $u_n = u_{n-1} + 5$, de la suite : $u_0 = 2$ et $u_n = 3\,u_{n-1}$, de la suite : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2})$; de la suite homographique $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2\,u_n - 5}{u_n - 4}$.

441. Suites de nombres réels. — Si la suite u_n a tous ses termes réels, elle peut être à *termes positifs* ou *à termes négatifs*. Elle est dite *alternée* si u_n est alternativement positif et négatif :

$$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots \text{ est la suite harmonique alternée.}$$

Une suite des nombres réels $\{ u_n \}$ ***est dite strictement croissante, si quel que soit*** n, ***on a :*** $u_n < u_{n+1}$, ***strictement décroissante si*** $u_n > u_{n+1}$.

Cette suite sera dite non décroissante (ou croissante au sens large) si on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$

et *non croissante (ou décroissante au sens large) si :* $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Il en est ainsi des deux suites $\{ a_n \}$ et $\{ b_n \}$ des valeurs décimales approchées par défaut et par excès à $\frac{1}{10^n}$ près, d'un nombre irrationnel α (n° 125).

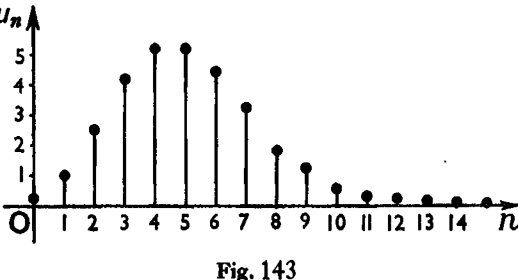


Fig. 143

Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones. Notons que la monotonie d'une suite peut ne se manifester qu'à partir d'une certaine valeur p de n. On la rend monotone en supprimant les $(p - 1)$ premiers termes.

Le graphe d'une suite se compose d'une succession de points et permet de se rendre compte de la croissance de cette suite (fig. 143) : $u_n = \frac{5^{n-1}}{n!}$.

442. Limites d'une suite infinie. — Le terme général u_n d'une suite est une fonction de l'entier naturel n, qui peut donc admettre une limite lorsque n tend vers $+ \infty$.

Les définitions des n°s 299 (2°) et 300 (2°) donnent :

1° ***On dit que la suite*** $\{u_n\}$ ***admet la limite finie*** L ***lorsque*** $n \longrightarrow + \infty$ ***si, à tout nombre positif arbitrairement petit*** ε***, on peut associer un entier naturel*** p ***tel que*** $n > p$ ***entraîne :*** $|u_n - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

Donc $u_n \longrightarrow \mathrm{L}$ pour $n \longrightarrow \infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{L}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists p \in \mathrm{N} \ \text{ tel que } \ n > p \Longrightarrow |u_n - \mathrm{L}| < \varepsilon.$$

Exemple. — La suite de terme général $u_n = \frac{2n + 3}{n + 1}$ admet pour limite $+ 2$ car $u_n - 2 = \frac{1}{n + 1}$. Pour obtenir $|u_n - 2| < \varepsilon$ il suffit de prendre $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ soit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc p est la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Notons que :

Tout nombre irrationnel peut être considéré comme la limite d'une suite de nombres rationnels.

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ désignent les valeurs décimales à $1/10^n$ près par défaut et par excès du nombre irrationnel α, on a en effet : $\lim a_n = \lim b_n = \alpha$.

2° ***On dit que la suite de signe connu*** u_n ***admet une limite infinie lorsque*** $n \longrightarrow + \infty$ ***si à tout nombre positif*** A ***arbitrairement grand, on peut associer un entier naturel*** p ***tel que*** $n > p$ ***entraîne :*** $|u_n| > \mathrm{A}$.

Par exemple : $u_n \longrightarrow + \infty$ lorsque $n \longrightarrow + \infty$ si :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{R}^+, \exists p \in \mathrm{N} \ \text{ tel que } \ n > p \Longrightarrow u_n > \mathrm{A}.$$

Exemple. — Ainsi le terme général de la suite $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2n}$ tend vers $+ \infty$ lors-

que $n \to +\infty$, car pour obtenir $u_n > A$, il suffit de prendre $\frac{n}{2} > A$, soit $n > 2A$. Donc p est la partie entière de $2A$.

Notons qu'une suite peut n'avoir *aucune limite*, comme c'est le cas de $u_n = \text{tg}^2 n\theta$ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Une telle suite peut alors parfois être *périodique* comme $u_n = \sin\frac{\pi n}{6}$ qui vérifie la relation $u_{n+12} = u_n$ et admet pour période 12.

Une suite $\{u_n\}$ ***est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie*** L, ***divergente dans tous les autres cas.***

La convergence de la suite $u_n = f(n)$ s'établit aisément si $f(x)$ est définie sur R^+ car :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = L.$$

(La réciproque n'est pas toujours vraie. Ainsi $u_n = \cos\left(2\pi n + \frac{1}{n}\right)$ admet pour limite $+1$ tandis que la fonction $f(x) = \cos\left(2\pi x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$).

La limite L d'une suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ ne peut être qu'une racine réelle de l'équation : $x = f(x)$. La convergence de u_n résulte de la convergence de $v_n = u_n - L$, que l'on étudiera.

443. Étude de la suite a^n.

1° ***Lorsque*** a ***est supérieur à*** 1, ***la suite*** a^n ***admet pour limite*** $+\infty$.

L'identité : $a^n - 1 = (a-1)[a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1]$ montre, puisque les n termes intérieurs au crochet sont au moins égaux à 1, que $a^n - 1 > n(a-1)$, c'est-à-dire que $a^n > n(a-1)$. Pour obtenir $a^n > A$, il suffit de prendre $n > \frac{A}{a-1}$.

2° ***Lorsque*** $|a|$ ***est inférieur à 1, la suite*** a^n ***admet pour limite*** 0.

Posons $|a| = \frac{1}{b}$ avec $b > 1$. On obtient $|a^n| = |a|^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$.

Comme $b^n \to +\infty$, son inverse $|a^n| \to 0$ et $a^n \to 0$, par valeurs positives si a est positif, par valeurs alternativement positives et négatives, si a est négatif.

3° ***Lorsque*** a ***est inférieur ou égal à*** -1, ***la suite*** a^n ***n'a pas de limite.***

Nous avons affaire à une suite alternée (n° 441) et $|a^n|$, égal à $+1$ pour $a = -1$, tend vers $+\infty$ pour $a < -1$. Donc a^n n'a pas de limite (Remarque n° 301).

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

444. Définitions. — Considérons la suite des nombres suivants :

5; 8; 11; 14; 17; 20.

Chacun d'eux est la somme du précédent et du nombre 3. Nous dirons que cette suite est une *progression arithmétique* dont le premier terme est 5; dont le second terme est 8...; dont la raison est 3. Ainsi :

On appelle progression arithmétique une suite de nombres tels que chacun d'eux soit la somme du précédent et d'un nombre constant appelé raison de la progression.

La progression est *croissante* si la raison est positive, elle est *décroissante* si la raison est négative. Chaque nombre de la suite est un *terme* de la progression.

EXEMPLES. — La progression 5; 8; 11; 14 est croissante de raison $+ 3$.
La progression 7; 5; 3; 1 est décroissante de raison $- 2$.

La raison est désignée par r, le terme de rang n par u_n. La définition se traduit par :

$$\boxed{u_n = u_{n-1} + r}.$$

445. Remarques. — 1° Une progression arithmétique est déterminée lorsqu'on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes. La progression arithmétique de 7 termes dont le 1er terme est $- 9$ et la raison 4 s'écrit :

$$-9; \quad -5; \quad -1; \quad 3; \quad 7; \quad 11; \quad 15.$$

2° Lorsqu'une suite de nombres forme une progression arithmétique de raison r, on obtient une progression arithmétique de raison $- r$ en l'écrivant dans l'ordre inverse :

La suite 15; 11; 7; 3; $- 1$; $- 5$; $- 9$ est une progression arithmétique de raison $- 4$.

3° On peut prolonger une progression vers la droite et aussi vers la gauche.

Le nombre des termes d'une progression arithmétique peut devenir infiniment grand; on obtient alors une *progression arithmétique illimitée.*

4° Si la raison est nulle, tous les termes sont égaux.

446. Calcul d'un terme de rang donné. — Considérons la progression arithmétique : $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ de n termes et de raison r. Par définition :

$$u_2 = u_1 + r; \quad u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r; \quad u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r, \text{ etc.,}$$

Chaque terme est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il existe de termes précédant le terme à calculer.

$$\boxed{u_n = u_1 + (n - 1) r}. \qquad (1)$$

EXEMPLES. — 1° Le 1 000e terme de la progression arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ dont le 1er terme est 1 vaut : $1 + 999 \times \frac{2}{3} = 667$.

2° La suite des nombres entiers est une progression arithmétique dont le 1er terme est 1 et la raison 1. Le nième nombre entier est $1 + n - 1 = n$.

3° La suite des nombres impairs est une progression arithmétique de raison 2, dont le 1er terme est 1. Le nième nombre impair est : $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

REMARQUE. — La relation (1) montre que dans une progression arithmétique illimitée, lorsque n tend vers l'infini, u_n tend donc vers $\pm \infty$ selon que r est positif ou négatif.

447. Insertion de moyens arithmétiques. — La relation (1) montre que l'on peut calculer l'une des quantités u_1, u_n, r, n lorsqu'on connaît les 3 autres. En particulier, insérer m moyens arithmétiques entre deux nombres donnés a et b, c'est former une progression arithmétique dont le 1er terme soit a, dont le dernier soit b et telle qu'il existe m termes entre a et b. Le nombre total des termes est $m + 2$ et l'inconnue est la raison r :

$$r = \frac{u_n - u_1}{n-1},\ n = m+2 \ \text{ et } \ u_1 = a,\ u_n = b \implies r = \frac{b-a}{m+1}.$$

EXEMPLE. — *Insérer* 100 *moyens arithmétiques entre* 1 *et* 2.

$$r = \frac{2-1}{101} = \frac{1}{101} \text{ et la progression est : } 1;\ 1 + \frac{1}{101};\ 1 + \frac{2}{101};\cdots 1 + \frac{100}{101};\ 2.$$

448. Théorème. — ***Dans une progression arithmétique, la somme de deux termes équidistants des termes extrêmes est égale à la somme des extrêmes.***

Considérons la progression de n termes $u_1, u_2, ..., u_n$. Les termes extrêmes sont u_1 et u_n.
Il existe dans la suite p termes *avant* u_{p+1} et p termes *après* u_{n-p}. Donc u_{p+1} et u_{n-p} sont deux termes de la progression ***équidistants des extrêmes***. D'après le n° 446 :

$$\left.\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 + pr \\ u_{n-p} &= u_n - pr \end{aligned}\right\} \implies u_{p+1} + u_{n-p} = u_1 + u_n.$$

449. Corollaire. — Soient 3 termes successifs a, b, c d'une progression arithmétique :

$$a = b - r \ \text{ et } \ c = b + r \implies b = \frac{a+c}{2}.$$

Réciproquement, si $b = \frac{a+c}{2}$ on en déduit : $a + c = 2b$ et $c - b = b - a$, ce qui montre que la suite a, b, c est une progression arithmétique. Donc :

Pour que trois nombres soient en progression arithmétique, il faut et il suffit que le second soit la moyenne arithmétique des deux autres.

450. Somme des termes d'une progression arithmétique. — Soit la progression :

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ u_{n-2},\ u_{n-1},\ u_n$$

et

$$u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2},\ \ldots\ldots\ldots,\ u_3,\ u_2,\ u_1$$

la progression obtenue en l'écrivant dans l'ordre inverse. La somme S des termes de chaque progression est :

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u$$
$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_3 + u_2 + u_1.$$
$$2S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

D'où (n° 448) : $2S = n(u_1 + u_n) \iff \boxed{S = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$. (2)

La somme des termes d'une progresson arithmétique est égale au demi-produit de la somme des termes extrêmes par le nombre des termes.

451. Exemples.

1° **Somme des n premiers nombres entiers.** — Ils forment une progression arithmétique de n termes; le premier est 1, le dernier est n.

Donc : $\boxed{S(n) = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

2° Somme des n premiers nombres impairs.

Le 1[er] terme est 1; le n[ième] est $2n - 1$. Donc :

$$S'(n) = 1 + 3 + 5 \cdots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1)\,n}{2} = n^2.$$

3° Somme des carrés des n premiers nombres entiers. — Soit à calculer :

$$\Sigma(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2.$$

Utilisons l'identité $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Nous y remplaçons x successivement par 0, 1, 2 ... n. Nous obtenons $n + 1$ égalités que nous ajoutons membre à membre; après réduction des termes semblables, on obtient :

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3 &= 1^3 + (3 \times 1^2) + (3 \times 1) + 1\\
3^3 &= 2^3 + (3 \times 1^2) + (3 \times 2) + 1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n^3 &= (n - 1)^3 + 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1\\
(n + 1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\
\hline
(n + 1)^3 &= 3(1^2 + 2^2 \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + (n + 1)
\end{aligned}$$

ou n° 451 :

$$(n + 1)^3 = 3\Sigma + \frac{3n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

d'où :

$$3\Sigma = (n + 1)\left[(n + 1)^2 - 3\frac{n}{2} - 1\right] = \frac{(n + 1)(2n^2 + n)}{2}$$

et :

$$\boxed{\Sigma(n) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}.$$

Cette formule se vérifie aisément par récurrence car :

$$\Sigma(n) - \Sigma(n - 1) = \frac{1}{6}\left[n(n + 1)(2n + 1) - (n - 1)\,n(2n - 1)\right] = n^2.$$

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

452. Définitions. — Considérons la suite des nombres suivants :

2; 6; 18; 54; 162.

Chacun d'eux est le produit du précédent par 3. Nous dirons que cette suite est une *progression géométrique* dont le premier terme est 2, dont le second terme est 6 ..., dont la raison est 3. Ainsi :

On appelle progression géométrique une suite de nombres tels que chacun d'eux soit le produit du précédent par un nombre constant appelé raison de la progression.

La raison peut être positive ou négative. Dans le cas d'une raison positive la progression est *croissante* si la raison est supérieure à 1, *décroissante* si la raison est inférieure à 1. Chaque nombre de la suite est un *terme* de la progression.

Exemples. — La progression 2; 6; 18; 54 est croissante, de raison 3.

La progression 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ est décroissante, de raison $\frac{1}{2}$.

La raison est désignée par q, le terme de rang n par u_n. La définition s'exprime par la relation :

$$\boxed{u_n = q\, u_{n-1}}.$$

453. Remarques. — 1° Une progression géométrique est déterminée lorsqu'on connaît le premier terme, la raison et le nombre des termes : la progression de 5 termes dont le 1[er] terme est 2 et la raison $\frac{1}{3}$ s'écrit :

$$2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \frac{2}{27};\ \frac{2}{81}.$$

2° Lorsqu'une suite de nombres forme une progression géométrique de raison q, on obtient une progression géométrique de raison $\frac{1}{q}$ en l'écrivant dans l'ordre inverse.

La suite $\frac{2}{81}$; $\frac{2}{27}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{3}$; 2 est une progression géométrique de raison 3.

3° On peut prolonger une progression géométrique vers la droite et aussi vers la gauche.

Si le nombre des termes d'une progression géométrique devient infiniment grand, on obtient une progression *géométrique illimitée.*

4° Si la raison est 1, tous les termes de la progression sont égaux.

454. Calcul d'un terme de rang donné. — Considérons la progression géométrique : $u_1, u_2, u_3, u_4 \dots, u_n$ de n termes et de raison q. Par définition : $u_2 = u_1 q$; $u_3 = u_2 q = u_1 q^2$; $u_4 = u_3 q = u_1 q^3 \dots$

Chaque terme est égal au produit du premier par une puissance de la raison dont l'exposant est égal au nombre des termes précédant celui que l'on doit calculer.

On a donc : $$\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}}.$$

Il en résulte que la suite $\{u_n\}$ est convergente et admet pour limite 0 pour $|q| < 1$ (n° 443), u_1 pour $q = 1$ et qu'elle diverge dans tout autre cas.

Exemple. — Le 64[e] terme de la progression géométrique dont le 1[er] terme est 1 et la raison 2 vaut $1 \times 2^{63} = 2^{63}$.

La relation précédente permet de calculer l'une des quantités u_1, u_n, q, n lorsqu'on connaît les 3 autres. Par exemple, si u_1, u_n, q et n sont donnés, on obtient :

$$q^{n-1} = \frac{u_n}{u_1} \quad \text{et} \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}.$$

455. Insertion de moyens géométriques. — Insérer m moyens géométriques entre deux nombres donnés a et b c'est former une progression géométrique dont le 1[er] terme soit a, dont le dernier soit b et telle qu'il existe m termes entre a et b.

Le nombre total des termes est $m + 2$; l'inconnue est la raison. On a : $n = m + 2$ et la relation du n° 454 donne

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Pour $m > 1$, le calcul n'est possible en général qu'à l'aide d'une table de logarithmes.

Exemple. — *Insérer 3 moyens géométriques entre* 1 *et* 625. — On a : $q = \sqrt[4]{625} = 5$.
D'où la progression : 1; 5; 25; 125; 625.

456. Théorème. — ***Dans une progression géométrique, le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des extrêmes.***

Considérons la progression de n termes $u_1, u_2, ..., u_n$. Le raisonnement fait au nº 454 conduit aux égalités :

$$\left.\begin{aligned} u_{p+1} &= u_1 \cdot q^p \\ u_{n-p} &= u_n \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^p \end{aligned}\right\} \implies u_{p+1} \cdot u_{n-p} = u_1 \cdot u_n.$$

457. Corollaire. — Soient trois termes successifs a, b, c d'une progression géométrique :

$$a = b \cdot \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad c = bq \implies ac = b^2.$$

Réciproquement : $b^2 = ac \implies \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$ et a, b, c forment progression géométrique.

Pour que trois nombres soient en progression géométrique, il faut et il suffit que le second soit la moyenne géométrique des deux autres.

458. Somme des termes d'une progression géométrique.

Posons $\mathrm{S} = u_1 + u_2 + u_3 + ... u_{n-1} + u_n.$
$\mathrm{S}q = u_1q + u_2q + u_3q ... + u_{n-1}q + u_nq$

Par définition $u_2 = u_1q;\ u_3 = u_2q; ... ;\ u_n = u_{n-1}q;$ donc :

$$\mathrm{S}q - \mathrm{S} = u_nq - u_1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{S}(q-1) = u_nq - u_1, \quad q \neq 1.$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{u_nq - u_1}{q-1}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{S} = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1}}.$$

Cela résulte aussi de l'identité :

$$u_1(1 + q + q^2 \dots + q^{n-1}) = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right).$$

Notons que si $q = 1$, on obtient : $\mathrm{S}_n = nu_1$.

Pour la progression géométrique : $a, b, c ... h, k, l$ de raison q,

on obtient :

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{lq - a}{q - 1}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{S} = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Exemple. — Somme des termes de la progression géométrique de raison 2, dont le premier terme est 1 et qui compte 64 termes :

$$\mathrm{S} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

459. Théorème. — ***Pour que la somme des termes d'une progression géométrique converge lorsque le nombre des termes tend vers l'infini, il faut et il suffit que la valeur absolue de sa raison soit inférieure à 1.***

Soit $u_1 = a$; on obtient : $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$ (n° 458).

Si $|q| < 1$, on sait que $q^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et la limite de S_n est alors $\frac{a}{1-q}$. Dans tout autre cas, la suite S_n diverge (n° 443).

$$\text{Si } |q| < 1 : \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{1-q}}$$

Ainsi la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ tend vers $S = 2$ lorsque n tend vers l'infini. On dit que 2 est la somme des termes de la progression illimitée envisagée.

EXERCICES

885. On considère la suite définie par son premier terme u_0 et par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b; \quad a, b, u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \neq 1.$$

1° Calculer u_n en fonction de u_0, a et b.

2° Étudier selon les valeurs de a la nature de cette suite et trouver sa limite lorsqu'elle converge.

886. Soit la suite définie par la relation : $u_n = \frac{u_{n-1}}{3 - 2u_{n-1}}$ et par son premier terme réel $u_0 \neq \frac{3}{2}$.

1° Montrer que la valeur limite de cette suite ne peut être que 0 ou 1.

2° Calculer $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ en fonction de v_{n-1} et montrer que $v_n = kv_{n-1}$ où k est une constante réelle.

3° Trouver la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire celle de u_n.

887. On considère la suite $\{u_n\}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

1° Montrer que toute suite de la forme $u_n = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ où A et B sont deux constantes vérifie la formule de récurrence donnée. On admettra la réciproque.

2° Déterminer les constantes A et B sachant que $u_0 = 0$ et $u_1 = -3$. La suite obtenue est-elle convergente et dans ce cas quelle est sa limite?

888. On considère la suite $\{u_n\}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n - 5}{u_n - 1}$ et par son premier terme.

1° Calculer u_{n+2} en fonction de u_n.

2° En déduire que cette suite est périodique. Est-elle convergente?

889. Soit la suite définie par : $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ où a, b, c, d sont des constantes réelles telles que $ad - bc \neq 0$.

1° Calculer u_{n+2} et u_{n+3} en fonction de u_n.

2° Montrer que $ad - bc = (a + d)^2 \Longrightarrow u_{n+3} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3° On pose alors $c = 1$; $a + d = 2\alpha$ et $b = -(3\alpha^2 + \beta^2)$. Calculer a et d en fonction de α et de β.

890. On considère la suite définie par la relation : $u_{n+1} = \dfrac{au_n - (k^2 + a^2)}{u_n - a}$ et par $u_0 \neq a$:

1° On pose $u_n = a + k \operatorname{tg} \theta_n$. Calculer u_{n+1} et u_{n+2}.

2° En déduire que la suite $\{u_n\}$ est périodique et que sa période est 2.

— u_1, u_n; r désignent le 1er terme, le dernier terme et la raison d'une progression arithmétique de n termes. Calculer :

891. u_n connaissant $u_1 = 1$; $r = 7$; $n = 50$.

892. u_n connaissant $u_1 = 3$; $r = -2$; $n = 20$.

893. u_n connaissant $u_1 = 10$; $r = \dfrac{4}{5}$; $n = 1\,000$,

894. u_1 connaissant $u_n = 117$; $r = 5$; $n = 200$.

895. u_1 connaissant $u_n = -250$; $r = -2{,}5$; $n = 10\,000$.

896. n connaissant $u_1 = 1$; $u_n = 1\,796$; $r = 5$.

897. n connaissant $u_1 = -7$; $u_n = 576$; $r = \dfrac{11}{3}$.

— Insérer m moyens arithmétiques entre a et b sachant que :

898. $a = -12$; $b = 18$; $m = 5$.

899. $a = 4{,}5$; $b = 78{,}75$; $m = 100$.

900. $a = 1/3$; $b = 6$; $m = 50$.

901. $a = 1$; $b = 50$; $m = 20$.

902. $a = 17$; $b = 84$; $m = 200$.

903. Dans une progression arithmétique de 151 termes, le premier terme est 17 et la somme des termes est 8 229,5. Calculer le dernier terme et la raison.

904. Dans une progression arithmétique le premier terme est 11, le dernier est 433 et la somme des termes vaut 47 064. Calculer le nombre de termes et la raison.

905. Dans une progression arithmétique de 100 termes et de raison 4 la somme des termes vaut 18 900. Calculer les termes extrêmes.

906. Dans une progression arithmétique le premier terme, la raison et la somme des termes valent respectivement 2; $\dfrac{1}{3}$ et 35. Calculer le nombre de termes et le dernier terme.

907. Trouver 3 nombres en progression arithmétique connaissant leur somme 30 et leur produit 910.

908. Trouver quatre nombres en progression arithmétique connaissant leur somme 35 et la somme de leurs carrés 334.

909. Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que leurs mesures sont en progression arithmétique et que le périmètre vaut $2p$. Discuter.

Application numérique : $p = 30$.

910. Calculer les trois côtés d'un triangle sachant qu'ils sont en progression arithmétique, que le périmètre vaut $2p$ et que l'aire du triangle est m^2. Discuter.

Application numérique : $p = 45$; $m^2 = 150\sqrt{6}$.

911. Montrer que si les nombres $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ et $\frac{1}{a+b}$ sont en progression arithmétique, il en est de même des nombres a^2, b^2 et c^2.

912. 1° Démontrer l'identité : $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

2° Remplacer x successivement par 0; 1; 2... n; ajouter les égalités obtenues et en déduire que la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.

913. Une progression arithmétique commence par 6 et la raison est 7. La somme des termes est 41 094.

Quel est le nombre de termes ?

914. Quatre nombres forment une progression arithmétique. On désigne par S la somme des deux premiers et par P le produit des deux autres.

Calculer les quatre termes de la progression, connaissant S et P. Discussion.

Applications numériques :

1° $S = 60$, $P = 75$;
2° $S = 30$, $P = -15$;
3° $S = 20$, $P = -40$.

915. Trois nombres entiers positifs sont en progression arithmétique de raison $r > 0$.

On appelle a, b, c ces nombres.

1° Calculer b si $a + b + c = 18$.

2° b ayant la valeur trouvée au 1°, on considère la fraction $\frac{c}{a}$. Peut-elle être égale à un nombre entier ? Pour quelles valeurs de r ? Quelles sont alors les valeurs correspondantes de a et c ?

916. Calculer le premier terme u_1 et la raison r d'une progression arithmétique, sachant que la somme des n premiers termes est égale à $4n^2 + 5n$ et cela quel que soit n.

917. Déterminer les nombres impairs de trois chiffres divisibles par 45 dont les chiffres, pris dans leur ordre d'écriture, forment une progression arithmétique.

918. Déterminer les progressions arithmétiques de 5 termes dont la somme est 25 et celle de leurs carrés 165.

919. On considère des progressions arithmétiques ayant un nombre impair de termes. On désigne par $2n - 1$ le nombre des termes, par S_1 la somme des n *premiers* termes, par S_2 la somme des n *derniers*.

1° Calculer le terme équidistant des extrêmes en fonction de S_1, S_2 et n.

2° Déterminer une progression arithmétique de 9 termes si

$$S_1 = 55 \quad \text{et} \quad S_2 = 135.$$

3° Déterminer une progression arithmétique, connaissant le terme équidistant des extrêmes égal à 15, $S_1 = 60$ et $S_2 = 210$.

— Calculer le $n^{\text{ième}}$ terme et la somme des termes d'une progression géométrique de raison q, dont le premier terme est a dans les cas suivants :

920. $a = 1$; $q = 3$; $n = 5$. $\qquad a = 3$; $q = \frac{5}{3}$; $n = 7$.

921. $a = 10$; $q = \frac{1}{2}$; $u = 10$. $\qquad a = 37$; $q = \frac{1}{10}$; $n = 6$.

922. Trois nombres a; b; c sont en progression géométrique. Démontrer :

1° que les nombres a^2; b^2; c^2 sont en progression géométrique.

2° que les nombres a^p; b^p; c^p sont en progression géométrique.

3° que les nombres $\frac{1}{a^p}$; $\frac{1}{b^p}$; $\frac{1}{c^p}$ sont en progression géométrique.

923. Démontrer que si trois nombres a; b; c sont à la fois en progression arithmétique et en progression géométrique on a : $a = b = c$.

924. Les trois nombres x; 28; y sont en progression géométrique. Calculer x et y sachant que leur somme est 119.

925. Calculer trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 19,5 et leur produit 125.

926. Calculer trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 156 et la somme de leurs carrés 13 104.

927. Les nombres x; 15; y sont en progression géométrique et les nombres x; 25; y sont en progression arithmétique. Calculer x et y.

928. 1° Une progression géométrique illimitée décroissante a pour premier terme a et pour raison q. Montrer qu'en élevant ses termes au carré on obtient encore une progression décroissante. Calculer la limite de la somme de ses termes en fonction de a et q.

2° Les sommes des termes des deux progressions précédentes ont pour limites respectives $\frac{15}{4}$ et $\frac{225}{24}$. Calculer a et q.

929. Dans un triangle ABC le périmètre vaut $2p$ et l'aire m^2. On joint les milieux des côtés de ABC, on obtient un triangle A'B'C' dont on joint à nouveau les milieux des côtés et ainsi de suite indéfiniment.

1° Calculer la limite vers laquelle tend la somme des périmètres des triangles ABC, A'B'C'...

2° Calculer la limite vers laquelle tend la somme des aires de ces mêmes triangles.

930. Dans un triangle ABC rectangle en A on donne la hauteur AH $= h$ et le côté AB $= c$.

1° Calculer en fonction de c et h l'hypoténuse BC $= a$ et le côté AC $= b$.

2° Quelle relation doit-il exister entre les données h et c pour que h, b, c, a soient les termes successifs d'une progression géométrique?

3° Se plaçant dans cette hypothèse et en supposant que AH est l'unité de longueur calculer c, b, et a.

931. Soit une progression géométrique dont le premier terme est égal à la raison et qui comprend trois termes. La déterminer, sachant que la somme de ses termes est 84.

932. Déterminer deux nombres positifs, a et b, tels que a, $a + 2b$, $2a + b$ soient en progression arithmétique et $(b + 1)^2$, $ab + 5$, $(a + 1)^2$ soient en progression géométrique.

933. Trouver trois nombres relatifs, a, b, c, dont la somme soit 3, tels que, dans l'ordre a, b, c, ils soient en progression arithmétique et que, dans l'ordre a, c, b, ils soient en progression géométrique.

934. On considère la progression géométrique de raison 4 dont le premier terme est $\frac{1}{2}$. A partir de quelle valeur de n la somme des n premiers termes est-elle supérieure à 10 000?

935. Déterminer une progression géométrique de cinq termes positifs,

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5,$$

telle que
$$U_1 . U_5 = 25 \quad \text{et} \quad U_2 + U_3 + U_4 = \frac{35}{2}.$$

936. On a une progression arithmétique de raison r et une progression géométrique de raison $1 + r$, toutes les deux commençant par 1.

1° Déterminer le rapport des termes de même rang n.

2° Déterminer le rapport des sommes des $n - 1$ premiers termes.

3° Calculer la valeur numérique des deux rapports précédents dans le cas où $r = 0{,}025$ et $n = 8$.

937. Soit une progression géométrique, de raison x, dont tous les termes sont positifs. On considère cinq termes consécutifs de cette progression, que l'on désigne par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3 = a, \quad u_4, \quad u_5.$$

1° Exprimer en fonction de a et de x les sommes $S = u_1 + u_5$, $\quad s = u_2 + u_4$

et le carré s^2 de s. Montrer que $\quad s^2 = aS + 2a^2$.

2° Calculer a et x, connaissant $s = 20$ et $S = \frac{164}{3}$.

938. Déterminer trois nombres entiers positifs, a, b et c, sachant que :

1° a, b et c sont en progression géométrique;

2° $2a$, c et $b + 2$ sont en progression arithmétique;

3° $a + 1$, b et $c - 2$ sont en progression arithmétique.

939. Déterminer les progressions géométriques de sept termes (à termes réels) telles que la somme des trois premiers termes est égale à 2 et la somme des trois derniers termes est égale à 1250.

940. Trois angles aigus ont pour mesures en radians les nombres a, b, c en progression arithmétique croissante, tels que

$$a + b + c = \frac{3\pi}{4}.$$

Montrer que leurs tangentes sont en progression géométrique et que la somme des carrés de leurs sinus est indépendante de la raison de la progression arithmétique.

Déterminer ces angles lorsque $\operatorname{tg} a = \sqrt{2} - 1$. (On pourra calculer $\operatorname{tg} 2a$.)

941. Soit une progression géométrique de trois termes, de raison q, dont tous les termes sont positifs. On désigne par x le terme moyen.

1° Exprimer, en fonction de x et de q, la somme, S, des trois termes de la progression et la somme, S', de leurs inverses.

2° Calculer x et q, sachant que $S = 26$ et $S' = \frac{13}{18}$. Quels sont les trois termes de la progression ?

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

460. Logarithme népérien. — Nous savons (nº 416) que pour tout rationnel $m \neq -1$ la fonction x^m admet pour primitive $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Nous ne connaissons pas de primitive de la fonction $\frac{1}{x}$. Or cette fonction étant définie et continue sur $]0, +\infty[$ admet sur cet intervalle une primitive, égale à 0 pour $x = 1$ (nº 415). C'est cette primitive que nous nous proposons d'étudier directement dans ce qui suit.

On appelle fonction logarithme népérien de la variable x, la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$, nulle pour $x = 1$, c'est-à-dire : $y = \int_1^x \frac{dx}{x}$.

On écrit : $\boxed{y = \text{Log}\, x.}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{y' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \text{Log}\, 1 = 0}$.

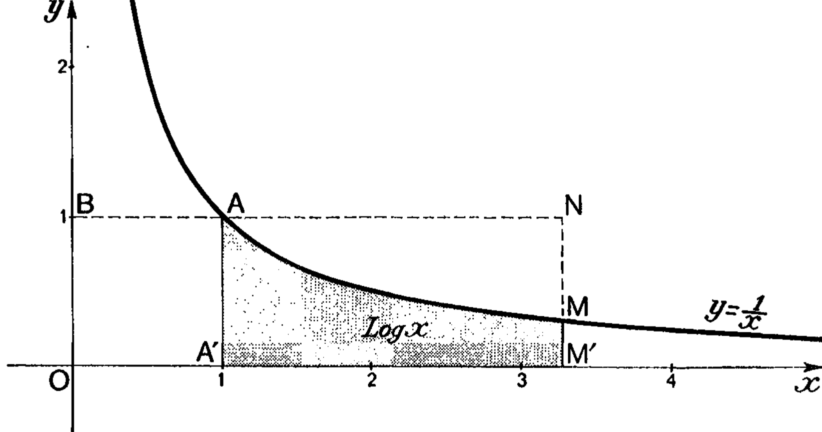


Fig. 144.

On dit que y est le *logarithme népérien* (ou naturel) de x et le symbole Log x (avec un L majuscule) se lit « logarithme népérien de x » ou simplement « log x ».

Si nous plaçons sur l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$ rapportée au repère orthonormé xOy (fig. 144) les points A (1 ; 1) et M $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ on voit que Log x est l'aire algébrique S_1^x associée sur $[1, x]$ à la fonction $y = \frac{1}{x}$. La fonction $y = \frac{1}{x}$ étant définie, continue et positive sur $]0, +\infty[$, la fonction $y =$ Log x est définie, continue et croissante sur cet intervalle :

x	0		1		$+\infty$
$y' = \frac{1}{x}$	$+\infty$	$+$	1	$+$	0
$y =$ Log x		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Tout nombre positif x admet un logarithme népérien, négatif pour $x < 1$, positif pour $x > 1$.
On en déduit, puisque Log x est monotone (n° 325) que :

$$\boxed{a = b} \iff \boxed{\text{Log } a = \text{Log } b}$$

et

$$\boxed{0 < a < b} \iff \boxed{\text{Log } a < \text{Log } b}\cdot$$

Deux nombres réels positifs sont dans le même ordre de grandeur que leurs logarithmes népériens. L'ensemble des valeurs de la fonction Log x constitue *le système des logarithmes népériens.*

461. Formules de dérivation. — Si $u(x)$ est une fonction dérivable de x, on peut sur tout intervalle où $u(x)$ est positif envisager la fonction : $y =$ Log u.

Sa dérivée s'écrit (n° 341) : $y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{u'}{u}$.

Sur tout intervalle où $u(x)$ est négatif, on peut de même envisager la fonction $y =$ Log $(-u)$ dont la dérivée s'écrit : $y' = \frac{1}{(-u)}(-u)' = \frac{u'}{u}$.

Autrement dit, sur tout intervalle où $u(x)$ est dérivable et non nulle :

$$\boxed{y = \text{Log } |u(x)|} \implies \boxed{y' = \frac{u'}{u}} \cdot \implies \boxed{dy = \frac{du}{u}}$$

En particulier $u = ax$ avec $a > 0 \implies u' = a$ et $y =$ Log ax admet pour dérivée $y' = \frac{ax}{a} = \frac{1}{x}$. Donc :

$$\boxed{y = \text{Log } ax} \implies \boxed{y' = \frac{1}{x}} \cdot \implies \boxed{dy = \frac{dx}{x}}$$

462. Propriété fondamentale. — Ainsi, quel que soit $a > 0$, les deux fonctions $y = \text{Log } ax$ et $y = \text{Log } x$ admettent pour tout $x > 0$, la même dérivée $\frac{1}{x}$. Ces deux fonctions diffèrent d'une constante (n° 370) et :

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{Log } ax = \text{Log } x + C. \\ \text{Soit pour } x = 1 & \text{Log } a \;\; = 0 \quad\;\; + C. \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Log } ax = \text{Log } a + \text{Log } x.$$

Et pour $x = b$: $\boxed{\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b}$.

Le logarithme d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des logarithmes de chacun des facteurs.

Cette formule peut se vérifier géométriquement. Sur la courbe $y = \frac{1}{x}$, considérons (fig. 145) les points A, M, N, P d'abscisses 1, a, b, ab et sur la courbe $y = \frac{a}{x}$ les points R et S d'abscisses a et ab, comme M et P et d'ordonnées 1 et $\frac{1}{b}$ comme A et N. Les deux trapèzes mixtilignes MM'P'P et AA'N'N se déduisent tous deux du trapèze mixtiligne RM'P'S par affinité orthogonale de rapport $\frac{1}{a}$ et d'axes respectifs Ox et Oy. Ils sont donc équivalents (n° 399) et :

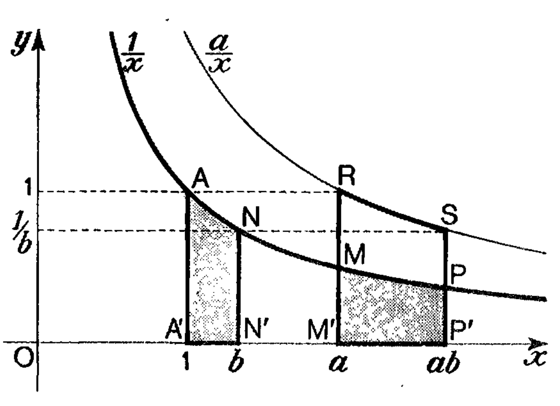


Fig. 145.

$$\text{aire (MM'PP)} = \text{aire (AA'N'N)} \Longleftrightarrow \text{Log } ab - \text{Log } a = \text{Log } b.$$

463. Formules logarithmiques. — Si a, b, c désignent des réels positifs, la formule $\text{Log } ab = \text{Log } a + \text{Log } b$ entraîne les suivantes :

1° $\boxed{\text{Log } abc = \text{Log } a + \text{Log } b + \text{Log } c}$

Car $\text{Log } (ab)\, c = \text{Log } (ab) + \text{Log } c = (\text{Log } a + \text{Log } b) + \text{Log } c.$

Cette formule s'étend par récurrence à un nombre quelconque de facteurs :

$$\text{Log } ab ... k = \Sigma \text{ Log } a.$$

2° $\boxed{\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b}$

$$x = \frac{a}{b} \Longrightarrow bx = a \Longrightarrow \text{Log } b + \text{Log } x = \text{Log } a \Longrightarrow \text{Log } x = \text{Log } a - \text{Log } b.$$

3° $\boxed{\text{Log } \frac{1}{a} = - \text{Log } a}$ car $\text{Log } \frac{1}{a} = \text{Log } 1 - \text{Log } a = 0 - \text{Log } a.$

Deux nombres inverses ont des logarithmes opposés.

4° $\boxed{\text{Log } a^m = m \text{ Log } a}$ pour m rationnel $\in$ Q et $a > 0$.

a) Si m est un entier positif : $a^m = aaa \dots a$ (m facteurs) et d'après le 1° : $\text{Log } a^m = \text{Log } a + \text{Log } a + \dots + \text{Log } a$ (m termes) donc pour $m \in \mathbf{N}$: $\text{Log } a^m = m \text{ Log } a$.

b) Si $m = \frac{p}{q}$ *fraction positive*, posons $x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \iff x^q = a^p$.

Donc $\text{Log } x^q = \text{Log } a^p \iff q \text{ Log } x = p \text{ Log } a \iff \text{Log } x = \frac{p}{q} \text{ Log } a$.

Soit : $\text{Log } a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \text{ Log } a$, ce qui établit la formule pour $m \in \mathbf{Q}^+$.

c) Si $m = -\frac{p}{q}$ *fraction négative* les deux nombres inverses $a^{\frac{p}{q}}$ et $a^{-\frac{p}{q}}$ ont des logarithmes opposés (3°). Donc : $\text{Log } a^{-\frac{p}{q}} = -\text{Log } a^{\frac{p}{q}} = -\frac{p}{q} \text{ Log } a$. La formule est établie pour $m \in \mathbf{Q}$.

5° $\boxed{\text{Log } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{ Log } a}$ et $\boxed{\text{Log } \sqrt{a} = \frac{1}{2} \text{ Log } a}$

Cela résulte du 4° car $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

464. Limites de Log x. — 1° ***Lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$, Log x ***tend de même vers*** $+\infty$.

Montrons que Log x finit par devenir supérieur à tout nombre positif donné A. Soit a un nombre supérieur à 1. Pour obtenir $\text{Log } a^n > A \iff n \text{ Log } a > A$, il suffit de prendre l'entier $n > \frac{A}{\text{Log } a}$. Donc pour tout $x > a^n$ nous aurons $\text{Log } x > \text{Log } a^n > A$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, Log x finit par devenir supérieur à tout nombre donné A et par suite $\text{Log } x \longrightarrow +\infty$.

2° ***Lorsque le nombre positif*** x ***tend vers*** 0, Log x ***tend vers*** $-\infty$.

Posons $x = \frac{1}{z}$. Lorsque x tend vers 0, son inverse z tend vers $+\infty$ et il en est de même de Log z. Par suite $\text{Log } x = -\text{Log } z$ tend vers $-\infty$.

465. Limite de $\frac{1}{x}$ Log x. — ***Lorsque*** x ***tend vers*** $+\infty$, ***le rapport*** $\frac{\text{Log } x}{x}$ ***tend vers zéro.***

Pour $x > 1$, le trapèze mixtiligne AA'M'M (fig. 144) est intérieur au rectangle BOM'N, ce qui entraîne :

$$\text{Log } x < x \Longrightarrow \text{Log } \sqrt{x} < \sqrt{x} \iff \frac{1}{2} \text{ Log } x < \sqrt{x}.$$

Soit pour $x > 1$: $$0 < \frac{\text{Log } x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $\frac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 et il en est de même du rapport positif $\frac{\text{Log}\, x}{x}$.

REMARQUE. — Quel que soit le rationnel positif k, il en est de même du rapport $\frac{\text{Log}\, x^k}{x^k}$ donc de $k\frac{\text{Log}\, x}{x^k}$ et par suite :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}\, x}{x^k} = 0}.$$

Par contre, lorsque $x = \frac{1}{z}$ tend vers 0, le produit $x^k \text{Log}\, x = -\frac{\text{Log}\, z}{z^k}$ tend vers 0 (par valeurs négatives) quel que soit le rationnel $k > 0$.

On résume ceci en disant que la fonction $\text{Log}\, x$ croît, en valeur absolue, moins vite que toute puissance de x $\left(\text{ou toute puissance de } \frac{1}{x}\right)$ d'exposant positif.

466. Courbe $y = \text{Log}\, x$. — Nous pouvons compléter le tableau de variation du n° 460 :

x	0		1		$+\infty$
$y' = \frac{1}{x}$	$+\infty$	$+$	1	$+$	0
$y = \text{Log}\, x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

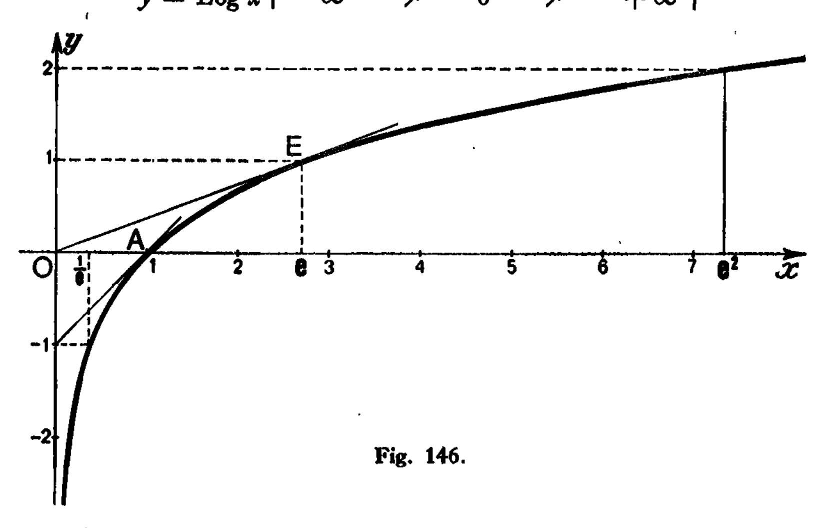


Fig. 146.

Dans un repère orthonormé la courbe $y = \text{Log}\, x$ a l'allure de la figure 146. Comme $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, elle tourne sa concavité du côté des y négatifs. Elle coupe Ox au point A (1, 0) où la tangente a pour coefficient directeur $+1$. Elle est asymptote à Oy' lorsque x tend vers 0. Par contre, lorsque $x \to +\infty$, elle admet Ox comme direction asymptotique,

car $\frac{\text{Log}\, x}{x}$ tend vers 0, mais n'admet pas d'asymptote $y = k$ puisque $y \to +\infty$. Nous avons affaire à une branche parabolique.

L'équation de la tangente au point M(x, Log x) s'écrit (n° 372) :

$$\text{Y} - \text{Log}\, x = \frac{1}{x}(\text{X} - x) \iff \boxed{\text{Y} = \frac{\text{X}}{x} + \text{Log}\, x - 1}.$$

Cette tangente coupe Oy au point T(0, Log x — 1). On voit ainsi que la sous-tangente relative à Oy est constante et égale à — 1.

467. Base des logarithmes népériens : le nombre *e*. — Puisque Log x est une fonction monotone sur $]0, +\infty[$, croissant de $-\infty$ à $+\infty$, il existe (n° 325) un nombre positif unique e tel que :

$$\boxed{\text{Log}\, e = 1}.$$

Le nombre e est la base du système de logarithmes népériens.

Sur la courbe $y = \text{Log}\, x$, le nombre e est l'abscisse du point E tel que $y = 1$, et point de contact de la tangente issue de O, car cette tangente a pour équation : $\text{Y} = \frac{\text{X}}{e}$.

L'importance du nombre e est comparable à celle du nombre π. Avec 10 décimales exactes : $e = 2{,}71828\ 18284...$

Pratiquement on prend : $e = 2{,}718$ ou $2{,}71828$.

Pour toute valeur rationnelle de m on a : $\boxed{\text{Log}\, e^m = m}$.

En effet : $\text{Log}\, e^m = m\, \text{Log}\, e = m$.

Les puissances entières de e forment une progression géométrique illimitée dans les deux sens, tandis que leurs exposants ou logarithmes forment une progression arithmétique :

$$\begin{array}{cccccccc} ...\,e^{-p} & ...\,e^{-2} & e^{-1} & 1 & e & e^2 & e^3\,... & e^m\,... \\ ...\,-p & ...\,-2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3\,... & m\,... \end{array}$$

C'est la correspondance entre deux progressions analogues qui est à l'origine de l'invention des logarithmes par le baron écossais Neper en 1594.

468. Limite de $\frac{1}{h}$ Log (1 + h). — La dérivée de Log x étant $\frac{1}{x}$, il en résulte que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{Log}\,(x+h) - \text{Log}\, x}{h} = \frac{1}{x}\cdot \text{ Soit pour } x = 1 : \quad \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\text{Log}\,(1+h)}{h} = 1}.$$

En remplaçant h par x on en déduit que :

Le rapport $\frac{\text{Log}\,(1+x)}{x}$ tend vers 1 lorsque x tend vers zéro.

Ceci quel que soit le signe de x.

469. Dérivées logarithmiques. — ***On appelle dérivée logarithmique d'une fonction dérivable*** $u(x)$, ***le rapport*** $\frac{u'}{u}$, ***dérivée de*** $\text{Log } |u|$.

On déduit des formules du n° 463, des formules de dérivation, souvent bien plus faciles à manipuler que les formules de dérivation classiques :

1° $\boxed{y = uvw} \Longrightarrow \text{Log } |y| = \Sigma \text{ Log } |u| \Longrightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}}$.

La dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques de chacun des facteurs.

2° $\boxed{y = \frac{u}{v}} \Longrightarrow \text{Log } |y| = \text{Log } |u| - \text{Log } |v| \Longrightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}}$.

La dérivée logarithmique d'un quotient est la différence des dérivées logarithmiques du numérateur et du dénominateur.

En particulier : $\boxed{y = \frac{1}{u}} \Longrightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = -\frac{u'}{u}}$.

3° $\boxed{y = u^m}$ pour $m \in Q \Longrightarrow \text{Log } |y| = m \text{ Log } |u| \Longrightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}}$.

Si on remplace y par sa valeur, on retrouve la formule de dérivation classique.

EXEMPLE I :

$$y = \frac{(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}{(x+2)^4} \Longrightarrow \text{Log } |y| = 2 \text{ Log } |x+1| + \frac{1}{2} \text{ Log } (1+x^2) - 4 \text{ Log } |x+2|.$$

Donc : $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{4}{x+2} = \frac{x^2(3-x)}{(x+1)(x+2)(x^2+1)} \Longrightarrow y' = \frac{x^2(x+1)(3-x)}{(x+2)^5\sqrt{1+x^2}}$

EXEMPLE II : $y = \frac{u^m}{v^p} \Longrightarrow \text{Log } |y| = m \text{ Log } |u| - p \text{ Log } |v|$.

Donc : $\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u} - p\frac{v'}{v} = \frac{mu'v - puv'}{uv} \Longrightarrow y' = \frac{(mu'v - puv')\,u^{m-1}}{v^{p+1}}$.

LOGARITHMES BASE *a*

470. Définition. — Si k désigne un réel non nul, la fonction $F(x) = k \text{ Log } x$ est la primitive de la fonction $\frac{k}{x}$, nulle pour $x = 1$. Cette nouvelle fonction, définie pour $x > 0$, possède la propriété fondamentale du n° 462 car si A et B sont des nombres positifs :

$$k \text{ Log AB} = k \text{ Log A} + k \text{ Log B} \Longrightarrow F(AB) = F(A) + F(B).$$

Cette fonction $F(x)$ définit un nouveau système de logarithmes dont la base est par définition le nombre a tel que :

$$F(a) = k \operatorname{Log} a = 1 \implies \boxed{\operatorname{Log} a = \frac{1}{k}} \quad \text{ou} \quad \boxed{k = \frac{1}{\operatorname{Log} a}}.$$

Cette fonction est dite « logarithme base a de x» et on écrit sans majuscule :

$$y = \log_a x = k \operatorname{Log} x \iff \boxed{\log_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}}.$$

471. Théorème. — ***Tous les systèmes de logarithmes sont proportionnels aux logarithmes népériens et possèdent des propriétés analogues.***

Toute relation linéaire entre des logarithmes népériens entraîne par multiplication par $k = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a}$ la même relation entre les logarithmes base a. Ainsi :

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a ABC = \log_a A + \log_a B + \log_a C.$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B; \quad \log_a \frac{1}{A} = -\log_a A \text{ et pour } m \text{ rationnel :}$$

$$\log_a A^m = m \log_a A \quad \text{et} \quad \log_a a^m = m.$$

De même : $A = B \iff \log_a A = \log_a B$.

Puisque : $k = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a}$ est positif pour $a > 1$, négatif pour $a < 1$ il en résulte que :

$$A < B \iff \begin{cases} \log_a A < \log_a B & \text{pour } a > 1. \\ \log_a A > \log_a B & \text{pour } a < 1. \end{cases}$$

472. Changement de base. — Soit $b > 0$ une nouvelle base :

$$\log_b x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} b} = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a} : \frac{\operatorname{Log} b}{\operatorname{Log} a} \implies \boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}.$$

Le nouveau logarithme est égal à l'ancien logarithme divisé par le logarithme de la nouvelle base.

En faisant $x = a$, on obtient : $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b} \implies \boxed{\log_a b . \log_b a = 1}$.

Si $b = \dfrac{1}{a}$, $\log_a b = -\log_a a = -1$ et $\boxed{\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x}$.

Dans deux bases inverses, les logarithmes d'un nombre donné x sont opposés.

473. Étude de la fonction $y = \log x$. — C'est l'étude de la fonction $y = k \text{ Log } x$ avec $k = \frac{1}{\text{Log } a}$. On a : $y' = \frac{k}{x} = \frac{1}{x \text{ Log } a}$ et par suite suivant les valeurs de a :

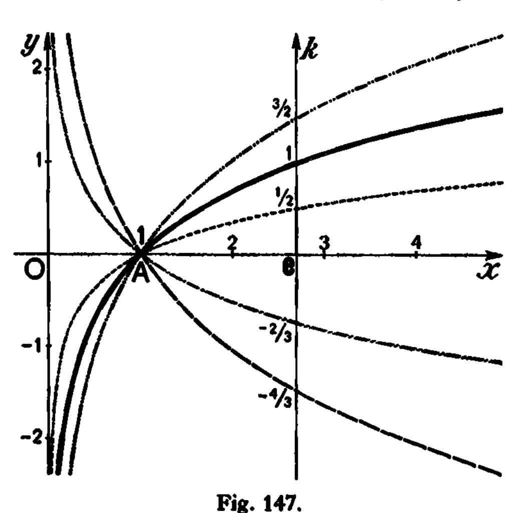


Fig. 147.

1er Cas : $a > 1$ ou $k > 0$

x	0		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	k	$+$	0
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2e Cas : $0 < a < 1$ ou $k < 0$

x	0		1		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	k	$-$	0
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

La fonction $y = \log_a x$ est croissante ou décroissante suivant que la base a est supérieure ou inférieure à 1.

Le graphe se déduit de la courbe $y = \text{Log } x$ par l'affinité orthogonale de base Ox et de rapport $k = \frac{1}{\text{Log } a}$ (fig. 147).

Notons que tracées dans un même repère orthonormé, les courbes $y = \log_a x$ et $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ sont symétriques par rapport à Ox car no (472) : $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$.

LOGARITHMES DÉCIMAUX

474. Définition. — ***On appelle logarithmes décimaux, les logarithmes du système dont la base est 10.***

Si $y = \log_{10} x$, on écrit (sans indice) : $\boxed{y = \log x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10}}$.

On pose : $M = \frac{1}{\text{Log } 10} = \log e = 0{,}43\,429...$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\log x = M \text{ Log } x}$.

La valeur de M, celle de son inverse $\frac{1}{M} = \text{Log } 10 = 2{,}30259$ ainsi que leurs produits par les multiplicateurs de 1 à 9 se trouvent dans les tables de logarithmes à cinq décimales. Notons qu'il est utile de savoir que :

$$\log 2 = 0{,}30\,103; \qquad \log 3 = 0{,}47\,712; \qquad \log \pi = 0{,}49\,715.$$

475. Propriétés particulières aux logarithmes décimaux.

1° Les formules : $\log_a a = 1$ et $\log_a a^m = m$ donnent :

$$\boxed{\log 10 = 1} \quad \text{et pour } m \in \mathbb{Q} : \quad \boxed{\log 10^m = m}.$$

Ainsi : $\log 100 = \log 10^2 = 2$, $\log 1\,000 = \log 10^3 = 3$ etc...

$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$, $\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$ etc...

$\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$ $\log \sqrt[3]{100} = \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} = 0{,}66\,667.$

2° Quel que soit $A > 0$, il existe un entier relatif p tel que :

$$10^p \leqslant A < 10^{p+1} \iff p \leqslant \log A < p + 1$$

Le nombre p qui est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $\log A$, est appelé *caractéristique* du nombre $\log A$.

3° Posons : $A = 10^p B$. Nous obtenons : $1 \leqslant B < 10$,

et $$\boxed{\log A = p + \log B} \quad \text{avec} \quad \boxed{0 \leqslant \log B < 1}.$$

Le nombre positif décimal $m = \log B$, inférieur à 1 est appelé ***mantisse*** du nombre $\log A$.

476. Convention d'écriture. — Si p et m sont rsepectivement la caractéristique et la mantisse de $\log A$ on obtient : $\log A = p + m$.

1er cas : $p = +3$ et $m = 0{,}57\,813 \Longrightarrow \log A = 3 + 0{,}57\,813$

On écrit normalement : $\boxed{\log A = 3{,}57\,813}$.

2e cas : $p = -5$ et $m = 0{,}64\,732 \Longrightarrow \log A = -5 + 0{,}64\,732$

On convient d'écrire : $\boxed{\log A = \bar{5}{,}64\,732}$

en plaçant le signe — au-dessus de la caractéristique de $\log A$ pour se rappeler que seule la caractéristique $\bar{5}$ est négative, la mantisse $0{,}64\,732$ étant positive. Cette façon d'écrire les logarithmes est avantageuse pour la recherche et l'addition des logarithmes.

477. Recherche de la caractéristique de $\log A$. — La relation du n° 475 (2°) : $10^p \leqslant A < 10^{p+1}$ montre que :

***La caractéristique p de* $\log A$ *est l'exposant de la puissance entière de* 10 *égale ou immédiatement inférieure à* A.**

$$0{,}01 < 0{,}0345 < 0{,}1 \Longrightarrow p = -2.$$
$$1\,000 < 3\,457{,}28 < 10\,000 \Longrightarrow p = +3.$$

1° *Si* A *est supérieur à* 1, désignons par n le nombre de chiffres de sa partie entière. Le plus petit nombre analogue est 10^{n-1}. Donc $10^{n-1} \leqslant A < 10^n$ et $p = n - 1$:

La caractéristique du logarithme d'un nombre $A > 1$ *est égale au nombre de chiffres, diminué de* 1, *de la partie entière de* A.

2° Si A *est inférieur à* 1, désignons par n le rang du premier chiffre significatif non nul après la virgule. Le plus petit nombre analogue est 10^{-n}, donc $10^{-n} < A < 10^{-n+1}$. Dans ce cas $p = -n$:

La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal A < 1, *est le rang, affecté du signe* —, *de son premier chiffre significatif non nul après la virgule.*

C'est aussi bien le nombre des zéros (y compris celui qui est avant la virgule) qui précèdent le premier chiffre décimal non nul. Ainsi :

$$A = 3{,}14\,159 \Longrightarrow p = 0; \qquad A = 5\,467{,}25 \Longrightarrow p = 3;$$

$$A = 0{,}5\,632 \Longrightarrow p = \bar{1}; \qquad A = 0{,}00\,967 \Longrightarrow p = \bar{3}.$$

478. Recherche de la mantisse de log A. — D'après le n° 475 (3°), la mantisse de log A est $m = \log B = \log 10^{-p} A$. Le nombre B, compris entre 1 et 10 s'obtient en plaçant, dans le nombre décimal A, la virgule immédiatement à la droite du premier chiffre significatif en partant de la gauche.

$$A = 0{,}00\,314; \quad A = 31{,}4 \quad \text{ou} \quad A = 314\,000 \Longrightarrow B = 3{,}14.$$

***La mantisse de* log A *est indépendante de la place de la virgule dans le nombre décimal* A *et ne dépend que du nombre formé par les chiffres significatifs de* A.**

Les tables de logarithmes usuelles donnent, avec 5 décimales, les mantisses des logarithmes des nombres de 1 000 à 10 000 exprimées en cent millièmes.

Ainsi, en regard de A = 3 456 on lit 53 857 ; cela veut dire que la mantisse de log 3 456 est 0,53 857, ce qui est aussi la mantisse de log 34,56, de log 3,456 ou de log 0,003 456. Lorsque A a plus de 4 chiffres significatifs, on procède par interpolation en admettant que :

Entre deux nombres situés dans la table, l'accroissement de A *et celui de* log A *sont proportionnels.*

L'accroissement, en cent millièmes, du logarithme du nombre entier A compris entre 1 000 et 10 000, lorsque A augmente de 1 unité se désigne par D et se nomme *différence tabulaire :*

$$\log (A + 1) - \log A = D \text{ (en cent millièmes).}$$

Donc pour $0 < k < 1$: $\log (A + k) = \log A + kD.10^{-5}$.

On arrondit kD à l'entier le plus rapproché pour obtenir la correction δ.

Montrons comment on opère sur des exemples. A défaut d'une table à 5 décimales on pourra utiliser suivant les mêmes principes, la table à 4 décimales des pages 370 et 371.

479. Problème I. — *Trouver le logarithme d'un nombre donné.*

1er EXEMPLE. — *Sans interpolation :* log 0,006 543.

La caractéristique est : — 3 (n° 477). Dans la table, en regard de 6 543 on lit la mantisse (en cent millièmes) : 81 578. Donc : $\log 0{,}006\,543 = \bar{3}{,}81\,578$.

2e EXEMPLE. — *Avec interpolation :* log 345,678.

La caractéristique est : + 2 (n° 477). Cherchons la mantisse (en cent millièmes) de 3 456,78. Dans la table on lit :

Pour N = 3 456 → log = 53 857
Pour N = 3 457 → log = 53 870 } différence tabulaire D = + 13.

La correction pour 0,78 est 13 × 0,78 = 10,14. On arrondit à 10 et à N = 3 456,78 correspond : 53 857 + 10 = 53 867. Donc : log 345,678 = 2,53 867.

Comme la table donne les parties proportionnelles de 13, c'est-à-dire les produits de $\frac{13}{10}$ par les multiplicateurs de 1 à 9, on dispose l'opération comme ci-dessous :

Pour	N = 3 456	log = 53 857	D = 13
Correction pour	0,7	9,1	
—	0,08	1,04	
Pour	3 456,78	log = 53 867,14	Donc : log 345,678 = 2,53 867.

3e EXEMPLE. — *Logarithme d'un rapport trigonométrique.*

Les tables de logarithmes donnent directement les logarithmes du sinus, de la tangente, de la cotangente et du cosinus des angles du premier quadrant exprimés en degrés et minutes (ou en grades et centigrades). La correction pour les secondes se déduit de la différence tabulaire algébrique D qui est la correction pour 60″. Pour n'', on a donc la correction $\frac{D \times n}{60}$. Soit à calculer log cos 61° 23′ 48″.

Pour	$\alpha = 61° 23'$	log cos $\alpha = \bar{1},68\,029$	D = — 23.
Correction pour	40″	— 15,3	
—	8″	— 3,1	
Pour	$\alpha = 61° 23' 48''$	log cos $\alpha = \bar{1},68\,010\,6$	

La sixième décimale dépassant 5, on arrondit au-dessus : log cos 61° 23′ 48″ = $\bar{1}$,68 011.

480. Problème II. — *Trouver un nombre connaissant son logarithme.*

1er EXEMPLE. — *Sans interpolation :* log $x = \bar{2},65\,963$.

En regard de la mantisse 65 963, on lit dans la table 4 567. La caractéristique étant — 2, le 1er chiffre significatif 4 doit occuper le 2e rang après la virgule dans x.

Donc : $x = 0,04\,567$.

2e EXEMPLE. — *Avec interpolation :* log $x = 2,45\,680$.

En regard de 45 667 on lit le nombre 2 862 } D = 682 — 667 = 15
— 45 682 — 2 863 } δ = 680 — 667 = 13.

Pour une augmentation de D = 15 le nombre augmente de 1. Pour une de δ = 13 ce nombre augmente de 13 : 15 = 0,87.

Donc, 45 680 correspond au nombre 2 862,87 = $x \times 10^n$.

La caractéristique de log x étant + 2, il faut 3 chiffres à la partie entière du nombre x.

D'où : $x = 286,287$.

— En utilisant les parties proportionnelles de 15, on dispose ainsi le calcul :

Pour	45 667	N = 2 862	D = 15
Correction pour	12	0,8	δ = 13
—	1	0,07	
Pour	45 680	N = 2 862,87	

Caractéristique + 2. Donc : $x = 286,287$.

3e EXEMPLE. — *Cas d'un rapport trigonométrique :* log tg $x = \bar{1},78\,627$.

Soit à déterminer x en degrés tel que : log tg x = 1,78 627.

En regard de log tg α = 1,78 618 on lit α = 31° 26′ avec D = 29.

La correction pour D = 29 serait 1′ = 60″. Pour δ = 627 — 618 = 9 elle est donc : $\frac{60'' \times 9}{29} = 18'',6$. On arrondit à 19″ soit $x = 31° 26' 19''$.

Pratiquement, avec les parties proportionnelles de 29 :

Pour $\log \operatorname{tg} \alpha =$	1,78 618	31° 26′	D = 29
Correction pour	4,8	10″	$\delta = 9$.
—	4,4	9″	
Pour $\log \operatorname{tg} x =$	1,78 627	$x = 31° 26' 19''$	

481. Calcul d'un logarithme népérien. — Lorsqu'on ne dispose pas d'une table de logarithmes népériens, mais seulement d'une table de logarithmes décimaux, on opère comme suit.

EXEMPLE. — *Soit à calculer :* Log 345,678.

On a trouvé (n° 479, 2°) : log 345,678 = 2,53 867 $\Longrightarrow$ Log 345,678 = $\frac{1}{M} \times 2{,}53\,867$, où $\frac{1}{M}$ = Log 10 = 2,30 259 (n° 474). Pour effectuer cette multiplication par $\frac{1}{M}$, on utilise les multiplicateurs de $\frac{1}{M}$ donnés dans la table et on dispose ainsi l'opération :

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} \times 2{,}00\,000 &= 4{,}60\,517\\ 0{,}5 &= 1{,}15\,129\,3\\ 0{,}03 &= 0{,}06\,907\,8\\ 0{,}00\,8 &= 0{,}01\,842\,1\\ 0{,}00\,06 &= 0{,}00\,138\,6\\ 0{,}00\,007 &= 0{,}00\,016\,1\\ \hline \frac{1}{M} \times 2{,}53\,867 &= 5{,}84\,550\,9\end{aligned}$$

On gardera : Log 345,678 = 5,84 551

482. Cologarithme. — ***On appelle cologarithme du nombre positif*** A ***l'opposé de son logarithme, c'est-à-dire le logarithme de son inverse.***

$$\boxed{\operatorname{colog} A = -\log A = \log \frac{1}{A}}.$$

Si on désigne par p et m la caractéristique et la mantisse de log A, par p' et m' celles de colog A on voit que : $(p + m) + (p' + m') = 0$ avec m et $m' \in]0, 1[$.

Ce qui implique puisque p et p' sont entiers : $m + m' = 1 \Longrightarrow p + p' = -1$. Donc :

$$\boxed{p' = -(p + 1)} \quad \boxed{m' = 1 - m}.$$ D'où la règle :

1° ***La caractéristique de*** colog A ***s'obtient en ajoutant*** + 1 ***à celle de*** log A ***et en prenant l'opposé du résultat.***

2° ***La mantisse de*** colog A ***s'obtient en prenant, pour chacun des chiffres décimaux de la mantisse de*** log A, ***son complément à*** 9 ***sauf pour le dernier chiffre non nul à droite dont il faut prendre le complément à*** 10.

Ainsi : $\begin{cases}\log A = 3{,}19507\\ \operatorname{colog} A = \bar{4}{,}80493\end{cases}$ $\begin{cases}\log B = \bar{3}{,}49060\\ \operatorname{colog} B = 2{,}50940\end{cases}$

on vérifie que l'on a bien : log A + colog A = 0.

483. Multiplication et division d'un logarithme. — Pour effectuer la multiplication ou la division de log A par un nombre relatif donné k, on commence par se ramener à un logarithme positif à l'aide du cologarithme :

$$\bar{8},75\,648 : 2,54 = -\frac{7,24\,352}{2,54} = -2,85\,178 = \bar{3},14\,822.$$

Lorsque le multiplicateur ou diviseur k est un entier simple on peut opérer directement :

$$\bar{2},37\,826 \times 5 = (-2 + 0,37\,826) \times 5 = -10 + 1,89\,130 = \bar{9},89\,130$$
$$\bar{9},63\,256 : 7 = (-14 + 5,63\,256) = \bar{2},80\,465$$
$$\bar{4},16\,825 \times \frac{3}{5} = \frac{-12 + 0,50\,475}{5} = \frac{-15 + 3,50\,475}{5} = \bar{3},70\,095.$$

484. Calculs par logarithmes. — Si A, B, C, k sont des nombres positifs donnés (ou aisément calculables à partir des données) tout nombre inconnu $x = k\dfrac{A^mB^p}{C^r}$ où m, p, r sont des rationnels positifs quelconques, se calcule en déterminant d'abord :

$$\log x = \log k + m \log A + p \log B + r \operatorname{colog} C$$

puis en recherchant x connaissant son logarithme. On obtient ainsi un moyen d'effectuer des opérations pratiquement inabordables directement.

1er EXEMPLE. — *Calculer le rayon* R *d'une sphère dont le volume* V *est* 86,423 m³.

On sait (n° 438) que : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ donc que $R^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{V}{\pi}$.

Soit : $3 \log R = \log 0,75 + \log 86,423 + \operatorname{colog} \pi$.

log 0,75	= $\bar{1}$,87 506		log R = 0,43 818		
log 86,423	= 1,93 663		Pour 43 807	N = 2 742	
colog π	= $\bar{1}$,50 285		11	0,7	
3 log R	= 1,31 454	D'où :	43 818	N = 2 742,7	
			R = 2,7427 m		

2e EXEMPLE. — *Trouver l'hypoténuse* a *d'un triangle rectangle* ABC *sachant que*

$$b = 246,80 \text{ m} \quad et \quad c = 135,79 \text{ m}.$$

On a : $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Cette formule n'est pas directement calculable par logarithmes.

On écrit : $a = b\sqrt{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$ et on pose $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} \varphi$ avec $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient :

$$a = b\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{b}{\cos \varphi} \text{ et les formules :}$$

$\log \operatorname{tg} \varphi = \log c + \operatorname{colog} b$; $\log a = \log b + \operatorname{colog} \cos \varphi$.

log c = log 135,79 = 2,13 287		log b = 2,39 235
colog b = colog 246,80 = $\bar{3}$,60 765		colog cos φ = 0,05 742
log tg φ = $\bar{1}$, 74 052		log a = 2,44 977
En grades : φ = 32,022 gr.		**a = 281,69 m**

— On peut remarquer que l'angle auxiliaire φ introduit dans le calcul n'est autre que l'angle C = 32,022 gr du triangle ABC, ce qui implique B = 67,978 gr.

485. Remarque. — On voit d'après les exemples ci-dessus l'intérêt que présentent les formules calculables par logarithmes

Lorsqu'on est amené à introduire dans un calcul une variable intermédiaire tel que l'angle φ du 2e exemple ci-dessus, il est en général avantageux de penser à une variable angulaire. La souplesse et la variété des relations trigonométriques font qu'il y a intérêt le plus souvent, à déterminer en premier les inconnues angulaires dont tout calcul à effectuer par logarithmes.

EXERCICES

— En utilisant les tables, résoudre les équations suivantes :

943. $\log(x-2)+\log(x+3)=2.$

944. $2\,\mathrm{Log}\,2+\mathrm{Log}\,(x^2-1)=\mathrm{Log}\,(4x-1).$

945. $2\log^2 x-11\log x+15=0.$

946. $3\log^2 x-13\log x+14=0.$

947. $4\log^3 x-3\log x+1=0.$

948. $\mathrm{Log}^3 x-3\,\mathrm{Log}\,x+2=0.$

949. $20\,\mathrm{Log}^2 x-16\,\mathrm{Log}\,x+3=0.$

950. $6\,\mathrm{Log}^2 x-(2a+3b)\,\mathrm{Log}\,x+ab=0.$

951. $\mathrm{Log}^3 x-7\,\mathrm{Log}^2 x+36=0.$

952. $\mathrm{Log}^4 x-34\,\mathrm{Log}^2 x+225=0.$

953. $\mathrm{Log}\,(x-2)-\mathrm{Log}\,(x-3)=1.$

954. $\mathrm{Log}\,(x+a)-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,ax=\mathrm{Log}\,\frac{m^2+1}{m}.$

— Résoudre les systèmes suivants :

955. $\begin{cases} x+y=65. \\ \log x+\log y=3. \end{cases}$

956. $\begin{cases} xy=a^2. \\ \mathrm{Log}^2 x+\mathrm{Log}^2 y=\frac{20}{9}\mathrm{Log}^2 a. \end{cases}$

957. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2. \\ \log x+\log y=\log 12a-2\log 5. \end{cases}$

958. $\begin{cases} \mathrm{Log}\,x+\mathrm{Log}\,y=2\,\mathrm{Log}\,a, \\ \log^3 x+\log^3 y=2\log^3 a+6\log a\log^2 m. \end{cases}$

959. Résoudre l'inéquation : $\log_2 x>\log_8(3x-2).$

960. Calculer : $x=\frac{\pi^3\sqrt{3{,}9827}}{(0{,}534)^5}.$

961. Calculer z sachant que $x=4{,}25$; $y=0{,}057$ et que $x^2y\sqrt{z}=\sqrt[3]{x}.$

962. On considère le nombre $x=81\sqrt[3]{\frac{121{,}5}{\sqrt{2}}}$ et on pose $\log 2=\alpha$, $\log 3=\beta$. Montrer que $\log x$ est fonction linéaire de α et β. Déterminer cette expression et calculer x.

— Déterminer les valeurs de x, y, ou z sachant que :

963. $x=\frac{(842{,}5)^{3/2}}{\pi\sqrt{742{,}3}}$; $y^3=\frac{241{,}6\cos 58{,}423\text{ gr}}{(7{,}436)^2}$; $\mathrm{tg}\,z=\frac{243{,}64\,\mathrm{tg}\,76\text{ gr}}{46{,}347}$ (z en grades).

964. $x^3=\frac{e\sin 47^\circ}{(23{,}7)^{2/3}}$; $y^5=\frac{\pi^2\,\mathrm{tg}\,27^\circ 53'}{(0{,}3415)^6}$; $\sin z=\frac{86{,}408\cos 67^\circ 18'}{114{,}42}$ (z en degrés).

— Résoudre un triangle ABC, en calculant les éléments inconnus, sachant que :

965. A = 100 gr; B = 67,432 gr; a = 325,43 m.

966. A = 90°; B = 56° 43′ 25″; b = 151,87 m.

967. A = 100 gr; a = 637,08 m; b = 541,37 m.

968. A = 90°; $b = 1\,253{,}40$ m; $c = 746{,}06$ m.

969. $a = 531{,}74$ m; B = 71,407 gr; C = 48,259 gr.

970. A = 72° 24′ 06″; $b = 252{,}87$ m; $c = 197{,}43$ m.

971. $a = 601{,}32$ m; $b = 448{,}56$ m; $c = 349{,}84$ m.

972. Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $ac > 0$ et $b^2 - 4\,ac > 0$.

1° Ramener cette équation à la forme : $x^2 - 2\,mx + k^2 = 0$ avec $m^2 - k^2 > 0$.

2° Montrer qu'elle admet pour racines $x' = k \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ et $x'' = k \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$ si : $\sin \varphi = \frac{k}{m}$.

3° *Application.* — Résoudre trigonométriquement, à l'aide de la table de logarithmes l'équation

$$24{,}32\,x^2 - 73{,}56\,x + 38{,}47 = 0$$

en commençant par calculer φ en grades.

973. Reprendre l'exercice précédent avec l'équation :

$$6{,}842\,x^2 - 120{,}14\,x + 423{,}56 = 0$$

en calculant φ en degrés, minutes et secondes.

974. On considère l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $ac < 0$.

1° Ramener cette équation à la forme : $x^2 - 2\,mx - k^2 = 0$.

2° Montrer que : $x' = k \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$ et $x'' = -k \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ en sont les racines si : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{m}$.

3° *Application.* — Résoudre à l'aide des tables de logarithmes l'équation :

$$72{,}45\,x^2 - 243{,}8\,x - 132{,}43 = 0 \qquad (\varphi \text{ en grades}).$$

975. Reprendre l'exercice précédent avec l'équation :

$$27{,}437\,x^2 + 52{,}478\,x - 123{,}45 = 0 \qquad (\varphi \text{ en degrés}).$$

976. Soit l'équation du troisième degré : $x^3 + px + q = 0$ avec $4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$.

1° Montrer que si l'on pose $k = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ et $\cos \varphi = -\frac{4q}{k^3}$, les trois racines réelles de l'équation (n° 390) s'écrivent : $k \cos \frac{\varphi}{3}$, $k \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}$ et $k \cos \frac{\varphi - 2\pi}{3}$.

2° *Application.* — Résoudre trigonométriquement l'équation :

$$32{,}436\,x^3 - 158{,}87\,x + 92{,}748 = 0.$$

977. Reprendre l'exercice précédent avec l'équation :

$$43{,}621\,x^3 - 201{,}59\,x + 108{,}43 = 0.$$

978. 1° Calculer la dérivée de $y = \frac{1}{2} \operatorname{Log}^2 x$.

2° Trouver la primitive de $\frac{1}{x} \operatorname{Log} x$, nulle pour $x = e$.

979. 1° Étudier la fonction $y = x - \log_a x$ en distinguant les deux cas : $a > 1$ et $0 < a < 1$.

2° Comment faut-il choisir la base a pour qu'un nombre donné α soit égal à son logarithme $\log_a \alpha$?

3° Montrer que si l'équation $x = \log_a x$ a deux racines α et β pour une valeur de a donnée, elles vérifient l'égalité $\alpha^\beta = \beta^\alpha$.

980. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction logarithme népérien, montrer que : $\frac{1}{n+1} < \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n < \frac{1}{n}$, où n est un entier positif.

En déduire que la suite dont le terme de rang n est $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

tend vers $+\infty$ lorsque n augmente indéfiniment.

981. Soit la fonction de la variable x suivante : $y = x^2 + \frac{2}{x}$.

1° Étudier sa variation. Tracer la courbe représentative.

2° Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette courbe avec l'axe $x'Ox$? En calculer une valeur approchée à l'aide des tables de logarithmes.

3° On envisage, sur la courbe, le point A d'abscisse 1 et le point B d'abscisse x_0 supérieure à 1. Quelle est l'aire comprise entre la courbe, l'axe $x'x$ et les droites $x = 1$ et $x = x_0$?

4° Calculer, avec les tables de logarithmes, la valeur approchée de cette aire lorsque $x_0 = 2$. (On rappelle que $\log_{10} e = 0{,}43\,429$.)

982. Résoudre numériquement les équations suivantes et indiquer, dans chaque cas, si les valeurs obtenues sont exactes ou approchées :

$$\text{a) } x - \frac{1}{x} = \frac{15}{4}; \qquad \text{b) } e^t - e^{-t} = \frac{15}{4}; \qquad \text{c) } \log z - \frac{1}{\log z} = \frac{15}{4};$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} 3z - \operatorname{cotg} 3z = \frac{15}{4} \quad \text{avec} \quad z \in \left]0, \pi\right[.$$

983. On considère la fonction : $f(x) = \log x + \frac{2}{3 + 18x} + 0{,}63\,436$,

où $\log x$ désigne le logarithme décimal du nombre positif x.

1° Calculer à l'aide d'une table de logarithmes à cinq décimales : $f(0{,}09)$; $f(0,08)$; $f(0{,}084)$; $f(0{,}083)$.

2° Calculer la dérivée par rapport à x de $f(x)$ et montrer qu'elle a un signe constant.

3° En déduire que $f(x) = 0$ admet une seule racine positive, dont on donnera une valeur approchée à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut.

984. Soit la fonction $y = x(\operatorname{Log} x - a)$ où a désigne un paramètre réel.

1° Construire le graphe de la fonction y. Quelles sont les coordonnées du minimum m en fonction de a ? Lorsque a varie, sur quelle courbe se déplace m ?

2° La tangente à la courbe en un point M d'abscisse x rencontre l'axe Oy en un point T. Montrer que $\overline{OT} = x$.

985. Étudier les variations de la fonction : $y = x^2 + a \operatorname{Log} x$ et la forme des courbes représentatives suivant les valeurs de a.

Déterminer le lieu des points où la courbe admet une tangente parallèle à Ox.

986. 1° Étudier les variations de la fonction : $y_1 = \operatorname{Log} x$ et en déduire les variations des fonctions : $y_2 = \operatorname{Log} x^2$ et $y_3 = \operatorname{Log} x^3$.

2° Construire dans un même repère orthonormé (unité = 2 cm) les graphes de ces trois fonctions.

3° On coupe ces trois courbes par la droite $x = 2$ et l'on mène les tangentes aux points d'intersection. Démontrer que ces tangentes concourent en un même point.

987. 1° Étudier la fonction : $y = \frac{1}{x} \operatorname{Log} x$ lorsque x varie de $\frac{1}{2}$ à 8. Construire son graphe (C) dans un repère rectangulaire xOy (unités : 2 cm sur Ox; 10 cm sur Oy). On donne $e = 2{,}718\,28$ et $\operatorname{Log} 2 = 0{,}6931$. On déterminera les points d'abscisses $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8 par leurs coordonnées à 0,01 près par défaut.

2° Calculer la dérivée de $Y = \frac{1}{2} \operatorname{Log}^2 x$. En déduire l'aire S du domaine compris entre la courbe (C), l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisses $x = 1$ et $x = 8$. Préciser l'unité de mesure de cette aire.

988. 1° Étudier les variations et construire le graphe de la fonction :

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

2° Démontrer que le changement de x en $-x$ entraîne le changement de y en $-y$. En déduire la symétrie du graphe par rapport au point O.

989. 1° Étudier la fonction $y = \text{Log}\, x + 4x^2 - 8x + 1$ et construire le graphe (C) de cette fonction. Montrer que cette fonction présente un maximum et un minimum dont les ordonnées sont négatives.

2° Quelle est la dérivée de $x \,\text{Log}\, x$? En déduire une primitive Y de la fonction y. Déterminer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe Ox et les droites $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

990. 1° Pour quelles valeurs de λ la fonction : $y_\lambda = \text{Log}\,(x^2 + 4x + \lambda)$ est-elle définie pour toutes les valeurs de x ?

2° Résoudre l'équation : $y_0 = \text{Log}\,(x + 2) + \text{Log}\, 2$
(y_0 est la fonction y_λ dans laquelle on fait $\lambda = 0$).

3° Étudier les variations de y_4 et les représenter graphiquement.

4° Vérifier que $Y_4 = 2\,[(x + 2)\,\text{Log}\,(x + 2) - x]$ est une primitive de y_4.

5° Calculer l'aire comprise entre la courbe représentant y_4, les droites $x = -1$ et $x = 0$ et l'axe Ox, à $\frac{1}{10^4}$ près.

991. 1° La courbe représentative de la fonction Log x étant supposée connue, en déduire le tracé de la courbe (C) représentative de la fonction $f(x) = -\text{Log}\, x$ pour $x > 0$.

On prendra pour unité de longueur 1 cm sur chacun des axes et l'on s'attachera à une précision graphique convenable.

2° Vérifier que la fonction $F(x) = x - x\,\text{Log}\, x$ est une primitive de la fonction $f(x)$ précédente.

3° Utiliser cette primitive pour évaluer l'aire du triangle mixtiligne limité par la courbe (C), l'axe Ox et la droite d'abscisse $x = 10^{-n}$, où n désigne un entier positif. Montrer que, pour $n \geqslant 5$, cette aire est comprise entre 0,999 et 1.

992. 1° Étudier la variation de la fonction : $y = \dfrac{\text{Log}\, x - 2}{\text{Log}\, x - 1}$.

On appellera (C) la courbe représentative de cette fonction. On ne demande pas de la construire encore.

2° Admettant que $x\,\text{Log}\, x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, montrer que $\dfrac{y - 1}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers 0.

3° Calculer la dérivée de y et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

4° Pour quelle valeur de x la fonction y prend-elle la valeur 3 ? Calculer cette valeur avec la précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales.

5° A l'aide des résultats précédents, construire la courbe (C) avec la plus grande précision possible.

993. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = x\,\text{Log}\, x - 3x$, lorsque x appartient à l'intervalle $1 \leqslant x \leqslant e^3$.

2° Tracer la courbe représentative (C), de cette fonction et les tangentes aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = e^3$, dans un repère orthonormé (unité = 1 cm).

3° Donner l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x = e$ et tracer cette tangente sur le graphique précédent.

4° Calculer la dérivée de la fonction : $Y = \frac{1}{2}\, x^2\, \text{Log}\, x$. Comparer cette dérivée à la fonction y du 1° et en déduire une primitive de la fonction y.

Exprimer l'aire A, de la portion de plan comprise entre la courbe (C), l'axe des x et la parallèle à l'axe des y menée par le point d'abscisse $x = 1$ sur l'axe Ox. Donner une valeur approchée de A en centimètres carrés.

994. On donne la fonction $y = \dfrac{\text{Log}\, x - 2}{\text{Log}\, x}$.

1° Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?

2° Pour quelle valeur de x cette fonction s'annule-t-elle ?
3° Calculer la limite de cette fonction quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0.
4° Calculer la fonction dérivée.

995. On donne la fonction $y = \frac{\text{Log } x}{x}$, où l'on suppose $x > 0$.

1° Calculer la dérivée y'; étudier les variations de la fonction y. Pour quelle valeur de x, y est-il maximum ? Quelle est la valeur de ce maximum ? Montrer que l'on a $y < \text{Log } 2$ quel que soit x.

2° On désigne par n un entier au moins égal à 1; déduire de l'inégalité précédente l'inégalité $n < 2^n$. Montrer que cette dernière inégalité peut aussi se déduire du développement de $(1 + u)^n$ par la formule du binôme.

996. On considère la fonction : $y = x^2 \text{ Log } x$.

1° Pour quelles valeurs de x est-elle définie ? Dans toute la suite du problème on se limitera aux valeurs de x comprises entre $\frac{1}{e}$ et e : $\left(\frac{1}{e} \leqslant x \leqslant e\right)$.

2° Calculer la dérivée y' de y par rapport à x. Pour quelle valeur de x cette dérivée est-elle nulle ? Quelle est la valeur correspondante de y ?

3° En déduire le tableau de variation de y quand x varie de $\frac{1}{e}$ à e. Calculer à 0,01 près les ordonnées des points d'abscisses : $x_0 = e^{-1}$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

Construire l'arc de courbe représentatif des variations de y en prenant, sur les axes, des unités de longueur commune 2 centimètres.

997. Soit la fonction : $y = 2x - \text{Log } x$ de la variable x.

1° Pour quelles valeurs de x la fonction y est-elle définie ? On se limite, dans la suite du problème, aux valeurs de x inférieures ou égales à 10 ($x \leqslant 10$). Étudier y quand x tend vers zéro. Dresser le tableau des variations de la fonction y de la variable x.

2° Calculer, à 0,01 près, les logarithmes népériens de 2, de 3, de 5, puis de $\frac{1}{2}$, de $\frac{1}{4}$, de 6, de 9, de 10. Dresser le tableau des valeurs de y correspondant à ces valeurs de x ($x = 2$, $x = 3$, etc.).

3° Représenter graphiquement les variations de la fonction y dans un repère orthonormé xOy. On prendra le centimètre pour unité sur chacun des axes.

4° Vérifier que $x^2 + x - x \text{ Log } x$ est une primitive de y. En déduire l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe, l'axe de x et les parallèles à Oy d'abscisses $x = 1$ et $x = 3$.

998. 1° Étudier les variations de la fonction $z = \text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \frac{2}{x+1}$ et construire la courbe représentative. Montrer que cette fonction s'annule pour une valeur de x que l'on déterminera à 0,01 près.

2° On considère la fonction $y = f(x) = x \text{ Log}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$. Que devient-elle lorsque x tend vers 0 ou vers $\pm\infty$? (On rappelle que $\frac{1}{h} \text{ Log }(1 + h) \longrightarrow 1$ quand $h \longrightarrow 0$). Étudier la variation de $f(x)$ et construire, dans un repère orthonormé, sa courbe représentative (C).

3° Calculer la dérivée de $(x^2 - 1) \text{ Log } |1 + x| - x^2 \text{ Log } |x|$ et déterminer l'aire de la portion de plan comprise entte la courbe (C), la droite $y = 2$ et les droites $x = 0$ et $x = \alpha > 0$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

486. Définition. — Quel que soit le nombre réel positif $a \neq 1$, la fonction logarithme base a est une fonction définie continue et monotone sur $[0, +\infty[$, croissante de $-\infty$ à $+\infty$ pour $a > 1$, décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ pour $a < 1$ (nº 473). Il en résulte (nº 326) que tout nombre réel x est le logarithme base a d'un nombre positif unique y appelé exponentielle base a de x.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y > 0 \quad \text{tel que} \quad \boxed{x = \log_a y} \iff \boxed{y = \exp_a x}. \qquad (1)$$

***La fonction** $y = \exp_a x$ **est la fonction réciproque de** $x = \log_a y$. **C'est une fonction positive de** x, **définie, continue et monotone sur** $]-\infty, +\infty[$, **croissante pour** $a > 1$, **décroissante pour** $a < 1$.*

D'autre part, les relations $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$ entraînent quel que soit $a > 0$

$$\exp_a 0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp_a 1 = a.$$

487. Notation : $\exp_a x = a^x$. — Des relations (1) on tire : $\log_a (\exp_a x) = x$.

Or lorsque x est un nombre rationnel $m \in \mathbf{Q}$, on obtient (nº 471) :

$$\log_a (\exp_a m) = m = \log_a a^m \implies \boxed{\exp_a m = a^m}. \qquad (2)$$

***La fonction** $\exp_a x$ **est identique à la fonction** a^x **pour toute valeur rationnelle de** x.*

Ces valeurs de x sont d'ailleurs les seules pour lesquelles on puisse définir a^x par la formule : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Or la fonction $\exp_a x$ étant continue, il en résulte que, lorsque le rationnel $m = \frac{p}{q}$ tend vers le nombre réel x (rationnel ou non) le nombre a^m, égal à $\exp_a m$, tend vers $\exp_a x$. C'est pourquoi par définition :

***On pose** $a^x = \exp_a x$ **pour toute valeur non rationnelle de l'exposant** x.*

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad \boxed{y = a^x} \iff \boxed{\log_a y = x}. \qquad (3)$$

En particulier :

$$\boxed{y = e^x} \iff \boxed{\operatorname{Log} y = x}. \qquad (4)$$

488. Formules fondamentales. — Eliminons y entre les formules (3) :

$$\log_a a^x = x \iff \frac{\operatorname{Log} a^x}{\operatorname{Log} a} = x$$

donc : $\forall x \in \mathrm{R}$: $\boxed{\operatorname{Log} a^x = x \operatorname{Log} a}$. (5)

De même : $\forall x \in \mathrm{R}$: $\boxed{\operatorname{Log} e^x = x}$. (6)

Quel que soit u on a : $\operatorname{Log} e^u = u$ donc pour $u = x \operatorname{Log} a$:

$$\operatorname{Log} e^{x \operatorname{Log} a} = x \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} a^x$$ ce qui entraîne :

$$\boxed{a^x = e^{x \operatorname{Log} a}}. \qquad (7)$$

La fonction a^x n'est donc qu'un cas particulier de la fonction $e^{\alpha x}$ d'où l'importance de cette dernière. D'autre part, la formule (5) s'écrit quel que soit le nombre positif b différent de 1 (nº 472) :

$$\log_b a^x = \frac{\operatorname{Log} a^x}{\operatorname{Log} b} = x \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b} \iff \boxed{\log_b a^x = x \log_b a} \qquad (8)$$

formule qui généralise le logarithme d'une puissance d'exposant rationnel.

Ainsi pour $b = 10$ on obtient : $\boxed{\log a^x = x \log a}$. (9)

489. Extension des formules relatives aux exposants. — Toutes les formules relatives aux puissances d'exposants rationnels de nombres positifs a, b, c, s'étendent aux puissances d'exposants réels x, y, z rationnels ou non.

1º $\boxed{a^x b^x c^x = (abc)^x}$.

En effet : $\operatorname{Log}(a^x b^x c^x) = x \operatorname{Log} a + x \operatorname{Log} b + x \operatorname{Log} c = x \operatorname{Log} abc = \operatorname{Log}(abc)^x$

Donc : $\operatorname{Log}(a^x b^x c^x) = \operatorname{Log}(abc)^x \iff a^x b^x c^x = (abc)^x$.

On en déduit : $\left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot b^x = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^x = a^x \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

En particulier : $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$.

2º $\boxed{a^x a^y a^z = a^{x+y+z}}$. En effet :

$$\operatorname{Log}(a^x a^y a^z) = x \operatorname{Log} a + y \operatorname{Log} a + z \operatorname{Log} a = (x + y + z) \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} a^{x+y+z}$$

Soit : $\operatorname{Log}(a^x a^y a^z) = \operatorname{Log} a^{x+y+z} \iff a^x a^y a^z = a^{x+y+z}$

Ainsi : $a^x . a^{-x} = a^0 = 1 \iff a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

3° $\boxed{(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}}$.

En effet : $\text{Log}\,(a^x)^y = y\,\text{Log}\,a^x = xy\,\text{Log}\,a = \text{Log}\,a^{xy}$

Donc : $\text{Log}\,(a^x)^y = \text{Log}\,a^{xy} \Longleftrightarrow (a^x)^y = a^{xy}$

Ainsi : $(a^x)^{\frac{1}{x}} = (a^{\frac{1}{x}})^x = a^1 = a.$ $\quad (a^x)^{\frac{y}{x}} = a^{\frac{xy}{x}} = a^y.$

490. Calcul de a^x ou de e^x. — On procède à l'aide de la table de logarithmes décimaux sachant que :

$$y = a^x \Longleftrightarrow \log y = x \log a.$$

EXEMPLE. — *Soit à calculer* $\pi^{\sqrt{2}} = (3{,}1416)^{1{,}414}$

On lit dans la table : $\log \pi = 0{,}49\,715$.

On effectue : $0{,}49\,715 \times 1{,}414 = 0{,}70\,297$.

$$\log \pi^{\sqrt{2}} = 0{,}70\,297 \quad \Longrightarrow \quad \pi^{\sqrt{2}} = 5{,}04\,625$$

Le calcul de $y = e^x \Longleftrightarrow \log y = x \log e$ est facilité, car il existe dans les tables de logarithmes, un tableau donnant $M = \log e = 0{,}43\,429$ et $\frac{1}{M} = \text{Log}\,10 = 2{,}30\,259$ ainsi que les produits de ces deux nombres par les multiplicateurs de 1 à 9. On les utilise pour effectuer la multiplication de $M = \log e$ par le nombre donné x.

EXEMPLE. — *Calcul de* $y = e^{2{,}476} \Longleftrightarrow \log y = M \times 2{,}476$

D'après la table :

$$\begin{aligned} M \times 2 &= 0{,}\ 86\ 859 \\ M \times 0{,}4 &= 0\ \ 17\ 371\ 8 \\ M \times 0{,}07 &= 0{,}\ 03\ 040\ 1 \\ M \times 0{,}006 &= 0{,}\ 00\ 260\ 6 \\ \hline \log y = M \times 2{,}476 &= 1{,}\ 07\ 531\ 5 \end{aligned}$$

$$\log y = 1{,}07\,531\,5 \quad \Longrightarrow \quad y = e^{2{,}476} = 11{,}8935.$$

FONCTIONS e^x ET e^{-x}

491. Formules de dérivation. — Puisque la fonction $y = e^x$ est la fonction réciproque de $x = \text{Log}\,y$, on en déduit que $y = e^x$ est une fonction dérivable de x.

Et en dérivant par rapport à x les deux membres de la relation : $\text{Log}\,y = x$ on obtient (n° 461) :

$$\text{Log}\,y = x \Longrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Longrightarrow y' = y = e^x.$$

Donc : $\boxed{y = e^x} \Longrightarrow \boxed{y' = e^x}$.

La fonction $y = e^x$ possède donc la propriété remarquable d'être en tout point égale à sa dérivée. Il en résulte que :

La fonction $y = e^x$ est indéfiniment dérivable et toutes ses dérivées successives sont égales à e^x.

$$\forall n \in \mathrm{N} \qquad y = e^x \Longrightarrow y = y' = y'' = \ldots = y^{(n)} = e^x.$$

Par suite (nº 341) lorsque $u(x)$ est une fonction dérivable de x :

$$\boxed{y = e^u} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = e^u.u'}\cdot$$

On voit ainsi que :

$$y = e^{ax+b} \Longrightarrow y' = ae^{ax+b},\ y'' = a^2\, e^{ax+b} \quad \ldots \quad y^{(n)} = a^n\, e^{ax+b}.$$

En particulier :

$$\boxed{y = e^{-x}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y' = -e^{-x}}\cdot$$

On voit alors que :

$$y = e^{-x} \Longrightarrow y = y'' = y^{\mathrm{IV}} = \ldots = y^{(2n)} = e^{-x}, \qquad y' = y''' = \ldots = y^{(2n+1)} = -e^{-x}.$$

492. Variations des fonctions e^x et e^{-x}. — La fonction $y = e^x$ admet pour dérivée $y' = e^x > 0$ quel que soit x.

D'autre part, la relation $x = \operatorname{Log} y$ montre que $x = 0 \Longrightarrow e^x = 1$.

$$x \longrightarrow -\infty \Longrightarrow y \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y \longrightarrow +\infty.$$

La fonction $z = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ admet pour dérivée $z' = -e^{-x} < 0$.

$$x = 0 \Longrightarrow z = 1; \quad x \longrightarrow -\infty \Longrightarrow z \longrightarrow +\infty; \quad x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow z \longrightarrow 0.$$

On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	1	$+$	
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
z'		$-$	-1	$-$	
z	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

493. Limites relatives à e^x et e^{-x}. — 1º ***Lorsque x tend vers $+\infty$, le rapport $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, tandis que le produit xe^{-x} tend vers zéro.***

Posons $e^x = u \Longleftrightarrow x = \operatorname{Log} u$. Lorsque $x \to +\infty$, il en est de même de u et par suite de e^x. Or le rapport $\dfrac{\operatorname{Log} u}{u}$ tend vers 0 (nº 465), donc :

$$\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \frac{e^x}{x} \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad xe^{-x} \longrightarrow 0.$$

2º ***Lorsque x tend vers $+\infty$, e^x croît plus vite que toute puissance de x tandis que e^{-x} décroît plus vite que toute puissance de $\dfrac{1}{x}$.***

Désignons par k un réel positif donné. En remplaçant x par $\frac{x}{k}$ dans $\frac{e^x}{x}$, on voit que $\frac{k\,e^{\frac{x}{k}}}{x}$ tend vers $+\infty$. Il en est donc de même de $\frac{e^{\frac{x}{k}}}{x}$ et de $\left(\frac{e^{\frac{x}{k}}}{x}\right)^k$ c'est-à-dire de $\frac{e^x}{x^k}$.

$$\forall k > 0 : \qquad \frac{e^x}{x^k} \longrightarrow +\infty.$$

Il en résulte que $\frac{x^k}{e^x} = x^k\, e^{-x}$ tend vers 0. Donc : $\frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} \longrightarrow 0.$

494. Graphes des fonctions e^x et e^{-x}. — Dans un repère orthonormé la courbe $y = e^x$ se déduit de la courbe $y = \text{Log}\, x$ dans la symétrie par rapport à la première bissectrice $y = x$ (n° 327).

La courbe $y = e^x$ admet donc Ox pour asymptote lorsque $x \to -\infty$ (fig. 148) et admet une branche parabolique de direction asymptotique Oy lorsque $x \to +\infty$. Comme $y'' = e^x > 0$, la courbe est concave du côté des y positifs. Elle coupe l'axe Oy au point A (0, 1) où la tangente admet pour coefficient directeur $+1$. La tangente au point E (1, e) a pour coefficient directeur e. Cette tangente est donc la droite OE.

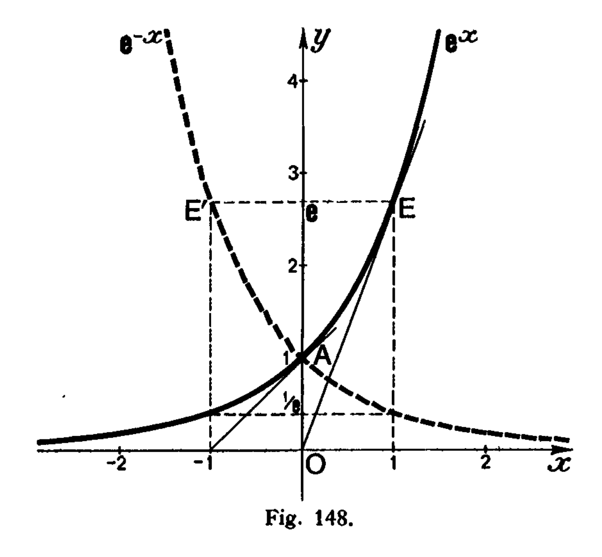


Fig. 148.

La courbe $y = e^{-x}$ (en pointillé sur la fig. 148) se déduit de la courbe $y = e^x$ dans la symétrie Oy car le point M d'abscisse x sur $y = e^x$ et le point M' d'abscisse $-x$ sur $y = e^{-x}$ ont même ordonnée e^x. La courbe $y = e^{-x}$ est donc asymptote à Ox lorsque $x \to +\infty$ et admet une branche parabolique de direction Oy lorsque x tend vers $-\infty$.

495. Remarque. — ***Quand x tend vers 0, le rapport $\frac{e^x - 1}{x}$ tend vers $+1$.***

Ce rapport qui s'écrit : $\frac{e^x - e^0}{x - 0}$ admet pour limite (n° 330), la dérivée de e^x au point $x = 0$, c'est-à-dire $e^0 = 1$.

FONCTION a^x

496. Dérivée de $y = a^x$. — Rappelons (nº 488) que $y = a^x \Longleftrightarrow \operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a$. soit : $y = e^{x \operatorname{Log} a}$

Donc : $$\boxed{a^x = e^{x \operatorname{Log} a}}$$

***Pour** $\alpha = \operatorname{Log} a$ **la fonction** a^x **est identique à la fonction** $e^{\alpha x}$.*

La dérivée de $e^{\alpha x}$ étant $\alpha e^{\alpha x}$, il en résulte que :

$$y = e^{x \operatorname{Log} a} \Longrightarrow y' = e^{x \operatorname{Log} a} . \operatorname{Log} a.$$

soit : $$\boxed{y = a^x} \Longrightarrow \boxed{y' = a^x \operatorname{Log} a}$$

Comme $a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$ est positif, il en résulte que y' est du signe de $\operatorname{Log} a$.

497. Variations de $y = a^x$. — **1er Cas :** $a > 1 \Longrightarrow \operatorname{Log} a > 0$. La dérivée y' est positive pour tout x et la fonction $y = a^x$ est croissante sur $]-\infty, +\infty[$. Lorsque $x \to +\infty$, $x \operatorname{Log} a \to +\infty$ et $y = e^{x \operatorname{Log} a}$ tend vers $+\infty$. Lorsque $x \to -\infty$, il en est de même de $x \operatorname{Log} a$ et y tend vers 0.

2e Cas : $0 < a < 1 \Longrightarrow \operatorname{Log} a < 0$. La dérivée y' est négative et la fonction $y = a^x$ est décroissante sur $]-\infty, +\infty[$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $x \operatorname{Log} a$ tend vers $-\infty$ et $y = e^{x \operatorname{Log} a}$ tend vers 0. Lorsque x tend vers $-\infty$, $x \operatorname{Log} a$ tend vers $+\infty$ et y tend vers $+\infty$.

$a > 1$ ou $\alpha = \operatorname{Log} a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	α	+	
y	0	↗	1	↗	$+\infty$

$0 < a < 1$ ou $\alpha = \operatorname{Log} a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	α	−	
y	$+\infty$	↘	1	↘	0

498. Courbes $y = a^x$. — Supposons tracée dans un repère orthonormé la courbe $y = e^x$ et considérons sur cette courbe le point $M(x, e^x)$. Si nous prenons sur la courbe $y = a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$ le point M′ d'abscisse $\frac{x}{\operatorname{Log} a}$, il a pour ordonnée $y = e^x$. Il en résulte que :

***La courbe** $y = a^x$ **se déduit de la courbe** $y = e^x$ **dans l'affinité orthogonale d'axe** Oy **et de rapport** $k = \frac{1}{\operatorname{Log} a}$.*

Remarquons que cette propriété n'est pas différente de la propriété nº 473, car les courbes $y = e^x$ et $y = a^x$ sont les courbes $x = \operatorname{Log} y$ et $x = \log_a y = k \operatorname{Log} y$. La courbe a même allure que la courbe $y = e^x$ pour $a > 1$ ou $\operatorname{Log} a > 0$, que la courbe e^{-x} pour $a < 1$

ou Log $a < 0$ (fig. 149). Elle est d'autant plus rapprochée des axes Ox et Oy que $\alpha = \text{Log}\, a$ est plus grand en valeur absolue. Elle passe toujours par le point A(0, 1) où sa tangente a pour coefficient directeur $\alpha = \text{Log}\, a$.

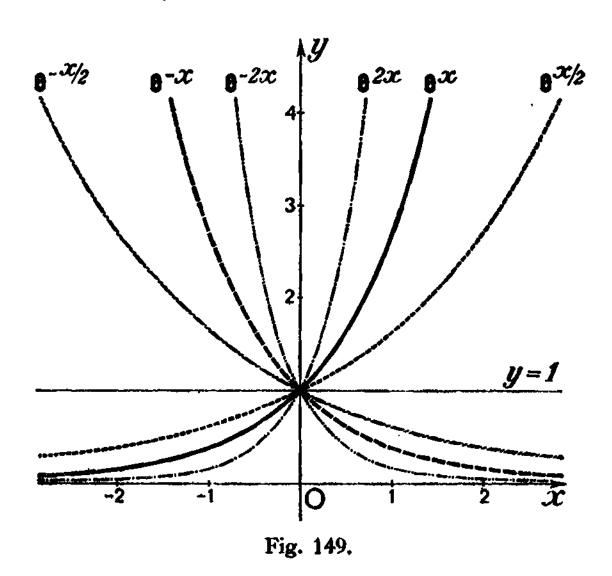


Fig. 149.

499. Courbes $y = e^{\alpha x}$. — La famille de courbes $y = a^x$ (fig. 149) n'est autre que la famille des courbes $y = e^{\alpha x}$ puisque $a^x = e^{\alpha x}$ pour $\alpha = \text{Log}\, a$. C'est pourquoi, de préférence à l'exponentielle a^x, on utilise l'exponentielle $e^{\alpha x}$.

La dérivée de $e^{\alpha x}$ étant $\alpha e^{\alpha x}$, la tangente à la courbe $y = e^{\alpha x}$ au point $M(x, e^{\alpha x})$ a pour équation :

$$Y - e^{\alpha x} = \alpha\, e^{\alpha x}(X - x) \iff Y = \alpha e^{\alpha x}\left[X - x + \frac{1}{\alpha}\right].$$

Cette tangente coupe Ox au point T pour $Y = 0$ dont l'abscisse est : $X_T = x - \frac{1}{\alpha}$, ce qui montre que $X_T - x = -\frac{1}{\alpha}$ est constant.

La sous-tangente, relative à Ox, à la courbe $y = e^{\alpha x}$ est constante.

La tangente passe par O pour $x = \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \alpha x = 1 \Longrightarrow y = e^{\alpha x} = e$.

Le point de contact de cette tangente avec la courbe se déplace donc sur la droite $y = e$ lorsque α varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque. — Il est assez facile d'écrire toute équation $y = \pm\, e^{\alpha x + \beta}$ ou $y = Ae^{\alpha x}$ sous la forme $y = \pm\, k\, e^{\frac{x - x_0}{k}}$. Le changement d'axes $x = x_0 + kX$, $y = \pm\, kY$ conduit alors à l'équation $Y = e^X$, ce qui montre que toutes les courbes exponentielles $y = \pm\, e^{\alpha x + \beta}$ sont semblables entre elles.

APPLICATIONS

500. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ lorsque m tend vers $\pm\infty$. — Nous avons vu (nº 468) que lorsque h tend vers 0, l'expression $\frac{\text{Log}(1+h)}{h}$ tend vers $+1$. Il en est donc de même de $\text{Log}(1+h)^{\frac{1}{h}}$. En posant $h=\frac{1}{m}$ on voit que lorsque m tend vers $\pm\infty$, $\text{Log}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers 1. Donc :

Lorsque m tend vers $\pm\infty$, l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers e.

En remplaçant h par $\frac{x}{m}$ on verrait de même que : $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{x}}$ tend vers e lorsque $m\longrightarrow\pm\infty$, donc que $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ tend vers e^x.

501. Théorème. — ***Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, le nombre e est la limite de la suite de terme général :***

$$U_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Considérons la fonction $\varphi(x)=\frac{Ax^{n+1}}{(n+1)!}+e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$ où la constante A est déterminée par la condition $\varphi(1)=\varphi(0)=1$.

La fonction $\varphi(x)$ est continue et dérivable sur $[0, 1]$. Sa dérivée $\varphi'(x)=\frac{x^n}{n!}[A-e^{-x}]$ s'annule d'après le théorème de Rolle (nº 362) pour une valeur c de x comprise entre 0 et 1, ce qui montre que $A=e^{-c}$. La relation $\varphi(1)=1$ donne alors :

$$\frac{e^{-c}}{(n+1)!}+e^{-1}U_n=1 \iff e=U_n+\frac{e^{1-c}}{(n+1)!}$$

Puisque $0<c<1 \Longrightarrow 0<1-c<1$, on voit que $e-U_n$ est positif et inférieur à $\frac{e}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite croissante U_n a donc pour limite e.

502. Application au calcul de e. — Si on pose $V_n=U_n+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}$, on voit que V_n est le terme général d'une suite décroissante, car $V_{n+1}-V_n=-\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)!}$, qui tend également vers e puisque V_n-U_n tend vers 0. Finalement :

$$\boxed{U_n < e < U_n+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!}}$$

Ainsi : $U_{10} = 2{,}718\,281\,801\,1\ldots$ par défaut.

et $\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{10!} = 0{,}000\,000\,027\,6$ par excès.

Donc : $2{,}718\,281\,801{,}1 < e < 2{,}718\,281\,828\,8$

et par suite : $e = 2{,}718\,281\,8\ldots$ avec 7 décimales exactes.

503. Primitives relatives aux fonctions $\operatorname{Log} x$ **et** e^x**.**

FONCTIONS	PRIMITIVES	FONCTIONS	PRIMITIVES
e^x	$e^x + C$	$e^u u'$	$e^u + C$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	a^x	$\frac{a^x}{\operatorname{Log} a} + C$
$\frac{1}{x}$	$\operatorname{Log}\lvert x\rvert + C$	$\frac{u'}{u}$	$\operatorname{Log}\lvert u\rvert + C$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\operatorname{Log}\lvert ax+b\rvert + C$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\operatorname{Log}\lvert x\rvert$	$x\operatorname{Log}\lvert x\rvert - x + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\operatorname{Log}\lvert x+\sqrt{x^2+h}\rvert + C$
$\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert + C$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{Log}\lvert\cos x\rvert + C$
$\frac{1}{\sin x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\frac{1}{\cos x}$	$\operatorname{Log}\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

Ce tableau se vérifie par dérivation. Voici comment on peut retrouver quelques résultats :

1° $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x+a} \Longrightarrow A(x+a) + B(x-a) \equiv 1 \Longrightarrow A + B = 0$

et $A - B = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow A = -B = \dfrac{1}{2a}$.

Il en résulte que : $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right]$ est la dérivée de

$$\frac{1}{2a}[\operatorname{Log}\lvert x-a\rvert - \operatorname{Log}\lvert x+a\rvert = \frac{1}{2a}\operatorname{Log}\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert.$$

2° $\operatorname{Log}\lvert x\rvert$ est un des termes de la dérivée de $z = x\operatorname{Log}\lvert x\rvert$. En effet :

$$z = x\operatorname{Log}\lvert x\rvert \Longrightarrow z' = \operatorname{Log}\lvert x\rvert + \frac{x}{x} = \operatorname{Log}\lvert x\rvert + 1.$$

Donc : $\operatorname{Log}\lvert x\rvert = z' - 1 = (z - x)'$ est la dérivée de : $x\operatorname{Log}\lvert x\rvert - x$.

3° Posons $z = x + \sqrt{x^2+h} \Longrightarrow z' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h}} = \dfrac{\sqrt{x^2+h}+x}{\sqrt{x^2+h}} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+h}}$.

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+h}} = \dfrac{z'}{z}$ est la dérivée de $\operatorname{Log}\lvert z\rvert = \operatorname{Log}\lvert x + \sqrt{x^2+h}\rvert$.

4° $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x}$ est donc la dérivée de $\operatorname{Log}\lvert\sin x\rvert$.

5° $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$. Or $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$ est la dérivée de $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Donc: $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$ est la dérivée de Log $\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$. Par suite $\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\cos x}$ est la dérivée de Log $\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

REMARQUE. — On peut écrire les primitives ci-dessus sous forme d'intégrales. Ainsi :

$$\int e^u\,du = e^u + C. \qquad \int\frac{du}{u} = \operatorname{Log}|u| + C. \qquad \int\operatorname{cotg} x\,dx = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C. \qquad \int\frac{dx}{ax+e} = \frac{1}{a}\operatorname{Log}|ax+b| + C. \qquad \int\frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Log}|\sin x| + C.$$

504. Applications.

1° *Primitives de* $(2x+3)e^{\alpha x}$. Cherchons la dérivée de $z = (Ax+B)e^{\alpha x}$.

Nous obtenons : $z' = e^{\alpha x}[\alpha(Ax+B)+A]$. Il faut donc : $\alpha A = 2$ et $\alpha B + A = 3$, ce qui donne $A = \dfrac{2}{\alpha}$ et $B = \dfrac{3}{\alpha} - \dfrac{2}{\alpha^2}$. Donc $(2x+3)e^{\alpha x}$ admet pour primitives : $\left(\dfrac{2x+3}{\alpha} - \dfrac{2}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x} + C$.

2° *Primitives de* $e^x\,[3\cos x + \sin x]$. Cherchons la dérivée de $z = e^x[a\cos x + b\sin x]$.

Nous obtenons : $z' = e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x]$. Il faut donc : $a+b = 3$, $b-a = 1$, soit $a = 1$, $b = 2$. Par suite $e^x\,[3\cos x + \sin x]$ admet pour primitives $e^x\,[\cos x + 2\sin x] + C$.

3° *Primitives de* $\dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$. Décomposons cette fraction rationnelle sous la forme : $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-1}$. Il faut : $A(x-1) + B(x-2) \equiv x$, ce qui implique : $A + B = 1$ et $A + 2B = 0$ donc $B = -1$ et $A = 2$.

La fonction $\dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$ est donc la dérivée de $2\operatorname{Log}|x-2| - \operatorname{Log}|x-1|$ et admet pour primitives : $\operatorname{Log}\dfrac{(x-2)^2}{|x-1|} + C$.

4° *Primitives de* $\dfrac{4x-1}{x^3-3x+2} = \dfrac{4x-1}{(x-1)^2(x+2)}$. On voit de même que cette fonction se décompose sous la forme : $\dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{x+2}$ si l'on a :

$A(x+2) + B(x^2+x-2) + C(x^2-2x+1) \equiv 4x-1 \implies A = B = 1,\ C = -1.$

Donc la fonction : $\dfrac{4x-1}{x^3-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$

est la dérivée de $-\dfrac{1}{x-1} + \operatorname{Log}|x-1| - \operatorname{Log}|x+2|$ et admet pour primitives :

$$\operatorname{Log}\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

EXERCICES

— Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes en commençant s'il est nécessaire par étudier $z = \text{Log}\,|y|$.

999. $y = x\,e^{x}$

1000. $y = x\,e^{-x}$

1001. $y = (x - 1)\,e^{-x}$.

1002. $y = e^{x^2}$

1003. $y = e^{-x^2}$

1004. $y = x\,e^{-x^2}$.

1005. $y = e^{\frac{1}{x}}$

1006. $y = x\,e^{\frac{1}{x}}$

1007. $y = (x - 1)\,e^{\frac{1}{x}}$

1008. $y = x\,e^{x} - (x + 1)$

1009. $y = (x - 2)\,e^{x} - 2$

1010. $y = (x^2 - x)\,e^{-x}$.

1011. $y = e^{x^2-1}$

1012. $y = e^{\frac{1+x}{1-x}}$

1013. $y = e^{\frac{x-5}{x+1}}$

1014. $y = |x|^{x}$

1015. $y = |x|^{\frac{1}{x}}$

1016. $y = |1 + x|^{\frac{1}{x}}$

1017. $y = e^{-x}\cos x$

1018. $y = e^{-x}\sin 2\pi x$

1019. $y = e^{-|x|}\cos \pi x$.

— Résoudre à l'aide des tables les équations en x suivantes :

1020. $10^{2x} - 3.10^{x} + 2 = 0$

1021. $10^{6x} - 3.10^{3x} - 4 = 0$.

1022. $e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0$

1023. $e^{8x} - 5\,e^{4x} + 4 = 0$.

1024. $5\,e^{4x} - 13\,e^{2x} - 6 = 0$

1025. $4\,e^{-3x} - 5\,e^{-x} + e^{x} = 0$.

1026. $5^{3x+4} - 7^{2x-3} = 0$

1027. $8.25^{3x} - 35.5^{3x} + 27 = 0$.

1028. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des racines de l'équation :

$$e^{2x} - 4\,me^{x} + 2\,(m + 1) = 0.$$

Résoudre cette équation pour $m = 1$.

1029. Montrer que pour $a < 0$, l'équation $e^{x} = ax + b$ admet une racine et une seule. En utilisant la courbe $y = e^{x}$ et la droite $y = ax + b$ discuter suivant les valeurs de b la position de cette racine par rapport à 0 et 1.

1030. 1° Pour $a > 0$, déterminer l'équation de la tangente de coefficient directeur a à la courbe $y = e^{x}$.

2° En déduire suivant les valeurs de b le nombre des racines de l'équation $e^{x} = ax + b$. Discuter pour $a = 2$, la position de ces racines par rapport à 0 et 1.

1031. Calculer la valeur de e avec 10 décimales exactes. En reprenant les notations du n° 502, on calculera, par défaut, avec 12 décimales U_6, puis $\frac{1}{7!}, \frac{1}{8!} \cdots \frac{1}{14!}$ et $\frac{1}{14.14!}$ et on déterminera par défaut U_{14} et, par excès, V_{14}.

1032. On désigne par $P(x)$ un polynôme de degré n et par P', P'' ... $P^{(n)}$ ses dérivées non nulles Calculer les dérivées de $e^{x}(P - P' + P'' - P''' \ldots)$ et de $e^{-x}(P + P' + P'' + P''' \ldots)$. En déduire les primitives des fonctions $e^{x}\,P(x)$ et $e^{-x}\,P(x)$.

1033. Démontrer que pour tout polynôme $P(x)$ et pour tout nombre réel non nul a, la dérivée de : $Y = \frac{e^{ax}}{a}\left[P - \frac{P'}{a} + \frac{P''}{a^2} - \frac{P'''}{a^3} \cdots\right]$ est égale à $e^{ax}P(x)$.

En déduire les primitives de $y = Ae^{ax}P(x)$ et de $z = e^{ax+b}P(x)$.

— Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour calculer les primitives des fonctions :

1034. $y = xe^x$; $y = 4(x-1)e^{2x}$; $y = (2x^2+3x-4)e^{-x}$.

1035. $y = x^2e^x$; $y = (x^2-3x+1)e^{x+1}$; $y = (x^3-3x)e^{-x}$.

1036. $y = x^4e^x$; $y = 16(x^3-2x^2)e^{x-1}$, $y = (x^4-3x^2)e^{-3x+1}$.

1037. 1° Calculer la dérivée de $Y = e^{\alpha x}[a\cos\beta x + b\sin\beta x]$.

2° En déduire que la fonction $y = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + \beta\sin\beta x]$ admet pour primitives :

$$Y = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}[(A\alpha - B\beta)\cos\beta x + (A\beta + B\alpha)\sin\beta x] + C.$$

— Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1038. $\frac{1}{x-4}$. **1039.** $\frac{1}{2x+3}$. **1040.** $\frac{1}{x^2-4}$.

1041. $\frac{2x}{x^2+1}$. **1042.** $\frac{2x+3}{x^2+3x-4}$. **1043.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1044. $\frac{\text{Log}\,|x|}{x}$. **1045.** $\frac{\text{Log}\,|x+1|}{x+1}$. **1046.** $\frac{1}{x\,\text{Log}^2 x}$.

1047. $x\,\text{Log}\,|x|$ **1048.** $(3x+4)\,\text{Log}\,|x|$ **1049.** $(4x^3-2x)\,\text{Log}\,|x|$.

1050. $\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ **1051.** $\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$. **1052.** $\frac{\text{Log}\,|x+\sqrt{x^2+1}|}{\sqrt{x^2+1}}$.

1053. $\frac{\cos x}{\sin x + 3}$. **1054.** $\frac{\sin x}{2-\cos x}$. **1055.** $\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$.

1056. $e^{\sin x}\cos x$. **1057.** $\frac{e^{\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}$. **1058.** $e^{1-\cos x}\sin x$.

1059. Sachant que m désigne un nombre réel quelconque, étudier suivant les valeurs de m la forme des courbes (C) : $y = xe^{\frac{m}{1-x}}$.

Construire les courbes (C) pour $m = -2$, $m = 0$, $m = 2$ et $m = 4$. Construire le lieu des points des diverses courbes (C) où $y' = 0$.

1060. 1° Étudier les variations de la fonction $y = (1-x)e^x$.

2° Construire le graphe de la fonction dans un repère orthonormé. Calculer l'aire du domaine compris entre cette courbe et les axes Ox et Oy.

1061. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \frac{e^x-2}{e^x-2x}$. Représentation dans un repère orthonormé.

2° Déterminer l'aire S du domaine compris entre la courbe, l'axe Ox, la droite $x = 1$ et la droite $x = \alpha > 1$. Cette aire tend-elle vers une limite lorsque la valeur α tend vers $+\infty$?

1062. Étudier les variations de la fonction $y = \text{Log}|1+x|$. Démontrer que la courbe représentative (C) admet un axe de symétrie. Déterminer les tangentes à cette courbe en ses points de rencontre avec l'axe des x. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la fonction y prend la valeur 1 et construire les points correspondants de (C) (on prendra $e = 2{,}7$). Tracer enfin la courbe (C).

Démontrer que cette courbe permet de résoudre graphiquement l'équation $e^{-x} = \frac{1}{(1+x)^2}$.

1063. 1° Étudier la variation de la fonction $x = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$, e étant la base des logarithmes népériens (on rappelle que $\log e = 0{,}43\,429$).

Tracer la courbe représentative (C) et déterminer l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des abscisses. Calculer sa valeur approchée à 0,01 près.

2° Déterminer les abscisses des points de la courbe (C) où le coefficient directeur de la tangente vaût 2. Montrer que le résultat remarquable trouvé peut se généraliser pour un coefficient directeur $k > 0$. Prouver que la courbe (C) admet un centre de symétrie, dont on trouvera les coordonnées.

1064. On considère la suite u_n définie par $u_0 = \alpha$, $u_1 = (\alpha + \beta)\,a$ et la relation de técurrence

$$u_n = 2\,a\,u_{n-1} - a^2 u_{n-2}.$$

1° Calculer les premiers tetmes jusqu'à u_{10}.

2° On pose $u_n = a^n v_n$. Montrer que v_n est le terme général d'une progression arithmétique. Déterminer v_n puis u_n en fonction α, β, a et n.

3° Montrer que la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ vérifie la telation :

$$S_n - (u_0 + u_1) = 2\,a\,(S_n - u_0 - u_n) - a^2\,(S_n - u_n - u_{n-1}).$$

Calculer S_n et sa limite pour $n \to \infty$ lorsqu'elle existe.

1065. 1° Rappeler (sans démonsttation) quelle est la limite de $\frac{\operatorname{Log} x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire la limite vers laquelle tend $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers l'infini.

2° Étudier les variations de la fonction suivante : $y = \frac{e^x}{x + 1}$. Construire la courbe représentative (C).

3° A l'aide de cette courbe, étudier combien, suivant les valeurs du paramètre m, l'équation

$$e^x - m\,(x + 1) = 0$$

a de racines et quelles positions elles occupent par rapport aux nombres -1 et e.

1066. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \left(\frac{2x}{x - 1}\right)^2$. Construire la courbe représentative (C), dans un repere orthonormé xOy.

2° Montrer que la fonction y peut être mise sous la forme $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x - 1} + C$, A, B, C étant des coefficients à déterminer.

3° Application au calcul de l'aire du domaine limité par la courbe (C), son asymptote parallèle à Ox et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

1067. 1° Étudier les variations de la fonction suivante : $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2}$. Construire la courbe représentative, (C).

2° Montrer que la fonction considérée peut être mise sous la forme suivante :

$$y = A + \frac{B}{1 - x} + \frac{C}{2 - x}.$$

les lettres A, B, C désignant des coefficients, que l'on déterminera. Application à l'évaluation de l'aire du domaine limité par l'axe des x, la courbe (C), l'axe des y et la droite d'équation $x = 2 - \sqrt{2}$.

1068. 1° Étudier la fonction : $y = x - 1 + \frac{4}{x}$.

Tracer la courbe représentative, (C), en axes rectangulaires, en prenant le centimètre comme unité de longueur sur les dèux axes. Tracer sur la même figure le graphique de la fonction $y = x - 1$.

2° Montrer que (C) admet un centre de symétrie.

3° Trouver l'aire limitée par la droite d'équation $x = 1$, l'axe des abscisses, $x'x$, la droite d'équation $x = d$ $(d > 1)$ et la courbe (C).

1069. Sur la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{x}$ on prend les points M et M', d'abscisses respectives $\overline{OH} = 1 + u$ et $\overline{OH'} = 1 - u$, où le paramètre u reste compris entre 0 et 1.

1° Comment sont situées, sur l'axe Ox, les projections, H et H', de M et M' ? Évaluer en fonction de u l'aire du quadrilatère mixtiligne H'HMM'.

2° Déterminer u pour que cette aire ait une valeur donnée m et montrer que

$$u = \frac{e^m - 1}{e^m + 1} \qquad (m \text{ positif}).$$

3° m étant donné, montrer qu'on peut lui associer un angle φ, compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, tel que $e^m = \operatorname{tg} \varphi$, et que, dans ces conditions, $u = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$.

4° Achever le calcul numérique de φ et de u lorsque $m = 2$. Vérifier graphiquement le résultat obtenu.

1070. 1° Construire la courbe $y = \frac{1}{x}$ entre les abscisses 0 et 10, l'unité de longueur étant le centimètre, et calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe Ox et les droites $x = 1$ et $x = 10$.

2° On considère une suite illimitée d'abscisses positives croissantes :

$$\dots\ x_{-n}\ \dots\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0 = 1,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

Seule x_0 est donnée, égale à l'unité. Soit a la valeur de l'aire comprise entre les droites $x = 1$, $x = x_1$, l'axe Ox et la courbe $y = \frac{1}{x}$. On demande de calculer tous les éléments de la suite x_n en fonction de a, lorsque les aires comprises entre les abscisses consécutives x_{i-1} et x_i sont toutes équivalentes à a (quel que soit l'entier i). Que peut-on dire de la suite x_n ?

3° On se propose de partager l'aire calculée au § 1° en dix aires équivalentes, par des parallèles à l'axe des ordonnées Oy, d'abscisses $x_1, x_2, \dots, x_9$. Calculer ces abscisses, en utilisant une table de logarithmes à cinq décimales.

4° Quelles seraient les abscisses $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-10}$ correspondant à la même valeur de a ? Les comparer aux précédentes.

1071. 1° Étudier la forme de la courbe d'équation : $y = (x^2 - 2x + a)\, e^x$ suivant les valeurs du paramètre a.

2° Déterminer le lieu des points où la courbe admet une tangente parallèle à Ox.

1072. On considère pour $x \geqslant 0$ la courbe C_m d'équation $y = x^m e^{-x}$ avec $m \in \mathbb{N}$.

1° Construire d'abord la courbe C_1 et montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.

2° Démontrer que pour $m > 1$, la courbe C_m admet deux points d'inflexion, autres que O, dont on précisera les projections sur Ox par rapport à la projection du sommet.

3° Construire sur le même graphique que C_1, les courbes C_2, C_3 et C_4.

1073. On considère la fonction $y = 2\, me^x - e^{2x}$ où m est un paramètre réel.

1° Étudier, selon le signe de m, le sens de variation de la fonction. Dresser les tableaux de variation correspondants et dessiner l'allure de la courbe représentative C_m dans chacun de ces cas.

2° Pour m positif, quelle relation indépendante de m lie la valeur maximale de y à la valeur de x correspondante ? Construire, sur un nouveau graphique, la courbe (Γ) décrite par le point S_m où C_m admet une tangente parallèle à Ox lorsque m croît de 0 à $+\infty$. Dessiner sur ce graphique les courbes $C_{\frac{1}{2}}$, C_1, et les courbes C', C'' et C''' correspondant à $m = m'$, m'' ou m''' tels que :

$$0 < m' < \frac{1}{2} < m'' < 1 < m'''.$$

3° Soient m_1 et m_2 deux valeurs données de m telles que $0 < m_1 < m_2$; C_{m1} et C_{m2} les courbes associées. Évaluer l'aire A (m_1, m_2) du domaine limité par ces courbes d'une part et par l'axe Ox et l'arc $S_{m1} S_{m2}$ de (Γ) d'autre part. Limite de A (m_1, m_2) lorsque m_1 tend vers 0 et $m_2 = m$? En déduire que l'aire A $(0, m)$ est proportionnelle à l'ordonnée de S_m.

1074. On considère la fonction : $y = e^{-x^2}$.

1° Démontrer que $y' + 2xy = 0$, puis par récurrence que :

$$y^{(n)} + 2xy^{(n-1)} + 2(n-1)y^{(n-2)} = 0. \quad (1)$$

2° En déduire que $y^{(n)} = e^{-x^2} P_n(x)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n en x de la parité de n et commençant par $(-2)^n x^n$. Établir que : $P_n + 2xP_{n-1} - P'_{n-1} = 0$. (2)

3° Des relations (1) et (2) déduire les relations :

$$P_n + 2xP_{n-1} + 2(n-1)P_{n-2} = 0; \qquad P'_n = -2nP_{n-1}$$

et

$$P''_n - 2xP'_n + 2nP_n = 0. \qquad \text{(Polynômes d'Hermite).}$$

1075. On construit dans un repère orthonormé les courbes (C) et (C′) d'équations respectives $y = e^{x-1}$ et $y = e^{-x-1}$. Soient M et M′ le point d'abscisse $a + 1$ sur la première et le point d'abscisse $a - 1$ sur la seconde (a paramètre variable).

1° Équations des tangentes en M et M′ aux courbes (C) et (C′). Montrer qu'elles sont perpendiculaires et qu'elles se coupent au point A d'abscisse a sur Ox. Démontrer que la droite MM′ est la tangente en I, au lieu (L) du milieu I de MM′. Équation de ce lieu (L) ? Construire ce lieu.

2° Équations des lieux (Γ) et (Γ′) des projections N et N′ de M et M′ sur la droite $x = a$. Montrer que les tangentes en N et N′ à (Γ) et (Γ′) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent en P sur la droite MM′. Montrer que P est la projection de A sur MM′ et que la longueur PA est constante.

3° On pose $a = \text{Log}\left(\text{tg}\,\frac{t}{2}\right)$ et on suppose que t désigne le temps. Trouver en fonction de t les coordonnées de P et construire sa trajectoire (T). Montrer que le vecteur-vitesse du point P est porté par la droite PH et que la normale en P à (T) est la droite MM′.

1076. On considère la famille des fonctions telles que : $y = \text{Log}\,|e^x - m|$.

1° En distinguant selon les valeurs du paramètre m, donner les intervalles de définition de ces fonctions et étudier leurs variations.

2° Dans un repère orthonormé xOy, construire les courbes représentatives C_m. Préciser les asymptotes. Construire d'abord C_1 et C_{-1} et montrer qu'il existe une symétrie conservant l'ensemble (C_1, C_{-1}). Montrer que pour $m = e^\alpha$, le couple (C_m, C_{-m}) se déduit par translation du couple (C_1, C_{-1}).

3° On choisit deux courbes C_m et C_p avec $0 < m < p$ et on se donne $x_0 > \text{Log}\,p$. On prend alternativement sur C_p et C_m les points successifs : $P_0(x_0; y_0)$, $M_0(x_0; y_1 > y_0)$, $P_1(x_1 > x_0; y_1)$, $M_1(x_1; y_2 > y_1)$ ... $M_{n-1}(x_{n-1}; y_n > y_{n-1})$ et $P_n(x_n > x_{n-1}; y_n)$ parcourant ainsi un trajet en escalier. Évaluer l'abscisse x_n de P_n. Vers quelle limite tend la différence $x_n - \text{Log}\,n$ lorsque n tend vers l'infini ?

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

505. Définitions. — 1° ***On appelle équation différentielle toute relation entre une variable, une fonction inconnue de cette variable et certaines de ses dérivées par rapport à cette variable.***

Une équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$ est du *premier ordre,* car elle contient la seule dérivée y'; une équation de la forme $F(x, y, y', y'') = 0$ est dite du second ordre car elle contient y''...

2° *On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ telle que, pour toute valeur de x compatible avec l'existence de cette fonction, $x, f(x)$ et ses dérivées par rapport à x vérifient l'équation donnée.*

Intégrer une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.

506. Equation $y' = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme en x.

EXEMPLE : $y' = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 5$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + A$$

Plus généralement : $y' = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

$$\Longrightarrow y = \frac{a_m}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_{m-1}}{m} x^m + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + A$$

Si $P(x)$ est de degré m, la solution de l'équation différentielle $y' = P(x)$ est un polynôme de degré $m + 1$ dépendant d'une constante arbitraire A.

507. Equation $y'' = P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme en x.

EXEMPLE : $y'' = 2x^3 + 6x^2 - 3x + 5$

$$\Longrightarrow y' = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3x^2}{2} + 5x + A \Longrightarrow y = \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{2}x^2 + Ax + B$$

Plus généralement :

$$y'' = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{a_m}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_{m-1}}{m} x^m + \dots \quad + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + A.$$

$$\Longrightarrow y = \frac{a_m}{(m+1)(m+2)} x^{m+2} + \frac{a_{m-1}}{m(m+1)} x^{m+1} + \dots + \frac{a_1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{a_0}{1 \cdot 2} x^2 + Ax + B$$

Si $P(x)$ *est de degré* m *la solution de l'équation différentielle* $y'' = P(x)$ *est un polynôme de degré* $m + 2$ *dépendant de deux constantes arbitraires* A *et* B.

508. Équation différentielle : $y' = ay$. — Le coefficient a étant un nombre réel donné, il s'agit de trouver les fonctions $y = f(x)$ telles que : $\frac{y'}{y} = a$.

Or $\frac{y'}{y}$ est la dérivée de $\text{Log}\,|y|$ et a la dérivée de ax, donc :

$$\text{Log}\,|y| = ax + k \quad \Longrightarrow \quad |y| = e^{ax+k} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm e^k . e^{ax}.$$

La constante k étant arbitraire, on voit que $+ e^k$ ou $- e^k$ désigne un nombre réel non nul arbitraire C. Soit finalement :

$$\boxed{y' = ay} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = Ce^{ax}}$$

REMARQUE. — On pouvait remarquer que $y = e^{ax}$ est une solution de $y' = ay$ et poser $y = ze^{ax} \Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} + a$ ce qui donne $\frac{z'}{z} = 0$ ou $z' = 0$ et $z = C$.

Donc : $y = Ce^{ax}$.

509. Théorème. — ***Lorsque deux fonctions*** y ***et*** z ***de la variable*** x ***ont même dérivée logarithmique, leur rapport est constant.***

Si $\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$, la dérivée de $\text{Log}\left|\frac{y}{z}\right| = \text{Log}\,|y| - \text{Log}\,|z|$ est égale à : $\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} = 0$.

C'est donc que $\text{Log}\left|\frac{y}{z}\right|$ est constant et par suite : $\frac{y}{z} = C$ ou $y = Cz$.

$$\boxed{\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = Cz}.$$

Il en résulte que toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Longrightarrow \quad y = Cf(x).$$

EXEMPLES. — 1° $xy' - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = Cx.$

2° $y' \sin x - y \cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} \quad \Longrightarrow \quad y = C \sin x.$

510. Équation $y'' + \omega^2 y = 0$. — Le nombre ω étant une constante réelle, il s'agit de déterminer l'ensemble des fonctions $y = f(x)$ satisfaisant à cette relation :

Toute fonction $y = f(x)$ ***solution de l'équation*** $y'' + \omega^2 y = 0$ ***est de la forme*** $y = \text{A} \cos \omega x + \text{B} \sin \omega x$ ***où*** A ***et*** B ***sont deux constantes arbitraires.***

1° On vérifie que $y = \text{A} \cos \omega x + \text{B} \sin \omega x \Longrightarrow y' = -\omega \text{A} \sin \omega x + \omega \text{B} \cos \omega x$ et $y'' = -\omega^2 \text{A} \cos \omega x - \omega^2 \text{B} \sin \omega x = -\omega^2 y \Longrightarrow y'' + \omega^2 y = 0$.

2° La réciproque qui pourra être admise peut s'établir en posant $y = z \cos \omega x$.

On obtient : $y' = z' \cos \omega x - \omega z \sin \omega x$ et $y'' = z'' \cos \omega x - 2\omega z' \sin \omega x - \omega^2 z \cos \omega x$.
La relation $y'' + \omega^2 y = 0$ devient : $z'' \cos \omega x - 2\omega z' \sin \omega x = 0$ ce qui entraîne :

$$z'' \cos^2 \omega x - 2\omega z' \cos \omega x \sin \omega x = 0 \Longrightarrow z' \cos^2 \omega x = \text{C}.$$

Soit $z' = \dfrac{\text{C}}{\cos^2 \omega x} = \dfrac{\text{C}}{\omega} (\text{tg}\, \omega x)'$ d'où, en posant $\dfrac{\text{C}}{\omega} = \text{B}$:

$$z = \text{B} \,\text{tg}\, \omega x + \text{A} \Longrightarrow y = \text{B} \sin \omega x + \text{A} \cos \omega x.$$

Ainsi :
$$y'' + y = 0 \Longleftrightarrow y = \text{A} \cos x + \text{B} \sin x$$
$$y'' + 9y = 0 \Longleftrightarrow y = \text{A} \cos 3x + \text{B} \sin 3x$$
$$4y'' + y = 0 \Longleftrightarrow y = \text{A} \cos \frac{x}{2} + \text{B} \sin \frac{x}{2}.$$

511. Remarques. — 1° La solution générale de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ peut s'écrire : $y = \lambda \cos (\omega x + \varphi)$ ou $y = \lambda \sin (\omega x + \varphi)$ en désignant par λ et φ deux constantes arbitraires.

2° Pour $x = 0$, la solution $y = \text{A} \cos \omega x + \text{B} \sin \omega x$ prend la valeur $y_0 = \text{A}$ et sa dérivée $y' = -\omega \text{A} \sin \omega x + \omega \text{B} \cos \omega x$ prend la valeur $y'_0 = \omega \text{B}$. Donc on peut écrire : $y = y_0 \cos \omega x + \dfrac{y'_0}{\omega} \sin \omega x$. Ceci montre qu'il existe une solution unique admettant pour $x = 0$ des valeurs données y_0 et y'_0.

FONCTIONS VECTORIELLES

512. Définition. — ***On dit qu'un vecteur*** $\vec{\text{V}}$ ***est fonction d'un paramètre variable*** t ***lorsque ses composantes scalaires dans un repère donné sont des fonctions de la variable*** t.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère $Oxyz$ et si X, Y, Z, sont des fonctions X(t), Y(t), Z(t) définies sur le segment $[a, b]$, le vecteur $\vec{\text{V}}(\text{X}, \text{Y}, \text{Z})$ est une fonction vectorielle de t sur $[a, b]$. On écrit :

$$\vec{\text{V}} = \vec{\text{V}}(t) = \text{X}(t)\,\vec{i} + \text{Y}(t)\,\vec{j} + \text{Z}(t)\,\vec{k}.$$

Si dans le repère Oxyz (fig. 150) on construit $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$, le point M décrit lorsque t varie sur $[a, b]$ une courbe (C) appelée indicatrice de la fonction vectorielle $\vec{V}(t)$.

513. Limites vectorielles. — 1° *Dire que* $\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{0}$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$ *signifie que le module* $|\vec{V}(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les composantes X(t), Y(t) et Z(t) tendent vers 0 lorsque t tend vers t_0. En effet dans un repère Oxyz orthonormé :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \Longrightarrow \quad |X| \leqslant |\vec{V}|;\ |Y| \leqslant |\vec{V}|;\ |Z| \leqslant |\vec{V}|$$

Donc : $|\vec{V}| \longrightarrow \vec{0} \Longrightarrow X \longrightarrow 0; \quad Y \longrightarrow 0; \quad Z \longrightarrow 0.$

Réciproquement si X, Y, Z, tendent simultanément vers 0, il en est de même de $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = |\vec{V}|$, donc $\vec{V} \longrightarrow \vec{0}$.

Nous admettrons qu'il en est de même dans un repère quelconque.

2° *Dire que le vecteur* $\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)$ *lorsque* $t \longrightarrow t_0$ *signifie que la différence* $\vec{V}(t) - \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow \vec{0}$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les différences X(t) $- \alpha$, Y(t) $- \beta$ et Z(t) $- \gamma$ tendent simultanément vers 0, lorsque $t \longrightarrow t_0$. Donc :

$$\boxed{\vec{V}(t) \longrightarrow \vec{U}(\alpha, \beta, \gamma)} \iff \boxed{X(t) \longrightarrow \alpha, \quad Y(t) \longrightarrow \beta, \quad Z(t) \longrightarrow \gamma.}$$

3° *Si lorsque* $t \longrightarrow t_0$, *le vecteur* V(t) *tend vers* V(t_0), *on dit que la fonction vectorielle* V(t) *est continue pour* $t = t_0$. On dit qu'elle est continue sur le segment $[a, b]$ si :

$$\forall\, t_0 \in [a, b] : t \longrightarrow t_0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{V}(t) \longrightarrow \vec{V}(t_0).$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que X(t), Y(t), Z(t) soient des fonctions continues de t sur $[a, b]$.

514. Dérivée vectorielle. — ***On appelle dérivée de la fonction vectorielle*** $\vec{V}(t)$, ***pour la valeur*** t_0 ***du paramètre, la limite, lorsqu'elle existe, du vecteur*** $\dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0}$ ***lorsque*** t ***tend vers*** t_0.

Cette limite est désignée par $\vec{V}'(t_0)$ et on écrit indifféremment :

$$\vec{V}'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\vec{V}(t_0 + h) - V(t_0)}{h}. \qquad (1)$$

Or les relations : $\vec{V}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$

et : $$\vec{V}(t_0) = X(t_0)\vec{i} + Y(t_0)\vec{j} + Z(t_0)\vec{k}$$ donnent :

$$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = [X(t) - X(t_0)]\vec{i} + [Y(t) - Y(t_0)]\vec{j} + [Z(t) - Z(t_0)]\vec{k}$$

Soit : $$\overrightarrow{\Delta V} = \Delta X.\vec{i} + \Delta Y.\vec{j} + \Delta Z.\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta Y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta Z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Pour que le vecteur $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ admette une limite, lorsque $t \longrightarrow t_0$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\frac{\Delta X}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta Z}{\Delta t}$, c'est-à-dire que les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ soient dérivables pour $t = t_0$. Dans ce cas $\vec{V}'(t_0)$ existe et on obtient :

$$\vec{V}'(t_0) = X'(t_0)\vec{i} + Y'(t_0)\vec{j} + Z'(t_0)\vec{k}. \tag{2}$$

Si cette dérivée $\vec{V}'(t_0)$ existe pour toute valeur t_0 du segment $[a, b]$ on dit que $\vec{V}(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et admet $\vec{V}'(t)$ pour dérivée :

515. Théorème. — ***Si les composantes scalaires d'une fonction vectorielle*** $\vec{V}(t)$ ***sont dérivables sur*** $[a, b]$, ***il en est de même de*** $\vec{V}(t)$ ***et les composantes de sa dérivée*** $\vec{V}'(t)$ ***sont les dérivées des composantes de*** $\vec{V}(t)$.

En remplaçant t_0 par t dans la relation (2) ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\vec{V}'(t) = X'(t)\vec{i} + Y'(t)\vec{j} + Z'(t)\vec{k}} \tag{3}$$

Donc : $\vec{V}(t) = \vec{V}(X, Y, Z) \implies \vec{V}'(t) = \vec{V}'(X', Y', Z')$. (4)

1° Si les fonctions $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, ces fonctions sont continues sur $[a, b]$ et il en est de même de la fonction $\vec{V}(t)$ car : $\forall t_0 \in [a, b]$:

$$t \longrightarrow t_0 \implies X(t) \longrightarrow X(t_0),\ Y(t) \longrightarrow Y(t_0),\ Z(t) \longrightarrow Z(t_0) \implies \vec{V}(t) \longrightarrow \vec{V}(t_0)$$

2° Si $X'(t)$, $Y'(t)$, $Z'(t)$ sont elles-mêmes dérivables sur $[a, b]$, le vecteur $\vec{V}'(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée $\vec{V}''(t)$ est la *dérivée seconde* de $\vec{V}(t)$:

$$\boxed{\vec{V}''(t) = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k}.} \tag{5}$$

Lorsque $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ sont dérivables jusqu'à l'ordre n, on peut ainsi définir les dérivées successives de $\vec{V}(t)$ jusqu'à l'ordre n :

$$\boxed{\vec{V}^{n)}(t) = X^{n)}\vec{i} + Y^{n)}\vec{j} + Z^{n)}\vec{k}.} \tag{6}$$

516. Interprétation géométrique. — ***Les composantes*** X', Y', Z' ***du vecteur*** $\vec{V}'(t)$ ***sont les paramètres directeurs de la tangente à la courbe*** (C), ***lieu du point*** M ***tel que*** $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$.

En effet (fig. 150) : $\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_0U} = \dfrac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0}$ admet pour support la droite M_0M.

Lorsque $t \longrightarrow t_0$, le point M tend vers M_0 et le vecteur $\overrightarrow{M_0U}$ tend vers $\vec{V}'(t_0)$. Le support M_0T du vecteur $\vec{V}'(t_0)$ est donc la limite de la sécante M_0M, lorsque M vient en

M_0, c'est-à-dire, par définition, la tangente en M_0 à la courbe (C), lieu de M :

Si le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$ *est dérivable sur* $[a, b]$, *la courbe* (C) *admet en chacun de ses points* M(t) *une tangente de vecteur directeur* $\vec{V}'(t)$.

D'autre part le vecteur $\vec{V}'(t_0)$ a pour module la limite du rapport $\dfrac{M_0M}{t - t_0} = \lim \dfrac{\widehat{M_0M}}{t - t_0}$. Son sens est celui du déplacement du point M sur la courbe (C) lorsque t croît, sens t croissant sur la courbe (C). On dit que :

Le vecteur $\vec{V}'(t)$ *est porté par la demi-tangente positive en* M *à la courbe* (C).

Il en résulte que le vecteur $\vec{V}'(t)$ a une signification géométrique qui ne dépend ni de l'origine O, ni de la direction des axes :

La dérivation vectorielle est une opération indépendante du repère Oxyz.

Si ω ou I sont des points fixes, on peut écrire indifféremment :

$$\vec{V}'(t) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\omega M}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{IM}) \text{ d'où la notation : } \boxed{\vec{V}'(t) = \vec{M}'(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}}$$

qui indique que l'origine O du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est arbitraire.

De même on écrit : $\vec{V}''(t) = \vec{M}''(t) = \dfrac{d^2\vec{M}}{dt^2}$, $\quad \vec{V}'''(t) = \vec{M}'''(t) = \dfrac{d^3\vec{M}}{dt^3}$ etc...

Fig. 150. Fig. 151. Fig. 152.

517. Application. — *Tangente à l'hélice circulaire* (fig. 151).

On sait que le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(\theta)$ a pour composantes : $x = a\cos\theta$; $y = a\sin\theta$; $z = h\theta$.

Le vecteur dérivé $\vec{M}'(\theta) = \vec{V}'(\theta)$ a donc pour composantes : $x' = -a\sin\theta$, $y' = a\cos\theta$, $z' = h$.

Ces composantes x', y', z' sont les paramètres directeurs de la tangente à l'hélice au point M(θ). Or le vecteur M'(θ) a un module constant $\sqrt{a^2 + h^2}$ et une projection constante h sur Oz. Il fait donc avec Oz un angle constant φ tel que : $\cos\varphi = \dfrac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iff \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\vec{O}z, \vec{V}') = \dfrac{a}{h}$.

L'hélice circulaire coupe donc sous l'angle constant φ *les génératrices du cylindre de révolution sur lequel elle est tracée.*

518. Projection de la dérivée d'un vecteur. — Si $\vec{V}$(X, Y, Z) admet pour dérivée $\vec{V}'$(X', Y', Z') les vecteurs $\vec{U}$ (X, Y, 0) et $\vec{W}$ (0, 0, Z) admettent respectivement pour dérivées $\vec{U}'$ (X', Y', 0) et $\vec{W}'$ (0, 0, Z'). Or les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ se projettent respectivement suivant

$\vec{U}$ et $\vec{U'}$ sur le plan xOy, suivant $\vec{W}$ et $\vec{W'}$ sur Oz. En choisissant convenablement le repère $Oxyz$:

La dérivée de la projection d'un vecteur, sur un plan ou sur une droite, est la projection de la dérivée de ce vecteur.

On peut donc permuter projection et dérivation d'un vecteur.

519. Dérivée d'un vecteur constant. — Si le vecteur $\vec{V}(t)$ est constant sur $[a, b]$ il en est de même de ses composantes X, Y, Z, ce qui implique :

$$X' = Y' = Z' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{V}'(t) = \vec{0}.$$

La dérivée d'un vecteur constant est le vecteur nul $\vec{0}$.

Réciproquement $\vec{V}'(t) = \vec{0} \Longrightarrow X' = Y' = Z' = 0$ ce qui montre que X, Y, Z sont des nombres constants α, β, γ et que $\vec{V}(t)$ est un vecteur constant $\vec{U}\ (\alpha, \beta, \gamma)$.

520. Dérivée d'une somme vectorielle. — Si les deux vecteurs $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{V}_1(t)$ et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}_2(t)$ sont dérivables sur $[a, b]$, il en est de même des composantes $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$ du vecteur $\vec{U}(t) = \vec{V}_1(t) + \vec{V}_2(t)$. Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $\vec{U}'(t)$ (n° 223) et :

$$X' = X'_1 + Y'_2, \quad Y' = Y'_1 + Y'_2, \quad Z' = Z'_1 + Z'_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{U}'(t) = \vec{V}'_1(t) + \vec{V}'_2(t).$$

La dérivée d'une somme de vecteurs est égale à la somme des dérivées de chacun de ces vecteurs.

Plus généralement :

$$\boxed{\vec{U} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{U}' = \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 + \ldots + \vec{V}'_n}$$

521. Dérivée du produit d'un vecteur par un scalaire. — Si le vecteur $\vec{V}(X, Y, Z) = \vec{V}(t)$ et le scalaire $\lambda = \lambda(t)$ sont des fonctions de t dérivables sur $[a, b]$, il en est de même des composantes λX, λY, λZ du vecteur $\vec{U}(t) = \lambda(t)\vec{V}(t)$.

Ce vecteur $\vec{U}(t)$ admet donc sur $[a, b]$ une dérivée $\vec{U}'(t)$ telle que :

$$\vec{U}'(t) = (\lambda' X + \lambda X')\vec{i} + (\lambda' Y + \lambda Y')\vec{j} + (\lambda' Z + \lambda Z')\vec{k}.$$

Soit : $\vec{U}'(t) = \lambda'(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) + \lambda(X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k})$.

$$\boxed{\vec{U}(t) = \lambda(t)\,\vec{V}(t)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{U}' = \lambda'\vec{V} + \lambda\vec{V}'.}$$

Cette formule est analogue à la formule de la dérivée d'un produit de fonctions scalaires. Plus généralement, d'après le n° 519 :

$$\boxed{\vec{U} = \Sigma\, \lambda_i\, \vec{V}_i} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U' = \Sigma_i\, \lambda'_i\, \vec{V}_i + \Sigma\, \lambda_i\, \vec{V}_i'.}$$

Cette formule se réduit à : $\vec{U'} = \Sigma\, \lambda_i\, \vec{V'}_i$ lorsque les λ_i sont constants et à : $\vec{U}' = \Sigma\, \lambda'_i\, \vec{V}_i$ lorsque les vecteurs V sont constants.

On retrouve ainsi la règle de dérivation du n° 515, puisque $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont fixes :

$$\vec{V}(t) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \implies \left| \begin{array}{l} \vec{V}'(t) = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k} \\ \vec{V}^{(n)}(t) = X^{(n)}\vec{i} + Y^{(n)}\vec{j} + Z^{(n)}\vec{k}. \end{array} \right.$$

522. Dérivée d'un produit scalaire. — Soit $y = \vec{U}(t).\vec{V}(t)$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}(X_1, Y_1, Z_1) = \vec{U}(t)$ et $\vec{V}(X_2, Y_2, Z_2) = \vec{V}(t)$ dérivables sur $[a, b]$.

La relation $\quad y = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$ entraîne :

$$y' = (X'_1X_2 + X_1X'_2) + (Y'_1Y_2 + Y_1Y'_2) + (Z'_1Z_2 + Z_1Z'_2)$$

Soit : $\quad y' = (X'_1X_2 + Y'_1Y_2 + Z'_1Z_2) + (X_1X'_2 + Y_1Y'_2 + Z_1Z'_2).$

$$\boxed{y = \vec{U}.\vec{V}} \implies \boxed{y' = \vec{U}'.\vec{V} + \vec{U}.\vec{V}'}$$

Cette formule est analogue à celle de la dérivée d'un produit de fonctions.

Cas particulier. — Désignons par $r(t)$ le module du vecteur $\vec{U}(X, Y, Z) = \vec{U}(t)$ et par $z = \vec{U}^2 = r^2$ son carré scalaire :

$$z = \vec{U}.\vec{U} \implies z' = \vec{U}'.\vec{U} + \vec{U}.\vec{U}' \iff z' = 2\vec{U}.\vec{U}'.$$

$$z = r^2 = \vec{U}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \implies z' = 2rr' = 2\vec{U}.\vec{U}' = 2(XX' + YY' + ZZ').$$

Si k désigne une constante réelle quelconque, on voit que :

$$r = k \iff r^2 = k^2 \iff rr' = 0 \iff \vec{U}.\vec{U}' = 0.$$

Pour qu'un vecteur variable $\vec{U}(t)$ ait un module constant il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à sa dérivée $U'(t)$.

Il en résulte que le point M, tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{U}(t)$ décrit (fig. 152) une courbe tracée sur la sphère de centre O et de rayon $r = |\vec{U}|$.

523. Mesure de la projection de la dérivée d'un vecteur lié sur le support de ce vecteur.

Soit O l'origine fixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, fonction de la variable $\vec{t}$, et $\rho = OM$, la mesure algébrique de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oλ, de vecteur unitaire $\vec{U}$, support de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U} \implies (\overrightarrow{OM})' = \rho'\vec{U} + \rho(\vec{U})'.$$

La projection orthogonale de $(\overrightarrow{OM})'$ sur l'axe Oλ a pour mesure :

$$(\overrightarrow{OM})'.\vec{U} = \rho'(\vec{U})^2 + \rho(\vec{U})'.\vec{U}.$$

Or : $(\vec{U})^2 = 1$ et $\vec{U}'.\vec{U} = 0$ (n° 522). Donc : $(\overrightarrow{OM})'.U = \rho'$. Ainsi :

La mesure algébrique de la projection de la dérivée d'un vecteur lié sur le support de ce vecteur est égale à la dérivée de la mesure algébrique de ce vecteur sur son support.

Cette propriété permet de trouver les propriétés de la tangente aux coniques à centre (ellipse et hyperbole) et celles de la tangente à la parabole:

524. Tangente à l'ellipse. — L'ellipse E de foyers F et F', de centre O, est le lieu des points M tels que : MF + MF' = 2 a (fig. 153). Si t est un paramètre fixant la position de M sur l'ellipse, la tangente en M à l'ellipse E est le support du vecteur :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = d\,\frac{(\overrightarrow{OM})}{dt} = d\,\frac{(\overrightarrow{FM})}{dt} = d\,\frac{(\overrightarrow{F'M})}{dt}.$$

Sur les axes $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$ on a : $\overline{FM} = r_1$; $\overline{F'M} = r_2$ et $r_1 + r_2 = 2a$.

Donc : $\frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = 0$, les projections de $\vec{V}$ sur les axes $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$ sont opposées, ce qui montre que :

La tangente à l'ellipse E *en* M *est bissectrice extérieure de l'angle* FMF' *des rayons vecteurs* FM *et* F'M.

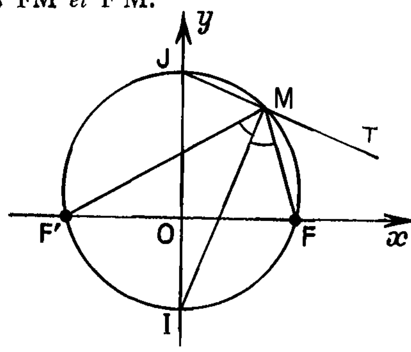


Fig. 153.

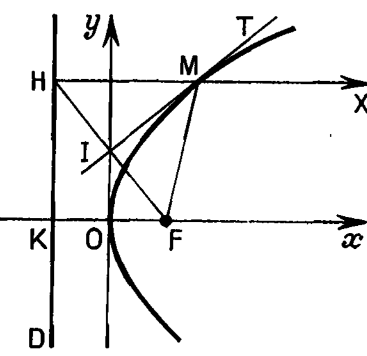


Fig. 154.

525. Tangente à l'hyperbole. — Avec les mêmes notations, dans le cas de l'hyperbole :

$$|r_1 - r_2| = 2a \implies \frac{dr_1}{dt} - \frac{dr_2}{dt} = 0.$$

Les projections du vecteur $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ sur les axes $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$ sont égales.

La tangente à l'hyperbole en M *est bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs* $\overrightarrow{FM}$ *et* $\overrightarrow{F'M}$.

526. Tangente à la parabole. — La parabole de foyer F, de directrice D, de sommet O, d'axe Ox (fig. 154) est le lieu des points M tels que MF = MH où H est la projection de M sur D. La tangente en M à la parabole est le support du vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{d\,(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d\,(\overrightarrow{FM})}{dt} \quad (t \text{ paramètre fixant M sur P}).$$

Sur les axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{FM}$ on a : $\overline{FM} = \overline{HM} = x$ où x est l'abscisse de M dans le repère xOy; donc : $\frac{d\overline{FM}}{dt} = \frac{dx}{dt}$: les projections du vecteur $\vec{V}$ sur les axes $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{Ox}$, ou sur les axes $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont donc égales :

La tangente en M *à la parabole est bissectrice de l'angle* $\widehat{FMH}$, *donc médiatrice de* FH.

EXERCICES

— Intégrer les équations différentielles suivantes :

1077. $y' = x^2 - 3x + 7$ **1078.** $y' = x^3 - 1$ **1079.** $y' = 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5.$

1080. $y'' = 2x - 3$ **1081.** $y'' = x^2 + x - 1$ **1082.** $y'' = x^3 - 2x + 5.$

1083. $y'' = ax + b$ **1084.** $y'' = ax^2 + bx + c$ **1085.** $y'' = x^3 + px + q.$

— Intégrer les équations différentielles :

1086. $y' + y = 0$ **1087.** $y' - y = 0$ **1088.** $y' + 2y = 0.$

1089. $y' - \frac{1}{2}y = 0$ **1090.** $y' + \frac{1}{2}y = 0$ **1091.** $y' + 4y = 0.$

— Résoudre les équations différentielles suivantes qui se ramènent à la forme $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

1092. $(2x - 3)y' - 2y = 0$ **1093.** $(ax + b)y' - ay = 0.$

1094. $(x^2 - 1)y' - 2y = 0$ **1095.** $(x^2 - a^2)y' - 2ay = 0.$

1096. $y' \cos x - y \sin x = 0$ **1097.** $y' \sin x - y = 0.$

1098. $y'\sqrt{x^2 + h} - y = 0$ **1099.** $xy'[\text{Log}|x| - 1] - y \text{Log}|x| = 0.$

1100. $(3x - 2)y' - 6y = 0$ **1101.** $(ax + b)y' - nay = 0.$

1102. $y' \cos x + 2y \sin x = 0$ **1103.** $y' \sin x + 3y = 0.$

1104. $y'\sqrt{x^2 + 1} + y = 0$ **1105.** $(x^2 - 1)y' + 2y = 0.$

1106. $xy' \text{Log}|x| - y = 0$ **1107.** $(1 + 3e^{-2x})y' - 2y = 0.$

— Intégrer les équations différentielles suivantes :

1108. $y'' + 9y = 0$ **1109.** $y'' + 16y = 0$ **1110.** $y'' + 2y = 0$

1111. $y'' + 3y = 0$ **1112.** $y'' + 25y = 0$ **1113.** $y'' + 36y = 0.$

1114. $y'' + \frac{3}{4}y = 0$ **1115.** $y'' + \frac{4}{25}y = 0$ **1116.** $y'' + \frac{1}{9}y = 0.$

1117. Démontrer que si $\frac{d\vec{V}}{dt} = 0$, le vecteur $\vec{V}$ reste équipollent à un vecteur fixe.

1118. Démontrer que si $\frac{d\vec{V}}{dt}$ est équipollent à un vecteur donné $\vec{u}$ le vecteur $\vec{V}$ est de la forme : $\vec{V} = t\vec{u} + \vec{V_0}$ où $\vec{V_0}$ est un vecteur arbitraire constant.

1119. Le point O est fixe, le point M variable. On suppose que $\overrightarrow{MV} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ est parallèle à une direction donnée. Montrer que le point M appartient à une droite fixe.

1120. Dans un repère cartésien donné O (xyz) on suppose que le support du vecteur $\overrightarrow{MV} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ passe par O. Montrer que le point M appartient à une droite fixe.

1121. Le point O est fixe et $\overrightarrow{MV} = \frac{dM}{dt}$ est parallèle à un plan fixe. Montrer que M appartient à un plan fixe.

1122. Dans un repère cartésien donné, O (xyz) le support du vecteur $\overrightarrow{MV} = \frac{dM}{dt}$ rencontre l'axe Oz. Montrer que le point M appartient à un plan fixe.

1123. F et F′ sont deux points fixes du plan. On considère la courbe C (ovale de Descartes), lieu des points M du plan tels que :

$$\text{MF} + n.\text{MF}' = 0 \qquad (n \text{ entier donné}).$$

Déterminer la tangente M à la courbe C.

1124. F et F′ sont deux points fixes du plan. On considère la courbe C (ovale de Cassini), lieu des points M du plan tels que MF.MF′ $= k^2$ constante donnée. Construire la tangente en M à la courbe C.

CALCUL NUMÉRIQUE

527. Encadrements. — On dit qu'un nombre x est encadré par deux nombres a et a' lorsque a et a' représentent deux valeurs approchées de x, a par défaut, a' par excès.

$$a < x < a'.$$

Si $\frac{p}{10^n} < x < \frac{p+1}{10^n}$, on dit que les nombres décimaux $\frac{p}{10^n}$ et $\frac{p+1}{10^n}$ sont les *valeurs normales approchées* de x à moins de $\frac{1}{10^n}$ près, la première par défaut, la deuxième par excès.

Soit x tel que $3{,}1415 < x < 3{,}1416$. Les nombres 3,1415 et 3,1416 sont les valeurs normales approchées de x à moins de $\frac{1}{10^4}$ près.

Il est toujours possible d'encadrer une valeur $x \in [a, b]$ définie par une relation $f(x) = 0$ pourvu que $f(x)$ soit une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) \cdot f(b) < 0$ (nº 323).

EXEMPLE. — *Montrer qu'il existe une valeur positive de x pour laquelle on a : $\frac{x+2}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ et calculer cette valeur à 0,01 près par défaut.*

La relation $\frac{x+2}{x^2+1} = \frac{1}{4}$ équivaut à $f(x) \equiv x^2 - 4x - 7 = 0$. Comme $f(0) = -7$ et $f(10) = 53$, il existe une racine du polynôme $f(x)$ telle que : $0 < x < 10$.

1º $f(5) = -2$ et $f(6) = +5$ donc : $5 < x < 6$.

2º Zéro étant plus près de -2 que de $+5$, essayons 5,3 :

$$\left.\begin{array}{l} f(5{,}3) = 28{,}09 - 28{,}2 = -0{,}11 \\ f(5{,}4) = 28{,}16 - 28{,}6 = 0{,}56 \end{array}\right\} \text{donc } 5{,}3 < x < 5{,}4.$$

3º De même, zéro étant nettement près de $-0{,}11$ que de 0,56 :

$$\left.\begin{array}{l} f(5{,}32) = 28{,}3024 - 28{,}28 = 0{,}0224 \\ f(5{,}31) = 28{,}1961 - 28{,}24 = -0{,}0439 \end{array}\right\} \text{donc } 5{,}31 < x < 5{,}32.$$

La valeur de x demandée est de 5,31 à 0,01 près par défaut. On pourra vérifier que la valeur exacte de x est $2 + \sqrt{11} = 5{,}316\,62 \ldots$

On peut ainsi résoudre à 1/10 , 1/100 voire 1/1 000 près des équations de la forme :

$$P(x) = 0, \quad x^n = a, \quad ae^{\alpha x + \beta} = b, \quad a \log x = b \text{ etc...}$$

528. Incertitude absolue. — La différence entre le nombre x et une valeur approchée est l'*erreur absolue* commise en remplaçant ce nombre par la valeur approchée.

En remplaçant x par a ou a', on commet l'erreur $x - a$ ou $a' - x$. Dans la pratique, on ne connaît pas l'erreur absolue, car x n'est pas connue, mais on peut en déterminer un majorant Δx appelé *incertitude absolue.*

On écrit $a < x < a + \Delta x$ ou $a - \Delta x < x < a$ selon que a est une valeur approchée par défaut ou par excès.

L'encadrement $\qquad a - \Delta x < x < a + \Delta x$

exprime que a est une valeur approchée de x avec une incertitude égale à Δx.

EXEMPLE :

La longueur l d'une grandeur est telle que 3,22 m $< l <$ 3,28 m. En prenant $a = 3{,}25$ m pour évaluer cette grandeur, l'incertitude absolue est 0,03 m.

On écrit parfois : $\qquad l = 3{,}25 \text{ m} \pm 0{,}03 \text{ m}.$

529. Incertitude relative. — L'*erreur relative* sur le nombre x quand on lui substitue une valeur approchée a est le quotient $\frac{x - a}{x}$ de l'erreur absolue par la valeur exacte x.

L'erreur relative n'est pas connue, mais on peut en déterminer un majorant appelé *incertitude relative.*

L'encadrement $a - \Delta x < x < a + \Delta x$ implique, si x est positif :

$$\frac{x - a}{x} < \frac{\Delta x}{a - \Delta x}$$

que l'on remplacera dans la pratique, Δx étant petit devant a, par

$$\boxed{\frac{\Delta x}{a}.}$$

Dans l'exemple précédent (n° 528), l'incertitude relative est $\frac{3}{325} \approx \frac{1}{100}$.

Remarquons que l'incertitude relative s'exprime par un *nombre abstrait.*

530. Incertitude absolue d'une somme. — Considérons les encadrements de deux nombres x et y :

$$a - \Delta x < x < a + \Delta x, \quad b - \Delta y < y < b + \Delta y.$$

Δx et Δy sont les incertitudes absolues de x et y. On déduit par addition :

$$a + b - (\Delta x + \Delta y) < x + y < a + b + (\Delta x + \Delta y).$$

$a + b$ est une valeur approchée de $x + y$ avec une incertitude absolue égale à $\Delta x + \Delta y$. On écrit :

$$\boxed{\Delta (x + y) = \Delta x + \Delta y.}$$

L'incertitude absolue d'une somme est égale à la somme des incertitudes absolues de chaque terme.

Ce théorème se généralise immédiatement pour une somme d'un nombre quelconque de termes :

$$\Delta (x + y + z) = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

EXEMPLE :

On mesure une longueur x de 8 cm à 1 mm près et une longueur de 5 cm à 2 mm près. Quelle est l'incertitude absolue sur la somme $x + y$?

$$\Delta (x + y) = 1 + 2 = 3 \text{ mm} \Longrightarrow 12{,}7 \text{ cm} < x + y < 13{,}3 \text{ cm}.$$

531. Incertitude absolue d'une différence. — En utilisant les mêmes encadrements qu'au nº 530, et en tenant compte de

$$-b - \Delta y < -y < -b + \Delta y,$$

on déduit l'encadrement :

$$a - b - (\Delta x + \Delta y) < x - y < a - b + (\Delta x + \Delta y).$$

$a - b$ est une valeur approchée de $x - y$ avec une incertitude absolue égale à $\Delta x + \Delta y$. On écrit :

$$\boxed{\Delta (x - y) = \Delta x + \Delta y.}$$

L'incertitude absolue d'une différence est égale à la somme des incertitudes absolues de chaque terme.

Dans l'exemple du nº 530 : $\Delta (x - y) = 3 \text{ mm} \Longrightarrow 2{,}7 \text{ cm} < x - y < 3{,}3 \text{ cm}$.

532. Incertitude relative d'un produit de deux nombres positifs. — Des encadrements :

$$a - \Delta x < x < a + \Delta x \qquad \text{et} \qquad b - \Delta y < y < b + \Delta y$$

on déduit : $(a - \Delta x)(b - \Delta y) < xy < (a + \Delta x)(b + \Delta y)$,

soit :

$$ab - a.\Delta y - b.\Delta x + \Delta x.\Delta y < xy < ab + a.\Delta y + b.\Delta x + \Delta x.\Delta y.$$

Comme le produit $\Delta x \,.\, \Delta y$ de deux incertitudes est petit par rapport aux autres termes, on peut le négliger. Donc

$$ab - (a.\Delta y + b.\Delta x) < xy < ab + (a.\Delta y + b.\Delta x).$$

ab est une valeur approchée du produit xy. L'incertitude absolue est :

$$\boxed{\Delta (xy) = a.\Delta y + b.\Delta x.}$$

L'incertitude relative sur le produit xy est :

$$\boxed{\frac{\Delta (xy)}{ab} = \frac{\Delta x}{a} + \frac{\Delta y}{b}.}$$

L'incertitude relative sur un produit est égale à la somme des incertitudes relatives sur chaque facteur.

Ce théorème se généralise pour un produit de plusieurs facteurs :

$$\frac{\Delta (xyz)}{abc} = \frac{\Delta x}{a} + \frac{\Delta y}{b} + \frac{\Delta z}{c}$$

On déduit, pour une puissance : $\frac{\Delta (x^n)}{a^n} = n \frac{\Delta x}{a}$ et pour une racine : $\frac{\Delta \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta a}$.

EXEMPLES :

1° On peut déterminer les incertitudes relative et absolue sur le calcul de l'aire d'un rectangle dont les côtés ont pour mesure 8 cm à 0,1 cm près et 12 cm à 0,1 cm près.

L'incertitude relative est :

$$\frac{0,1}{8} + \frac{0,1}{12} = \frac{1}{80} + \frac{1}{120} = \frac{2}{96} \approx 0,02.$$

L'incertitude absolue est : $0,02 \times 96 = 1,92$ cm² ≈ 2 cm². Si S est l'aire du rectangle :

$$94 \text{ cm}^2 < S < 98 \text{ cm}^2.$$

2° Si l'arête a d'un cube mesure 20 cm à 1 mm près, l'incertitude relative sur le volume $V = a^3$ de ce cube est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta (a^3)}{a^3} = 3 \frac{\Delta a}{a} = 3 \frac{0,1}{20} = \frac{3}{200}$$

L'incertitude absolue $V = (20)^3 = 8\,000$ cm² est donc :

$$\Delta V = 8\,000 \text{ cm}^3 \times \frac{3}{200} = 120 \text{ cm}^3 \implies 7\,880 \text{ cm}^3 < V < 8\,120 \text{ cm}^3$$

REMARQUE. — Un facteur connu exactement n'intervient pas dans l'erreur relative du produit. Si V est le volume d'une sphère de rayon R :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \implies \frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta R}{R} \implies \Delta V = 4 \pi R^2 . \Delta R.$$

533. Incertitude relative sur un quotient de nombres positifs. — Des encadrements : $a - \Delta x < x < a + \Delta x$ et $b - \Delta y < y < b + \Delta y$

on déduit : $$\frac{1}{b + \Delta y} < \frac{1}{y} < \frac{1}{b - \Delta y}$$

et par multiplication : $$\frac{a - \Delta x}{b + \Delta y} < \frac{x}{y} < \frac{a + \Delta x}{b - \Delta y}$$

D'où : $$\frac{(a - \Delta x)(b - \Delta y)}{b^2 - (\Delta y)^2} < \frac{x}{y} < \frac{(a + \Delta x)(b + \Delta y)}{b^2 - (\Delta y)^2}.$$

Les termes $\Delta x . \Delta y$ et $(\Delta y)^2$ étant petits par rapport aux autres termes, on peut les négliger. Donc

$$\frac{a}{b} - \frac{b . \Delta x + a . \Delta y}{b^2} < \frac{x}{y} < \frac{a}{b} + \frac{b . \Delta x + a . \Delta y}{b^2}.$$

$\frac{a}{b}$ est une valeur approchée de $\frac{x}{y}$. L'incertitude absolue est : $\Delta \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{b . \Delta x + a . \Delta y}{b^2}$

L'incertitude relative est : $$\boxed{\frac{\Delta \left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta x}{a} + \frac{\Delta y}{b}.}$$

EXEMPLES :

Calculer l'incertitude relative, puis l'incertitude absolue sur le résultat de l'opération $a = \frac{6 \times 5}{10}$,

chaque terme étant connu avec l'approximation suivante :

$$6 \pm 0{,}06; \qquad 5 \pm 0{,}1; \qquad 10 \pm 01.$$

Le résultat approché est $a_0 = 3$. Les incertitudes relatives sur chaque terme sont :

$$\frac{0{,}06}{6} = \frac{1}{100}, \qquad \frac{0{,}1}{5} = \frac{2}{100}, \qquad \frac{0{,}1}{10} = \frac{1}{100}.$$

L'incertitude relative sur le résultat est : $\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{4}{100}$.

L'incertitude absolue est : $\frac{4}{100} \times a_0 = \frac{12}{100} = 0{,}12$.

Donc : $a = 3 \pm 0{,}12$ ou $2{,}88 < a < 3{,}12$.

534. Tableau des valeurs approchées usuelles — Si ε est petit devant l'unité et si α est la mesure en radians d'un petit angle (nº 316) :

$(1+\varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$	$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$	$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$
$(1-\varepsilon)^2 \approx 1 - 2\varepsilon$	$\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$	$\frac{1}{1-\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$
$(1+\varepsilon)^3 \approx 1 + 3\varepsilon$	$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$
$\sin\alpha \approx \alpha$	$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$	$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

EXEMPLES :

$(1{,}03)^2 \approx 1{,}06$; $(0{,}99)^2 = (1 - 0{,}01)^2 \approx 0{,}98$; $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}01$.

$\frac{1}{1{,}001} \approx 0{,}999$; $\frac{1}{0{,}999} \approx 1{,}001$; $\frac{1}{\sqrt{1{,}002}} \approx 0{,}999$.

$\sin 4^\circ \approx \operatorname{tg} 4^\circ \approx \alpha \text{ rd} = 0{,}0698$ $\qquad \cos 12^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}(0{,}21)^2 = 0{,}9780$

TABLES NUMÉRIQUES

535. Utilisation des tables. — Pour simplifier les calculs numériques, il existe des tables donnant les résultats des opérations élémentaires usuelles : tables fournissant les carrés, cubes, inverses, racines carrées, racines cubiques, logarithmes des 100 premiers nombres entiers (pages 369 à 374).

Ces tables peuvent être utilisées pour les nombres non compris entre 1 et 100 en multipliant ou en divisant par une puissance de 10 convenablement choisie.

EXEMPLES :

1º $310^2 = 31^2 \times 10^2 = 96\,100$; 2º $\sqrt[3]{0{,}045} = \sqrt[3]{\frac{45}{10^3}} = \frac{3{,}557}{10} = 0{,}3557$;

3º $\frac{1}{0{,}0097} = 10^4 \times \frac{1}{97} = 0{,}0103 \times 10^4 = 103.$

536. Interpolation. — Soit n un nombre compris entre 1 et 100 et $f(n)$ la valeur enregistrée par la table. On admet que :

Entre deux nombres consécutifs n *et* n + 1, *l'accroissement de* n *et celui de* f (n) *sont proportionnels.*

Si x est un nombre compris entre n et $n + 1$, on a donc :

$$\frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{1}. \qquad (1)$$

Posons $f(n + 1) - f(n) = \Delta$ (différence tabulaire à calculer sur la table); $f(x) - f(n) = \delta$; on a donc :

$$\delta = (x - n)\,\Delta \qquad \text{et} \qquad f(x) = f(n) + (x - n)\,\Delta.$$

La relation (1) permet de calculer l'une des quantités x ou $f(x)$ connaissant l'autre :

EXEMPLE I. — *Calculer* $\sqrt[3]{38\,750}$.

On a $\sqrt[3]{38\,750} = \sqrt[3]{38{,}75 \times 1\,000} = 10\sqrt[3]{38{,}75}$.

La table donne : $\sqrt[3]{39} = 3{,}391$	38,75	$\sqrt[3]{38}$		3,362
$\sqrt[3]{38} = 3{,}362$	38	$\delta = 29 \times 0{,}75 =$		22
$\Delta = 29$	0,75	$\sqrt[3]{38{,}75}$	=	3,384

Donc $\sqrt[3]{38\,750} = 33{,}84$.

EXEMPLE II. — *Calculer le cosinus de* 72° 15′.

La table donne : cos 73° = 0,2924	72° 15′	cos 72°	=	0,3090
cos 72° = 0,3090	72°	$\delta = -\frac{166 \times 15}{60}$	=	− 41
Δ = − 166	0° 15′	cos 72° 15′	=	3,3049.

EXEMPLE III. — *Calculer* α *aigu sachant que* cotg α = 2.

La table donne : cotg 27° = 1,963	2	
cotg 26° = 2,050	2,050	$\Delta\alpha = \frac{60' \times 50}{87} = 34'$
Δ = − 87	− 50	α = 26°34′.

537. Table des carrés. Incertitude de l'erreur. — On veut déterminer l'incertitude absolue du résultat sur le calcul du carré d'un nombre par interpolation linéaire. Soit à calculer $x^2 = (n + h)^2$, avec $0 < h < 1$. Les notations sont celles du n° 536.

$$\Delta = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \qquad \delta = (x - n)\,\Delta = h\,(2n + 1).$$

Le résultat donné par interpolation linéaire est : $n^2 + (2n + 1)\,h$ (par excès).

Le résultat exact étant $(n + h)^2 = n^2 + 2nh + h^2$, l'erreur commise est donc :

$$n^2 + (2n + 1)\,h - n^2 - 2nh - h^2 = h - h^2 = h\,(1 - h).$$

Les nombres h et $1 - h$ ayant une somme constante, leur produit est maximum lorsqu'ils sont égaux : $h = 1 - h \Longrightarrow h = \frac{1}{2}$

Donc l'incertitude absolue est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Calcul de $(38{,}26)^2$ par interpolation linéaire :

$$\begin{array}{ll} (39)^2 = 1\,521 & \\ & h = 0{,}26 \\ \underline{(38)^2 = 1\,444} & \\ \Delta = \quad 77 & \delta = 77 \times 0{,}26 = 20{,}02 \qquad (38{,}26)^2 = 1\,464{,}02, \end{array}$$

soit $1\,464{,}02 - 0{,}25 < (38{,}26)^2 < 1\,464{,}02$ soit $1\,463{,}77 < (38{,}26)^2 < 1\,464{,}02$.

EXERCICES

— Calculer le quotient $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut de :

1125. 45 par 13. 1 par 7. 19 par 23.

1126. 409,7 par 705. 3,109 par 13,05. 0,047 par 4,719.

1127. 0,37 par $\frac{2}{3}$. $\frac{5}{7}$ par $\frac{11}{9}$. $\frac{13}{17}$ par 0,75.

1128. Les nombres 1,4142 et 1,7320 sont les racines approchées à $\frac{1}{10\,000}$ près par défaut de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

1° Entre quelles limites est compris $\sqrt{2} + \sqrt{3}$? Quel est le nombre de chiffres décimaux exacts obtenus ?

2° Même question pour $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$.

1129. Le quotient d'un nombre x par 37,7 à $\frac{1}{1\,000}$ près par défaut est 0,712. Entre quelles limites peut être compris ce nombre x et sur combien de chiffres exacts peut-on compter ?

1130. Sachant que π est compris entre 3,1415 et 3,1416, trouver deux valeurs de $\frac{1}{\pi}$ approchées l'une par défaut, l'autre par excès. Sur combien de chiffres décimaux exacts peut-on compter ?

1131. Trouver un encadrement de la valeur numérique de l'expression $4x^2y - \frac{x^2}{y}$ pour :

$$3{,}15 < x < 3{,}16 \quad \text{et} \quad 1{,}30 < y < 1{,}31$$
$$0{,}83 < x < 0{,}84 \quad \text{et} \quad 7{,}28 < y < 7{,}29$$

1132. Calculer l'erreur relative, puis l'incertitude absolue sur le résultat de l'opération $\frac{36 \times 10^3}{5^2}$ sachant que les nombres 36, 10 et 5 qui y figurent sont connus avec une incertitude de 0,1 unité.

1133. Un mobile parcourt 10 m à 0,5 m près en 1 s à 0,1 s près. Calculer sa vitesse en m/s, puis en km/h en précisant l'incertitude absolue du résultat.

1134. Un fil de cuivre a une longueur $l = 205$ cm à 4 mm près; son diamètre est 1,10 mm à 0,05 mm près; sa résistance est 0,0346 Ω à 0,0001 près. Calculer la résistivité du cuivre, l'incertitude relative et l'incertitude absolue du résultat.

1135. Calculer la valeur de l'expression

$$a = \frac{x^2y^3}{z^4} \quad \text{où} \quad x = 2 \pm 0{,}005; \quad y = 20 \pm 0{,}02; \quad z = 10 \pm 0{,}01.$$

1136. Lorsque ε est voisin de zéro, trouver une valeur approchée et le sens de l'approximation des expressions :

$$(1+\varepsilon)^3, \quad (1-2\varepsilon)^3, \quad \frac{1}{1+4\varepsilon}, \quad \frac{1}{1-2\varepsilon^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon+\varepsilon^2}}.$$

1137. Lorsque ε est voisin de zéro, trouver une valeur approchée et le sens de l'approximation des expressions :

$$\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \quad \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{1+\varepsilon}, \quad \sqrt{\sqrt{1+\varepsilon}}, \quad \frac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

— En utilisant les tables du livre, calculer :

1138. $1{,}9^2$. $0{,}57^2$. $6\,800^2$. $17{,}2^2$. $0{,}0181^2$. $7\,817^2$.

1139. $2{,}5^3$. $0{,}019^3$. $5\,400^3$. $4{,}75^3$. $0{,}785^3$. 729^3.

1140. $\frac{1}{3{,}7}$. $\frac{1}{0{,}27}$. $\frac{1}{750}$. $\frac{1}{57{,}5}$. $\frac{1}{0{,}875}$. $\frac{1}{7\,412}$.

1141. $\sqrt{0{,}79}$. $\sqrt{0{,}0021}$. $\sqrt{780\,000}$. $\sqrt{790}$. $\sqrt{8{,}15}$. $\sqrt{0{,}912}$.

1142. $\sqrt[3]{0{,}93}$. $\sqrt[3]{37\,000}$. $\sqrt[3]{0{,}000021}$. $\sqrt[3]{20{,}5}$. $\sqrt[3]{8\,137}$. $\sqrt{33\,427}$.

— En utilisant les tables, calculer :

1143. $\sin 12^\circ 15'$. $\sin 41{,}7$ gr. $\frac{1}{\sin 72^\circ 20'}$.

1144. $\cos 83^\circ 12'$. $\cos 17{,}25$ gr. $\frac{1}{\cos 25^\circ 30'}$.

1145. $\operatorname{tg} 17^\circ 10'$. $\operatorname{tg} 60{,}7$ gr. $\operatorname{cotg} 31^\circ 15'$.

— Calculer α aigu en degrés ou en grades, sachant que :

1146. $\sin \alpha = 0{,}72$. $\cos \alpha = 0{,}75$. $\frac{1}{\sin \alpha} = 2{,}5$.

1147. $\frac{1}{\cos \alpha} = 3$. $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}572$. $\operatorname{cotg} \alpha = 0{,}441$.

1148. On donne les deux nombres π et $\sqrt{5}$ avec leurs valeurs, 3,14 et 2,23, approchées par défaut à moins de $\frac{1}{100}$ près.

1° Évaluer une limite supérieure de l'erreur relative faite sur chacun de ces deux nombres quand on les remplace par les valeurs approchées données.

2° Encadrer le produit $\pi \times \sqrt{5}$. Quels sont les chiffres exacts que l'on connaît ainsi pour ce produit ?

1149. Calculer en grades, avec la précision permise par les tables de logarithmes, les mesures d'angle x comprises entre 0 et 400 grades, qui satisfont à l'équation

$$0{,}752 \cos x + 1{,}572 \sin x = 0{,}897.$$

1150. Déterminer les fonctions y de la variable x vérifiant l'équation

$$2y' + 3y = 0.$$

Soit y_1 la fonction y particulière qui prend la valeur e (e : base des logarithmes népériens) lorsque $x = -\frac{2}{3}$. Étudier cette fonction et construire son graphe. Préciser, à 10^{-4} près, la valeur de y_1 pour $x = 1$.

Montrer que tous les graphes des fonctions y se déduisent du graphe de la fonction y_1 par une transformation géométrique simple.

1151. — 1° Dans un triangle ABC on donne l'angle A, la hauteur $AH = h$ et le rayon r du cercle inscrit. Établir les relations $\frac{h}{r} = \frac{2p}{a}$ et $\frac{h}{r} = 1 + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$ (p est le demi-périmètre du triangle ABC).

En déduire le calcul des angles B et C. Discussion.

Construire géométriquement le triangle ABC et retrouver les résultats de la discussion précédente.

2° Soit Γ le cercle de rayon r inscrit dans ABC. On mène la tangente B_1C_1 à Γ parallèle à BC. Soit Γ_1 le cercle de rayon r_1 inscrit dans AB_1C_1. On mène la tangente B_2C_2 à Γ_1 parallèle à B_1C_1. Soit Γ_2 le cercle de rayon r_2 inscrit AB_2C_2, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite de cercles Γ, Γ_1, Γ_2, ... Γ_n... ayant pour rayons $r, r_1, r_2, r_3 \ldots r_n \ldots$ on désigne par $l, l_1, l_2 \ldots l_n \ldots$ les longueurs de ces cercles et par $s, s_1, s_2 \ldots s_n \ldots$ leurs aires. Montrer que la suite $r, r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$ est une progression, dont on déterminera la nature et la raison en fonction de r et h.

Calculer la limite L de la somme $l + l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \ldots$ et la limite S de la somme $s + s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$ quand n augmente indéfiniment. Existe-t-il un cercle (C) dont la longueur soit L et l'aire S ?

3° Calculer r et h de façon que la progression

$$r + r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$$

ait pour limite 1 et pour raison $\frac{1}{10}$. Sachant en outre que A est droit, on demande de calculer numériquement, avec toute la précision des tables de logarithmes à 5 décimales, les angles B et C en degrés, minutes et secondes, le côté a et l'aire du triangle ABC.

Donner également une construction géométrique du triangle.

RÈGLE A CALCUL

538. Description. — La règle à calcul remplace la table de logarithmes lorsqu'on veut effectuer rapidement des calculs numériques. Elle se compose d'une ***réglette*** pouvant coulisser à l'intérieur d'une *règle* et d'un ***curseur*** mobile portant un ou trois traits de repérage (fig. 155). Chaque bord de la règle et le bord en regard de la réglette portent des échelles égales. Ces échelles sont des échelles logarithmiques.

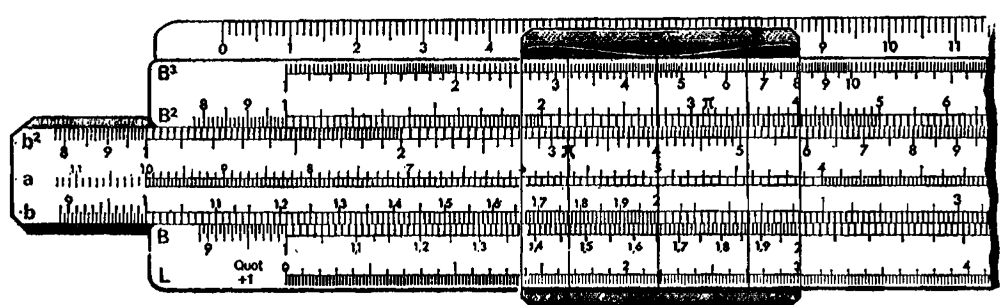


Fig. 155.

Par construction, sur une échelle logarithmique de module l, l'abscisse de la division M, cotée ou graduée x, est : $\overline{OM} = l \log x$ (fig. 156). L'origine O de l'échelle est la division graduée 1, car $l \log 1 = 0$, tandis que l'extrémité A, d'abscisse l, est la division graduée 10, car $\overline{OA} = l \log 10 = l$. Par suite, si P est la division cotée y, on obtient :

$$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OA} = l \log y - l \log x = l (\log y - \log x)$$

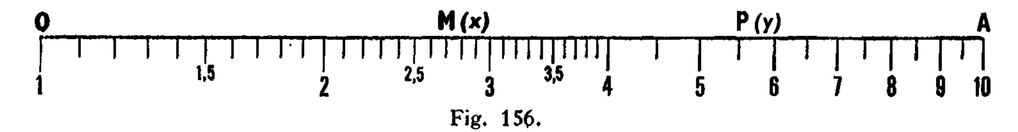


Fig. 156.

Sauf indication contraire, lorsque nous utiliserons une des échelles de la règle à calcul, nous supposerons que l'unité de longueur utilisée est le module de cette échelle si bien que l'on aura simplement :

$$\overline{OM} = \log x, \quad \overline{OP} = \log y \quad \text{et} \quad \overline{MP} = \log y - \log x$$

On remarquera (fig. 156) que les divisions d'une échelle logarithmique ne sont pas équidistantes comme sur l'échelle métrique d'un double décimètre, mais qu'elles vont en se rapprochant lorsque x augmente si bien que le nombre des divisions intermédiaires (10, 5 ou 2) va en diminuant. La règle à calcul comporte plusieurs échelles :

1° ÉCHELLES INFÉRIEURES **B** ET **b**. — L'échelle inférieure **B** de la règle et l'échelle inférieure **b** de la réglette sont des échelles logarithmiques de même module ($l = 25$ cm) graduées de 1 à 10.

2° ÉCHELLES SUPÉRIEURES $\mathbf{B}^2$ ET $\mathbf{b}^2$. — Ces deux échelles sont identiques.

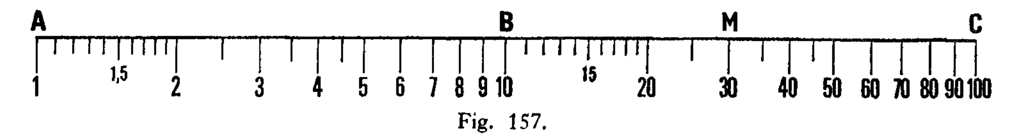


Fig. 157.

Chacune d'elles comprend deux échelles logarithmiques AB et BC (fig. 159) de module $\frac{l}{2}$, égal à la *moitié* de celui des échelles inférieures.

Les chiffres 2, 3, 4, ... de l'échelle BC représentent les nombres 20, 30, 40, ... En effet soit M le point de cote 3 sur l'échelle BC :

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \frac{l}{2}\log 10 + \frac{l}{2}\log 3 = \frac{l}{2}\log 30.$$

Donc la cote de M est 30. On lit donc sur BC les nombres de 10 à 100.

Sur certaines règles (fig. 157) l'échelle BC est effectivement graduée de 10 à 100, ce que nous supposerons dans la suite.

L'échelle $\mathbf{B}^3$ est formée de 3 échelles logarithmiques identiques de module $\frac{l}{3}$, de longueur totale l. Comme précédemment on montrerait que l'ensemble des trois échelles constitue une échelle unique graduée de 1 à 1 000.

L'échelle des inverses **a** située au milieu de la réglette est identique à *l'échelle* **b** mais de sens contraire.

L'échelle des logarithmes **L** est une échelle métrique placée sur le bord inférieur de la règle, de même module l que l'échelle inférieure B, graduée de 0 à 1 (la graduation 3 se lit 0,3). Sur cette échelle la graduation y du point M graduée x sur l'échelle B vérifie :

$$\overline{OM} = l\,y = l\log x \implies y = \log x$$

Enfin au dos de la réglette on trouve les échelles S et T séparées par l'échelle S & T relatives aux fonctions circulaires sinus et tangente.

539. Remarque. — On utilise de préférence les échelles B et b qui donnent plus de précision que les échelles supérieures $\mathbf{B}^2$ et $\mathbf{b}^2$. On s'entraînera à effectuer rapidement les opérations suivantes :

1° *Lire une graduation de la règle ou de la réglette repérée au curseur.*

En raison du nombre variable des divisions intermédiaires, cette opération demande toujours beaucoup d'attention, si on veut éviter les erreurs.

2° *Amener une graduation donnée de la réglette en coïncidence avec une graduation de la règle repérée au curseur.*

Signalons qu'il existe des règles à calcul de poche ($l = 12$ ou 15 cm) et aussi des règles à calcul de bureau ($l = 50$ cm) dont la précision est supérieure à celle de la règle ordinaire.

540. Produit de deux nombres. — On opère avec les échelles inférieures B et *b*.

EXEMPLE I. — $1{,}9 \times 4$.

Amenons la division 1 de la réglette *b* sur la division 1,9 de la règle B (fig. 158); en regard de la graduation 4 de la réglette nous lisons sur B le produit 7,6 de 1,9 par 4 car en prenant le module des échelles pour unité de longueur :

$$\overline{OA} = \log 1{,}9; \quad \overline{AB} = \log 4 \quad \text{et} \quad \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OB} = \log 1{,}9 + \log 4 = \log 7{,}6.$$

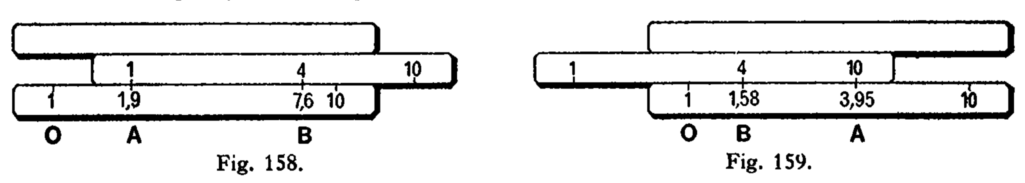


Fig. 158. Fig. 159.

EXEMPLE II. — $3{,}95 \times 4$.

En opérant comme ci-dessus la division 4 sort de la règle. Amenons la division 10 de la réglette sur la graduation 3,95 de la règle B.

En regard de la division 4 de la réglette nous lisons sur B : $1{,}58 = \frac{3{,}95 \times 4}{10}$ car (fig. 159) :

$$\overline{OA} = \log 3{,}95; \quad \overline{BA} = \log 10 - \log 4 \quad \text{et :}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{BA} = \log 3{,}95 - \log 10 + \log 4 = \log \frac{3{,}95 \times 4}{10}.$$

Des deux exemples précédents il résulte que :

Si les nombres a et b sont compris entre 1 *et* 10, *on amène la graduation* 1 *de la réglette sur la graduation a de la règle. En regard de la division b de la règlette on lit sur la règle le produit ab.*

Si la division b de la réglette sort de la règle, on amène la graduation 10 *de la réglette sur la division a de la règle; en regard de la graduation b de la réglette on lit sur la règle le produit* $\frac{ab}{10}$.

EXEMPLE III. — Les deux facteurs ne sont pas compris entre 1 et 10.

Soit à calculer : $27{,}5 \times 31 = 2{,}75 \times 3{,}1 \times 100$.

La règle donne $2{,}75 \times 3{,}1 = 8{,}52$. Donc le produit cherché est égal à 852. On dit mentalement le produit est compris entre $20 \times 30 = 600$ et $30 \times 40 = 1\,200$, ce qui permet de placer la virgule.

541. Produit de plusieurs nombres. — Supposons les virgules déplacées pour que les nombres donnés soient inférieurs à 10. On calcule d'abord $ab = m$ que l'on repère à l'aide du curseur sur l'échelle inférieure **B** de la règle. On calcule ensuite le produit $mc = abc$ comme ci-dessus. La place de la virgule se détermine ensuite mentalement.

542. Quotient de deux nombres. — On opère avec les échelles inférieures **B** et **b**.

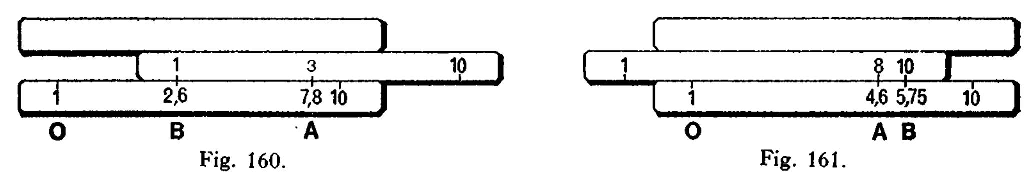


Fig. 160. Fig. 161.

EXEMPLE I. — $7{,}8 : 3$.

Amenons la division 3 de la réglette sur la division 7,8 de la règle. En regard de la division 1 de la réglette on lit sur la règle le quotient $2{,}6 = \frac{7{,}8}{3}$ car (fig. 160) :

$$\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{BA} \quad \text{et} \quad \overline{OA} = \log 7{,}8; \quad \overline{BA} = \log 3.$$

Donc : $$\overline{OB} = \log 7{,}8 - \log 3 = \log \frac{7{,}8}{3}.$$

EXEMPLE II. — 4,6 : 8.

Amenons la division 8 de la réglette sur la division 4,6 de la règle. En regard de la division 10 de la réglette nous lisons sur la règle le quotient :

$$5{,}75 = \frac{10 \times 4{,}6}{8} \text{ car (fig. 161) :}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad \text{et} \quad \overline{OA} = \log 4{,}6 ; \quad \overline{AB} = \log 10 - \log 8.$$

Donc : $\overline{OB} = \log 4{,}6 + \log 10 - \log 8 = \log \frac{4{,}6 \times 10}{8}.$

Des deux exemples précédents il résulte que :

Si a et b sont compris entre 1 *et* 10, *on amène la division b de la réglette sur la division a de la règle. En regard de la division* 1 *de la réglette on lit, sur la règle, le quotient cherché. Si la division* 1 *de la réglette sort de la règle, on lit* $\frac{10a}{b}$ *en regard de la division* 10 *de la réglette.*

REMARQUE. — Si a et b ne sont pas tous deux compris entre 1 et 10 on déplace les virgules pour se ramener au cas précédent. La virgule du quotient se place ensuite mentalement.

EXEMPLE : $\frac{460}{80} = \frac{4{,}6}{8} \times 10 = 5{,}75.$

543. Règle de trois simple. — Nous utiliserons les échelles supérieures $\mathbf{B^2}$ et $\mathbf{b^2}$ supposées graduées de 1 à 100. Les trois nombres a, b et c étant compris entre 1 et 10 il s'agit de calculer :

$$x = \frac{b \times c}{a}.$$

Il suffit d'un seul déplacement de la réglette :

On amène la division a de la réglette sur la division b de la règle. En regard de la division c de la réglette on lit, sur la règle, le nombre x cherché ou en regard de la division 10*c de la réglette on lit sur la règle le nombre* 10*x.*

1° Désignons par y le nombre de la règle qui se trouve en regard du nombre c de la réglette (fig. 162). L'égalité $\overline{BR} = \overline{AC}$ donne :

$$\log y - \log b = \log c - \log a$$

soit : $\frac{y}{b} = \frac{c}{a}$ donc $y = \frac{bc}{a} = x.$

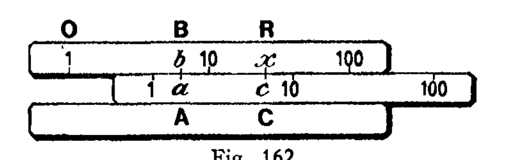


Fig. 162.

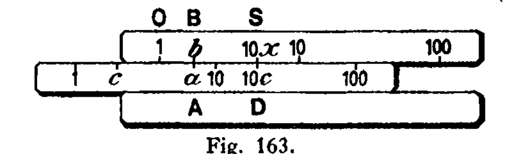


Fig. 163.

2° Désignons par y le nombre de la règle qui se trouve en regard du nombre 10c de la réglette (fig. 163). L'égalité $\overline{BS} = \overline{AD}$ donne :

$$\log y - \log b = \log 10c - \log a.$$

Soit : $\frac{y}{b} = \frac{10c}{a}$ donc $y = \frac{10bc}{a} = 10x.$

REMARQUES. — 1° Si a, b et c ne sont pas compris entre 1 et 10 un déplacement de virgules nous ramène au cas précédent. La virgule définitive du résultat s'obtient mentalement.

2° On peut opérer de même avec les échelles inférieures lorsque x est lui-même compris entre 1 et 10, cas auquel on peut facilement se ramener :

Pour $x = \frac{6 \times 7,9}{3,2} = \frac{12 \times 7,9}{6,4}$ on calculera $\frac{1,2 \times 7,9}{6,4} = 1,48 = \frac{x}{10}$.

Pour $y = \frac{2,3 \times 2,8}{8,5} = \frac{4,6 \times 2,8}{17}$ on calculera $\frac{4,6 \times 2,8}{1,7} = 7,58 = 10y$.

544. Règle de trois composée. — Pour calculer $x = \frac{abcd}{fgh}$ on calcule comme ci-dessus : $y = \frac{ab}{f}$ que l'on repère sur la règle à l'aide du curseur,

puis : $z = \frac{yc}{g}$ et $x = \frac{zd}{h}$.

En opérant à l'aide des échelles supérieures l'opération se fait par trois déplacements de la réglette en multipliant par 10, si besoin est, le facteur utilisé du dividende ou celui du diviseur :

Pour : $\frac{7,8 \times 9,6 \times 8,4}{1,3 \times 2,7}$ on effectue : $7,8 \times \frac{9,6}{1,3} \times \frac{8,4}{27} = 17,9$.

Pour : $\frac{1,7 \times 1,3 \times 2,4}{8,6 \times 7,9}$ on effectue : $1,7 \times \frac{13}{8,6} \times \frac{24}{7,9} = 7,92$.

545. Échelle des inverses. — A un nombre x de l'échelle inférieure **b** de la réglette correspond le nombre $\frac{10}{x}$ de l'échelle des inverses **a**.

Cette échelle permet de réaliser par un seul déplacement de la réglette les opérations suivantes sur les échelles inférieures.

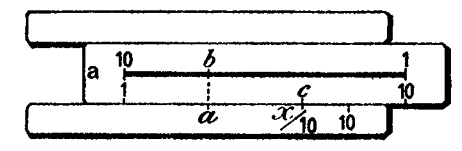


Fig. 164.

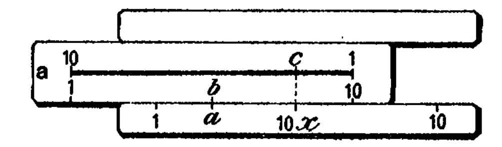


Fig. 165.

1° $x = a.b.c$ pour $10 < x < 100$. On amène b de l'échelle des inverses sur a de l'échelle inférieure **B** de la règle (fig. 164). En regard de c de l'échelle inférieure **b** de la réglette on lit sur la règle, le nombre $\frac{x}{10}$, car on a ainsi effectué $\frac{ac}{b'}$ avec $b' = \frac{10}{b}$.

2° $x = \frac{a}{b\,.c}$ pour $0,1 < x < 1$. On amène b de la réglette inférieure sur a de la règle inférieure (fig. 165). En regard de c de l'échelle des inverses on lit, sur la règle, $10x$ car on a ainsi effectué $\frac{ac'}{b}$ avec $c' = \frac{10}{c}$.

546. Carrés et racines carrées. — Si n et N *sont deux divisions correspondant à une même position du curseur sur les échelles* **B** et **B²** *de la règle (ou* **b** *et* **b²** *de la réglette), le nombre* N *est le carré de* n.

Les échelles B et B² ont pour modules respectifs en cm : l et $\frac{l}{2}$. Donc l'abscisse commune $\overline{OA}$ de ces deux divisions correspondantes est en cm :

$$\overline{OA} = l \log n = \frac{l}{2} \log N \implies \log N = 2 \log n \iff N = n^2 \text{ ou } n = \sqrt{N}.$$

On lit ainsi : $7,5^2 = 56,25$ et $\sqrt{6} = 2,45$.

Si n n'est pas compris entre 1 et 10 on multiplie ou on divise par une puissance de 10 convenable. Ainsi :

$$(0{,}075)^2 = \left(\frac{7{,}5}{10^2}\right)^2 = \frac{56{,}25}{10^4} = 0{,}005\,625.$$

Si N n'est pas compris entre 1 et 100, on multiplie ou on divise par une puissance de 100; ainsi :

$$\sqrt{600} = \sqrt{6 \times 10^2} = 10\sqrt{6} = 24{,}5.$$

REMARQUES. — 1° On obtient n^2 avec plus de précision en effectuant le produit $n \times n$ sur les échelles inférieures B et b.

2° On peut aussi amener n de l'échelle des inverses en regard de n de l'échelle inférieure B. On lit alors sur cette échelle inférieure $n^2 = \text{N}$ (pour $1 < \text{N} < 10$) en regard du 1 de l'échelle des inverses ou bien $\frac{\text{N}}{10}$ (pour $10 < \text{N} < 100$) en regard du 10 de l'échelle des inverses.

547. Cubes et racines cubiques. — L'échelle des cubes B^3 graduée de 1 à 1 000 est formée de trois échelles semblables à l'échelle inférieure B mais construites avec un module trois fois plus petit. Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'au nombre n de l'échelle inférieure B correspond le nombre N de l'échelle des cubes B^3 tels que :

$$\overline{\text{OA}} = l \log n = \frac{l}{3} \log \text{N}. \qquad \text{Donc :}$$

$$\log \text{N} = 3 \log n \iff \text{N} = n^3 \quad \text{et} \quad n = \sqrt[3]{\text{N}}.$$

On obtient par une lecture directe l'un des nombres connaissant l'autre.

1° Si la règle ne comporte pas une échelle des cubes ou si on désire plus de précision, on effectue $\text{N} = n \times n \times n$ sur les échelles inférieures.

2° On peut aussi retourner la réglette bout pour bout et amener la division n de l'échelle inférieure b de la réglette sur le nombre n de l'échelle supérieure B^2 de la règle. On lit alors sur cette échelle supérieure B^2 de la règle le nombre $n^3 = \text{N}$ (pour $1 < \text{N} < 100$) en regard du 1 de la réglètte ou $\frac{\text{N}}{100}$ (pour $100 < \text{N} < 1000$) en regard du 10 de la réglette inférieure (fig. 166 et 167).

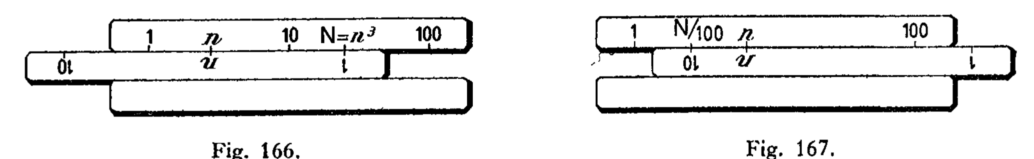


Fig. 166. Fig. 167.

Inversement si N (entre 1 et 1 000) est un nombre donné, on peut rétablir cette position de la réglette. En recherchant à l'aide du curseur le nombre n de la réglette inférieure qui coïncide avec son égal de la règle supérieure on obtient $n = \sqrt[3]{\text{N}}$.

548. Logarithmes. — Les mantisses des logarithmes décimaux des nombres de 1 à 10 se lisent sur l'échelle métrique L placée le long du bord inférieur de la règle.

A une même position du curseur correspondent les divisions x sur l'échelle inférieure **B** et $\log x$ sur l'échelle des logarithmes **L**. On en déduit $\log x$ connaissant x ou x connaissant $\log x$.

EXEMPLES.

1° Soit $a = 267$. En regard de 2,67 sur l'échelle inférieure de la règle on lit sur l'échelle des logarithmes : .4,27 = 0,427

$$\log 2{,}67 = 0{,}427 \quad \text{et} \quad \log 267 = 2{,}427.$$

2° Soit $\log x = \bar{1}{,}635$. En regard de .6,35 sur l'échelle des logarithmes on lit 4,31 sur l'échelle inférieure de la règle. Donc : $x = 0{,}431$.

549. Puissances et racines. — Le nombre a étant donné on peut déterminer log a et par conséquent calculer par une opération simple :

$$\log a^n = n \log a; \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a;$$

$$\log \frac{1}{a^n} = -n \log a; \qquad \log \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = -\frac{1}{n} \log a.$$

D'où on déduit par une simple lecture : a^n, $\sqrt[n]{a}$, $\frac{1}{a^n}$ ou $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

EXEMPLE. — *Calculer le nombre* : $x = \sqrt[7]{(472)^5}$.

On a : $\log x = \frac{1}{7} \log (472)^5 = \frac{5}{7} \log 472.$

On détermine à la règle : log 472 = 2,674.

Puis on calcule : $\log x = \frac{2,674 \times 5}{7} = \frac{13,37}{7} = 1,91.$

D'où à la règle $x = 81,3$.

550. Fonctions circulaires.

1[re] MÉTHODE. — Retirons la réglette de sa coulisse et replaçons-la après l'avoir retournée face pour face, de façon que l'échelle T vienne coïncider exactement avec l'échelle inférieure B de la règle. A une position donnée du curseur correspondent alors :

a) un arc α (de 5° 44′ environ à 90°) de l'échelle S et le nombre 10 sin α de l'échelle inférieure B de la règle.

b) un arc β (de 5° 43′ environ à 45°) de l'échelle T et le nombre 10 tg β de l'échelle inférieure B de la règle.

c) un arc γ (de 34′ à 5° 43′) de l'échelle S & T, et la valeur de 100γ en radians, soit très approximativement 100 sin γ ou 100 tg γ, sur l'échelle inférieure B de la règle.

— Faisons glisser la réglette vers la droite de façon à amener l'un des arcs α, β ou γ précédents en regard de la division 10 de l'échelle inférieure B. On lit alors, sur cette échelle, en regard de l'origine 1 de la réglette :

$$\frac{1}{\sin \alpha}; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} (90° - \alpha) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10\gamma} \; (\gamma \text{ en radians}).$$

2[e] MÉTHODE. — Sans retourner la réglette, on la fait glisser vers la droite de façon à amener l'un des arcs α, β ou γ en regard du repère du voyant situé à droite sous la règle. En regard de l'extrémité 10 de l'échelle inférieure **B** de la règle, on lit sur l'échelle **b** de la réglette : 10 sin α; 10 tg β ou 100 γ (exprimé en radians).

En regard de l'origine 1 de la réglette on lit sur l'échelle **B** de la règle :

$$\frac{1}{\sin \alpha}; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \beta \quad \text{ou} \quad \frac{1}{10\gamma} \; (\gamma \text{ en radians}).$$

On obtient ces mêmes résultats en utilisant le voyant de gauche sous la règle en regard de l'origine de B et de l'extrémité 10 de *b*.

551. Détermination d'un angle. — 1° En opérant dans l'ordre inverse on peut déterminer un angle connaissant son sinus ou sa tangente.

2° On détermine cos α en cherchant sin(90° — α) et tg β pour β compris entre 45° et 90° en cherchant cotg (90° — β).

3° Si α est un petit arc ($\alpha < 15°$), on détermine $\cos\alpha$ ou $\sin(90° - \alpha)$ d'une manière beaucoup plus précise en calculant le nombre ω mesure de α en radians. On a alors :

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = 1 - \frac{\omega^2}{2}.$$

On peut déterminer ω en utilisant l'échelle S & T ou, ayant exprimé l'arc α en α' minutes ou α'' secondes, utiliser les formules :

$$\omega = \frac{\pi\alpha'}{10\,800} = \frac{\pi\alpha''}{648\,000} \Longrightarrow \omega = \frac{\alpha'}{1\,000\,\rho'} = \frac{\alpha''}{100\,000\,\rho''}.$$

Les diviseurs : $\rho' = 3{,}438$ et $\rho'' = 2{,}0628$ sont inscrits sur les échelles inférieures B et *b*.

Exemple. $\alpha = 2°\,50' = 170'$. En amenant ρ' de la réglette inférieure en regard de 1,70 de la règle, on lit sur la règle supérieure en regard de l'extrémité de la réglette $(100\,\omega)^2 = 24{,}4$ (fig. 168).

Donc : $\frac{\omega^2}{2} = 0{,}00\,122$ et $\cos 2°\,50' = \sin 87°\,10' = 0{,}99878$.

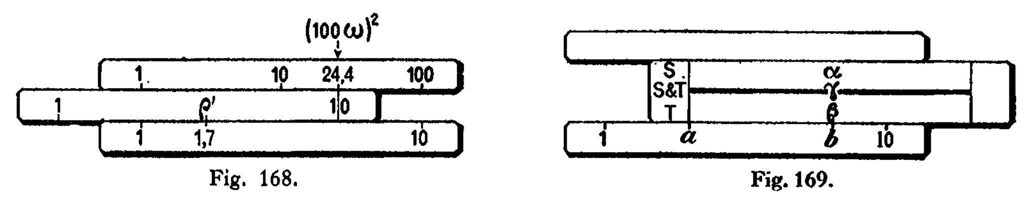


Fig. 168. Fig. 169.

552. Applications. — La réglette étant retournée face pour face (n° 550, fig. 169):

1° Amenons son origine 1 en regard de la division *a* de l'échelle inférieure B. On lit alors sur cette échelle, en regard des arcs α, β, ou γ des échelles S, T ou S & T les nombres :

$$10\,a\sin\alpha, \quad 10\,a\,\mathrm{tg}\,\beta \quad \text{et} \quad 100\,a\sin\gamma \neq 100\,a\,\mathrm{tg}\,\gamma.$$

Si les arcs α, β ou γ sortent de la règle, on recule vers la gauche, la réglette de toute sa longueur et on lit cette fois : $a\sin\alpha$, $a\,\mathrm{tg}\,\beta$ et $10\,a\sin\gamma$ ou $10\,a\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

Pour calculer $x = \frac{m}{n}\sin\alpha$, commencer par repérer au curseur $a = \frac{m}{n}$ avant de retourner la réglette.

2° En procédant dans l'ordre inverse on pourra calculer de même $\frac{b}{\sin\alpha}$ ou $b\,\mathrm{cotg}\,\beta$ ou encore si *a* et *b* sont des nombres donnés résoudre, par une seule opération, les équations :

$$a\sin x = b \quad \text{et} \quad a\,\mathrm{tg}\,x = b.$$

Exemples.

1° $23\sin x = 7{,}8$. En regard du 2,3 de la règle inférieure amenons l'origine de la réglette. En regard de 7,8 on lit alors sur l'échelle S : $x = 19°\,51'$;

2° $8{,}5\,\mathrm{tg}\,x = 3{,}4$. En regard du 8,5 de la règle amenons l'extrémité de la réglette. En regard de 3,4 on lit alors sur l'échelle T : $x = 21°\,47'$.

553. Remarque. — Si un arc de *g* grades vaut α' minutes et ω radians, on obtient :

$$\frac{\alpha'}{5\,400} = \frac{g}{100} \Longrightarrow \alpha' = 54\,g \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{\pi} = \frac{g}{200} \Longrightarrow \omega = \frac{\pi g}{200} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{g}{10\,\rho_{''}}.$$

Si S est l'aire d'un cercle de diamètre *d* on a : $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ou $S = \left(\frac{d}{C}\right)^2$.

Les diviseurs $\rho_{''} = 6{,}3662$ et $C = 1{,}1284$ figurent, ainsi que π sur les échelles **B** et **b**.

EXERCICES

N. B. *Effectuer à la règle les calculs des exercices* 963 à 971, 1138 à 1147 *et comparer les résultats à ceux que donne la table.*

1152. Calculer le poids d'un cylindre de révolution de 20 mm de diamètre, de 11 cm de hauteur, de densité 8,8.

1153. Trouver la hauteur d'un cône de révolution, dont le rayon de base mesure 17 cm et dont le volume vaut 12 dm^3.

1154. Un train parcourt 200 km en 2 h 15 mn. Combien parcourt-il en 1 h 45 mn?

1155. 17 m d'étoffe valent 8 823 F. Combien valent 13 m de la même étoffe?

1156. Une équipe de 18 ouvriers a mis 10 jours pour effectuer un travail. Combien de temps aurait mis une équipe de 5 ouvriers?

— Effectuer à la règle les opérations suivantes (on pourra vérifier les résultats à l'aide de la table de logarithmes) :

1157. $\frac{57 \times 62}{3,18}$. $\frac{2,32 \times 74}{0,655}$. $\frac{7,8 \times 2,56}{168}$.

1158. $\frac{0,83 \times 1,72}{5,63}$. $\frac{17,8 \times 15,6}{2,64}$. $\frac{2,34 \times 3,58}{8,6}$.

1159. $\frac{7,6 \times 2,35}{0,347}$. $\frac{5,5 \times 21,7}{3,42}$. $\frac{9,3 \times 342}{57,5}$.

1160. $\frac{8,4 \times 9,2 \times 1,18}{134 \times 243}$. $\frac{87 \times 216 \times 138 \times 43,6}{234 \times 426 \times 91}$.

1161. $\frac{172 \times 25,4 \times 9,5}{241 \times 163}$. $\frac{93 \times 159 \times 346 \times 2,75}{142 \times 425 \times 640}$.

1162. $5,7 \times 3,86 \times 0,47$. $4,65 \times 4,78 \times 5,34$.

1163. $2,42 \times 3,56 \times 0,94$. $3,84 \times 5,08 \times 2,77$.

1164. $\frac{0,234}{0,318 \times 0,464}$. $\frac{5,48 \times 4,28}{1,45 \times 2,64 \times 3,47}$.

1165. $\frac{0,384}{0,532 \times 0,645}$. $\frac{9,6 \times 3,24}{0,382 \times 15,7 \times 2,89}$.

— Calculer les expressions suivantes :

1166. $\sqrt{642}$. $\sqrt{0,474}$. $\sqrt{3,142}$.

1167. $\sqrt[3]{8,650}$. $\sqrt{0,0646}$. $\sqrt[3]{0,675}$.

1168. $(1,17)^9$. $(2,43)^7$. $(2716)^5$.

1169. $\frac{1}{(1,52)^7}$. $\frac{1}{(1,87)^5}$. $\frac{1}{(2,71)^6}$.

1170. $\sqrt[7]{186}$. $\sqrt{840}$. $\sqrt[10]{1\,740}$.

1171. $\sqrt[7]{(23,7)^5}$. $\sqrt[3]{(1,78)^7}$. $\sqrt[5]{(53,4)^9}$.

— Déterminer les rapports trigonométriques (sinus, cosinus, tangentes) des arcs suivants ainsi que leurs inverses et leurs carrés.

1172. 9° 37′ 17° 45′. 36° 30′.

1173. 52° 40′. 67° 26′. 87° 24′.

1174. 4,36 grades. 37,45 gr. 93,52 gr.

— Effectuer les opérations suivantes :

1175. $(\sin 33^\circ 15')^2$. $(\text{tg } 42^\circ 10')^3$. $\sqrt[5]{\sin 32^\circ 40'}$.

1176. $\sin 33^\circ \times \cos 19^\circ$. $\dfrac{\sin 58^\circ 40'}{\text{tg } 17^\circ 25'}$. $\dfrac{\sqrt{\sin 37^\circ}}{\sqrt{\text{tg } 28^\circ}}$.

1177. $\dfrac{132 \sin 24^\circ 30'}{58{,}7 \cos 35^\circ 30'}$. $\dfrac{5{,}7 \text{ tg } 19^\circ 52'}{2{,}34 \cos 28^\circ}$. $\dfrac{21{,}5 \text{ tg } 3^\circ 42'}{6{,}8 \sin 4^\circ 23'}$.

— Déterminer l'arc x en degrés, puis en radians, tel que :

1178. $\sin x = 0{,}375$. $\text{tg } x = 0{,}68$. $\text{tg } x = 3{,}47$.

1179. $\cos x = 0{,}0472$. $\text{cotg } x = 0{,}057$. $\text{tg } x = 25{,}3$.

1180. $\sin x = \dfrac{17{,}3}{28{,}4}$. $\text{tg } x = \dfrac{6{,}8}{2{,}38}$. $\cos x = \dfrac{2{,}83}{4{,}55}$.

1181. $\cos x = \dfrac{3{,}4 \sin 58^\circ}{4{,}35}$. $\text{cotg } x = \dfrac{4{,}7}{2 \sin 8^\circ}$. $\text{tg } x = \dfrac{3{,}4 \sin 42^\circ}{2{,}73}$.

PROBLÈMES DE RÉVISION

1182. 1° Démontrer que si $f(x)$ est divisible par $(x - \alpha)^2$, sa dérivée $f'(x)$ est divisible par $x - \alpha$ et que, réciproquement, si un polynôme $f(x)$ divisible par $x - \alpha$, a une dérivée elle-même divisible par $(x - \alpha)$, $f(x)$ est divisible par $(x - \alpha)^2$.

2° En déduire que, pour que l'équation $f(x) = 0$, dans laquelle $f(x)$ est un polynôme, ait une racine double, il faut et il suffit que les deux équations : $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ aient une racine commune.

3° Déterminer a de façon que la courbe représentative de la fonction $y = x^3 - ax^2 + 1$ soit tangente à la droite d'équation $y = 5$ et construire la courbe correspondante.

4° La droite d'équation $y = 5$ touche la courbe précédente en un point A et la rencontre à nouveau en un point B dont on calculera l'abscisse.

5° Chaque courbe d'équation $y = x^3 - ax^2 + 1$ a un maximum et un minimum. On demande les lieux décrits par ce maximum et ce minimum quand a varie.

1183. 1° m étant un paramètre, on considère le système de 3 équations à 3 inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + (m+1)y + z = 2 + m - m^2 & (1) \\ mx + y - z = 0 & (2) \\ x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2 & (3) \end{cases}$$

Résoudre et discuter le système. Examiner les cas particuliers de $m = -1$, $m = 2$; $m = -2$. Montrer que, lorsque la solution du système est unique, elle vérifie la relation : $x + y + z = 2$. (4).

2° On donne un repère orthonormé xOy. On prend sur Ox un point A tel que : $\overline{OA} = \dfrac{2m}{1+m}$ et sur Oy un point B tel que $\overline{OB} = 1 - m$. On considère le triangle rectangle OAB. Calculer en fonction de m le périmètre $2p$ de ce triangle. On trouvera pour $2p$ des expressions analytiques différentes quand m varie dans chacun des intervalles suivants : $m < 1$; $-1 < m < 0$; $0 < m < 1$; $m > 1$. Courbe représentative des variations de $2p$ en fonction de m. Interpréter géométriquement la relation (4) lorsque $0 < m < 1$.

3° Trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle OAB. Montrer que ce cercle est tangent au cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.
Interpréter géométriquement.

1184. 1° Établir par récurrence qu'un polynôme de degré n est déterminé par les valeurs qu'il prend pour $(n + 1)$ valeurs de la variable.

2° Vérifier que le polynôme : $P_1(x) = A\dfrac{x-b}{a-b} + B\dfrac{x-a}{b-a}$ $\quad (a \neq b)$
est le seul polynôme du premier degré tel que : $P(a) = A$ et $P(b) = B$.

3° Montrer que si a, b, c sont trois nombres distincts le polynôme :

$$P_2(x) = \frac{A(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{B(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{C(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

est le seul polynôme du second degré tel que : $P(a) = A$; $P(b) = B$ et $P(c) = C$.

4° Généraliser pour le polynôme de degré n :

$$P(x) = \frac{A(x-b)(x-c)\dots(x-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} + \dots + \frac{L(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}$$

où $a, b, c \dots l$ sont $n+1$ constantes distinctes.

5° Faisons A = B = C... = 1 dans les paragraphes précédents. En déduire les identités :

$$\frac{x-b}{a-b} + \frac{x-a}{b-a} \equiv 1;$$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \equiv 1, \text{ etc.}$$

Par identification, démontrer que, pour 3 nombres distincts, a, b, et c :

$$\Sigma \frac{1}{(a-b)(a-c)} = 0; \qquad \Sigma \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} = 0; \qquad \Sigma \frac{bc}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

6° On suppose : A = a; B = b; C = c... Montrer que les polynômes P_1, P_2, P_3... sont identiques à x. Quelles relations en déduit-on ?

7° a, b, c étant trois nombres distincts, on considère : $P(x) = \Sigma \dfrac{a^3(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$.

Montrer que le polynône $P(x) - x^3$ a pour racines a, b et c et établir les relations :

$$\Sigma \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} = a+b+c; \qquad \Sigma \frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} = ab+bc+ca.$$

1185. On considère dans un repère orthonormé les droites (D) d'équation :

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \lambda; \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

1° Discuter suivant les valeurs du paramètre λ l'intersection de (D) et de la parabole (P) d'équation

$$y^2 = 2px.$$

Lorsqu'il n'y a qu'un point d'intersection, déterminer en fonction de φ les coordonnées de ce point et montrer que (D) est tangente à (P).

2° On suppose que λ garde cette valeur particulière correspondant au cas où (D) est tangente à (P). Exprimer en fonction de tg φ et tg φ' les coordonnées du point d'intersection de deux droites (D) et (D') correspondant aux valeurs φ et φ' du paramètre. En déduire le lieu des points d'où l'on peut mener à (P) deux tangentes perpendiculaires.

Trouver l'équation de la droite joignant les deux points de contact et montrer qu'elle passe par un point fixe.

Calculer la distance des points de contact. Pour quelle valeur de φ est-elle minima ?

3° On considère les trois droites (D_1), (D_2), (D_3) correspondant aux valeurs $\varphi - \frac{\pi}{3}$, φ, $\varphi + \frac{\pi}{3}$ du paramètre φ. Ces trois droites se coupent en A, B, C.

Calculer les côtés du triangle ABC en fonction de φ. Montrer que ce triangle est équilatéral.

4° Calculer $y = \overline{AB}^2$ en fonction de $\text{tg}^2\varphi = t$ et étudier les variations de y si t varie de 0 à $+\infty$.

1186. Soient un triangle quelconque ABC; O et R le centre et le rayon du cercle circonscrit; A', B', C' les milieux des côtés; A'', B'', C'' les pieds des hauteurs AA'', BB'', CC'' (A' et A'' sont sur le côté BC = a).

1° Établir la relation : $\cos A^2 + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.

Exprimer le rapport $\dfrac{\overrightarrow{A'A''}}{\overrightarrow{BC}}$ en fonction des mesures des côtés; donner ensuite une expression trigonométrique simple de ce rapport. Les deux autres rapports analogues seront considérés comme grandeurs albébriques et leurs expressions se déduiront de la précédente par permutation circulaire.

2° Soit le système de trois équations aux trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} (y+1)(z-1) = 4\,L \\ (z+1)(x-1) = 4\,M \\ (x+1)(y-1) = 4\,N \end{cases}$$

où L, M, N sont d'abord des nombres donnés et quelconques. Montrer que la résolution de ce système dépend d'une équation du 2e degré. Les solutions seront exprimées, dans le cas d'existence, en fonction de L, M, N et d'un nombre K défini par l'égalité : $K^2 = (L + M + N + 1)^2 + 4\,LMN$.

3° On particularise la question précédente en posant maintenant pour toute la suite du problème

$$L = -\cos^2 A; \qquad M = -\cos^2 B; \qquad N = -\cos^2 C$$

A, B, C représentant les angles d'un même triangle ABC; constater que ce choix donné correspond à un cas de *solution double*. Confronter les expressions des inconnues avec les rapports $\dfrac{\overrightarrow{A'A''}}{\overrightarrow{BC}}$ du 1°.

4° Calculer la valeur (remarquable) de l'expression : $xyz + x + y + z$. Du résultat de ce calcul, déduire une relation entre les trois rapports $\dfrac{\overrightarrow{A'A''}}{\overrightarrow{BC}}$ indépendante des autres éléments du triangle.

1187. On considère deux axes rectangulaires Ox, Oy et la droite (D) d'équation :

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab,$$

a et b étant deux constantes ($a > b > 0$), et φ un paramètre compris entre 0 et 2π.

1° Pour quelles valeurs de φ la droite (D) est-elle parallèle à Ox, ou parallèle à Oy ? Pour quelles valeurs de φ a-t-elle un coefficient directeur donné m ?

2° Pour quelles valeurs de φ la droite (D) passe-t-elle par un point donné M du plan, de coordonnées x_0, y_0. Discuter. Reconnaître en particulier les points du plan par lesquels passe une seule droite.

3° Dans les cas où il passe par M (x_0, y_0) deux droites correspondant à deux valeurs φ_1 et φ_2 du paramètre, écrire la condition liant φ_1 et φ_2 pour que ces deux droites soient rectangulaires et en déduire la relation qui existe entre les coordonnées x_0, y_0 de M pour qu'il en soit ainsi. A quelle courbe appartient le point M ?

1188. Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires. On considère une droite PQ passant par le point A de coordonnée $x = a$; $y = a$. On désigne par P son point de rencontre avec Ox, par Q son point de rencontre avec Oy.

1° Écrire la relation qui existe entre l'abscisse p de P et l'ordonnée q de Q. Lieu du milieu du segment PQ.

2° Déterminer p et q de façon que le segment PQ ait une longueur donnée l; on formera une équation du 2e degré admettant p et q pour racines. Discuter et interpréter géométriquement les résultats.

3° Déterminer la tangente de l'angle orienté des droites OA et PQ de façon que le segment PQ ait une longueur donnée l. Retrouver les résultats de la discussion précédente.

1189. Soient un cercle C, de centre O et de rayon R, et deux axes rectangulaires Ox et Oy issus de O. On définit un point quelconque A de C par $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$ et l'on pose : $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t$.

1° On considère les points A_1 et A_2 de C définis par les angles α_1 et α_2. Écrire l'équation de la droite. A_1A_2. Montrer que la condition pour que cette droite passe par un point fixe P de Ox d'abscisse a s'écrit :

$$(1) \qquad a\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = R\cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}.$$

Que devient cette condition en introduisant t_1 et t_2 ?

2° Cette condition étant remplie, on mène par A_1 la parallèle à Ox qui coupe C en A_3.
De la relation immédiate qui existe entre t_1 et t_3, déduire la relation entre t_2 et t_3.

Calculer l'angle $\varphi = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$; étudier la variation de $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ quand A_1A_2 tourne autour de P. Discuter.

3° Pour quelles positions de A_2 l'angle φ est-il droit ? Examiner le cas : $R = 1$; $a = \frac{11}{9}$.

1190. 1° On considère l'équation : $x^2 + y^2 - 2xy - m^2 = 0$
en coordonnées orthonormées dans le plan : montrer qu'elle représente deux droites A et A′ dont on précisera la position; distance de ces deux droites.

2° Montrer que l'expression : $x^2(1 - \sin 2\alpha) + y^2(1 + \sin 2\alpha) - xy\cos 2\alpha$ est le carré parfait d'un polynôme du 1er degré que l'on déterminera. En déduire que l'équation :

$$x^2(1 - \sin 2\alpha) + y^2(1 + 2\sin\alpha) - 2xy\cos 2\alpha - m^2 = 0$$

représente deux droites B et B′ dont on précisera la position; distance de ces deux droites.

3° Quels sont les angles formés avec l'axe Ox par les droites A, A′ B, B′ ? Prouver que les quatre droites sont tangentes à un cercle fixe quand α varie, et en déduire qu'on peut passer par une transformation géométrique simple des droites A, A′ aux droites B, B′.

1191. On donne un demi-cercle de diamètre AB, de centre O et de rayon a. Par un point H du segment AB on élève la perpendiculaire qui coupe le demi-cercle en M. Sur la demi-droite HM on considère le point P tel que : $HP = \lambda\, HM$ (λ nombre positif donné). Soit Q la projection orthogonale de P sur la tangente en B au demi-cercle.

1° Exprimer en fonction de a et de $\overline{OH} = x$ (sens positif AB) la somme $y = AP^2 + PQ^2$. Étudier les variations de y. La somme $AP^2 + PQ^2$ peut-elle conserver une valeur constante ? Quel est le lieu du point P dans ce cas ?

2° Exprimer en fonction de a et de x la somme $z = AP + PQ$. Étudier les variations de z quand M décrit le demi-cercle. Construire la courbe représentative en prenant $a = 2$ cm et $\lambda = 2$.

3° Déterminer x pour que l'on ait : $AP + PQ = ka$
k désignant un nombre positif donné. Discuter suivant la valeur de k. Rapprocher les résultats de la discussion de ceux trouvés au paragraphe précédent.

4° Soit C le point de la tangente en A au demi-cercle à la distance $AC = 2a$. Calculer en fonction de a et de l'angle $\widehat{BOM} = \theta$ le rapport $u = \frac{MA^2}{MC^2}$.

Étudier les variations de u quand θ varie de 0 à π. Déterminer θ pour que $\frac{MA}{MC}$ ait une valeur donnée m. Discuter.

1192. 1° u désignant la mesure, en radians, d'un angle et v étant égal à $\frac{\pi}{4} - u$, montrer que les expressions $\sin u + \cos u$ et $\sin u \cos u$ peuvent s'exprimer en fonction de $\cos v = x$. En déduire l'expression de $\frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2}\sin u \cos u}$ en fonction de x.

2° Étudier la variation de la fonction $y = \frac{2x}{2x^2 - 1}$, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, et construire la courbe représentative, (C), rapportée à un repère orthonormé xOy. On précisera, en particulier, la tangente à l'origine. On prendra l'unité de longueur sur les deux axes, égale à 2 cm.

3° Une parallèle à $x'Ox$, d'ordonnée variable m, coupe la courbe (C), en général, en deux points, M et M′, et la droite $y'Oy$ en un point, H. Évaluer la puissance de H par rapport au cercle de diamètre MM′. Montrer que ce cercle découpe sur $y'Oy$ un segment de longueur constante quand m varie. Calculer en fonction de m les abscisses X_1, du centre I de ce cercle et X_2 du pôle J de la droite $y'Oy$ par rapport à ce cercle. Évaluer ensuite m en fonction de X_1 d'une part et en fonction de X_2 d'autre part. Construire sur le graphique précédent les lieux des points I et J quand m varie.

4° On se propose d'utiliser la courbe (C) pour résoudre l'équation suivante en u :

$$\sin u + \cos u = m\sqrt{2}\sin u \cos u \qquad (1)$$

et l'on se borne aux solutions de cette équation dont la mesure en radians est comprise entre 0 et 2π. Discuter, en fonction du paramètre m, le nombre des racines de cette équation. On achèvera les calculs pour les valeurs particulières de m intervenant dans la discussion.

1193. On donne un repère orthonormé xOy et un carré OABC dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées :

$$A\,(x = 1, y = 1); \qquad B\,(x = 0, y = 2) \qquad C\,(x = -1; y = 1)$$

Soit F $(x = 0; y = 1)$ le centre de ce carré et soit P la parabole de foyer F et de directrice Ox. Cette parabole passe en A et C.

1° Quelle est l'équation de P ? Trouver le 2e point de rencontre D de la droite BC et de la parabole P. Construire les tangentes à P aux points A, C et D.

2° Soit M un point quelconque de P et x son abscisse. Montrer que la puissance quelconque de M par rapport au cercle de diamètre CD a pour valeur :

$$\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3) \qquad (1)$$

Déduire de la formule (1) la position de la parabole P par rapport au cercle de diamètre CD. Étudier les variations de la fonction (1) quand x varie et construire la courbe représentative.

3° Sur la perpendiculaire menée en O au plan xOy, on porte une longueur OS égale à OA. Soit Σ la sphère inscrite dans le cube qui a pour arêtes OS, OA et OC. Montrer que la parabole P est sur le cône qui a pour sommet S et qui est circonscrit à la sphère Σ.

1194. 1° Étudier la variation de la fonction : $y = \dfrac{x-a}{x^2+1}$ où a est une constante donnée. Construire la courbe représentative C_a. On désigne par P, Q les points de cette courbe où la tangente est parallèle à Ox, par p et q les projections orthogonales de P et Q sur Ox. Montrer que le cercle de diamètre pq passe par deux points de Oy indépendants de a. Trouver, quand a varie, le lieu de P et de Q.

2° a étant de nouveau fixe, on mène par le point I où C_a rencontre Ox une droite de coefficient directeur m, coupant C_a en deux nouveaux points M_1, M_2. Former l'équation du 2e degré ayant pour racines les abscisses de M_1 et M_2.

3° Trouver, quand m varie, le lieu du milieu du segment M_1M_2. Vers quelle valeur doit tendre m pour que l'un des points tende vers I ? Vers quelle valeur doit tendre m pour que M_1 et M_2 tendent à se confondre ?

Utiliser tous les résultats pour améliorer le tracé de C_a $\left(\text{On choisira pour la figure } a = \frac{4}{3}.\right)$

4° φ étant une constante donnée, étudier la variation de la fonction v de la variable u :

$$v = \frac{\cos u \sin(u - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

En certains points de la courbe représentative $\Gamma\varphi$, la tangente est parallèle à l'axe des u. Lieu de ces points quand φ varie. Indiquer un calcul donnant une confirmation du lieu de P et Q trouvé dans 1°.

1195. On donne un repère orthonormé xOy. On marque sur Ox le point A d'abscisse $+1$ et sur Oy le point B d'ordonnée $+1$.

Un point M variable décrit $x'x$, la droite BM coupe en N la parallèle à Oy menée par A.

1° Calculer en fonction de l'abscisse x du point M la différence $y = \text{AM} - \text{AN}$. Cette différence a-t-elle la même expression algébrique quelle que soit la position du point M sur l'axe $x'x$?

2° Déterminer toutes les positions du point M pour lesquelles $y = -\frac{1}{2}$.

3° Étudier et représenter graphiquement les variations de y quand M décrit $x'x$.

4° M décrivant seulement la demi-droite Ox, on pose $\widehat{\text{OBM}} = \varphi$. Calculer en fonction de φ l'expression $z = \dfrac{1}{\text{BM}} + \dfrac{1}{\text{BN}}$. Variation et représentation graphique de z.

1196. 1° On détermine expérimentalement une inconnue x. On l'a mesurée n fois et on a trouvé pour mesures les nombres $x_1, x_2 \ldots x_n$. On convient de choisir pour valeur de cette inconnue la valeur x qui rend minimum l'expression

$$E = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2.$$

a) Déterminer au moyen de $x_1, \dots x_n$ la valeur x ainsi choisie.

b) Donner l'expression de ce minimum au moyen de $x_1, \dots x_n$.

2° On détermine expérimentalement deux inconnues x et y dont on sait que $x + y = a$ (a : nombre connu) :

n mesures de x donnent les nombres $x_1, x_2, \dots x_n$.

n mesures de y donnent les nombres $y_1, y_2, \dots y_n$.

On convient de choisir pour x et y les valeurs qui rendent minimum l'expression :

$F = (x - x_1)^2 + \dots + (x - x_n)^2 + (y - y_1)^2 + \dots + (y - y_n)^2$.

a) Exprimer F au moyen de la seule variable x.

b) Déterminer x, puis y au moyen de a et des mesures $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$.

c) Calculer numériquement x et y pour les cas où : $x + y = 100; n = 4$.

$$x_1 = 75 \;;\quad x_2 = 75{,}2;\quad x_3 = 75{,}1;\quad x_4 = 75{,}3$$
$$y_1 = 24{,}8;\quad y_2 = 25{,}2;\quad y_3 = 24{,}9;\quad y_4 = 24{,}9.$$

3° L'étude expérimentale d'une fonction $y = f(x)$ a donné pour des valeurs $x_1, x_2 \dots, x_n$ de la variable x les valeurs correspondantes $y_1, y_2, \dots y_n$ de la fonction y.

Rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires, le graphe des n points de coordonnées $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ indique que ces points sont sensiblement en ligne droite avec l'origine des coordonnées, on adopte alors comme loi de relation entre x et y la loi $y = mx$.

a) Déterminer m en fonction de $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_n$ de manière que l'expression

$$S = (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + \dots + (y_n - mx_n)^2$$

soit minimum. Calculer m dans le cas où l'on a fait 4 mesures et trouvé

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1{,}98 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 4$$
$$y_1 = 2{,}02 \qquad y_2 = 4 \qquad y_3 = 5{,}98 \qquad y_4 = 8{,}02.$$

b) Déterminer m en fonction de $x_1 \dots, x_n \dots, y_1 \dots, y_n$ de manière que l'expression

$$T = \left(\frac{y_1}{m} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_2}{m} - x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{m} - x_n\right)^2$$

soit minimum. Calculer m pour les 4 mesures précédentes.

c) Établir une relation simple entre S, T, m et montrer que S et T ne peuvent être minimum pour la même valeur de m que si l'on a :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \dots = \frac{y_n}{x_n}.$$

1197. Dans un repère orthonormé xOy on donne deux points fixes, A (de coordonnées $x = -a, y = 0$) et B (de coordonnées $x = a, y = 0$). Un point H d'ordonnée t *positive* varie sur Oy. Enfin, k étant un nombre constant, non nul et différent de 1, on considère le point P variable sur $y'Oy$ défini par $\dfrac{\overline{PH}}{\overline{PO}} = k$.

On appelle (C) le cercle circonscrit au triangle APB et D la droite d'équation $y = t$.

1° *a*) Calculer, en fonction de a, k et t, l'ordonnée de P et celle du point Q diamétralement opposé à P sur (C).

b) En supposant $k > 1$, comment faut-il choisir t pour que D coupe (C) en deux points, distincts ou confondus ? Étudier l'intersection de D et de (C) quand $k < 1$.

2° Lorsque D et (C) se coupent, on appelle M celui de leurs deux points communs dont l'abscisse x est positive. Calculer x^2 en fonction de a, k et t. Étudier les variations de x^2 en fonction de t, en distinguant les cas $0 < k < 1$ et $k > 1$.

3° *a*) Calculer MA² et MB² en fonction de a, x et t. Exprimer ensuite ces deux grandeurs en fonction seulement de a, k et x.

b) Calculer MA, MB, MA + MB, MA — MB en fonction de a, k et x. On distinguera les cas $0 < k < 1$ et $k > 1$. En déduire, dans ces deux cas, le lieu de M quand t varie.

4° Les lieux obtenus pour deux valeurs de k inverses l'une de l'autre, à savoir $k = h$ et $k' = \frac{1}{h}$ (h donné plus grand que 1) se coupent en un point I. Calculer $IA + IB$ et $IA - IB$ en fonction de a et h. En déduire le lieu de I quand h varie de 1 à $+\infty$.

1198. Étant donné un repère orthonormé xOy on appelle T la transformation ponctuelle qui, au point M de coordonnées x et y ($xy \neq 0$), associe le point M' de coordonnées : $x' = \frac{a^2}{x}$ et $y' = \frac{a^2}{y}$, a étant une longueur donnée.

A. — 1° Montrer que la transformation T est involutive (c'est-à-dire qu'au point M' elle associe le point M) et qu'elle admet quatre points doubles.

2° Montrer que les droites OM et OM' sont symétriques par rapport aux bissectrices des droites Ox et Oy.

3° Soient P et Q les projections de M sur Ox et Oy, P' et Q' celles de M'. Montrer que P et P' d'une part, Q et Q' d'autre part sont conjugués harmoniques par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon a. En déduire que PQ et P'Q' sont les polaires respectives de M' et de M par rapport à (C).

4° PQ et P'Q' se coupent en I. Montrer que MM' est perpendiculaire à OI.

B. — Dans toute la suite du problème, M décrit la parabole (P) d'équation $ay = x^2$.

1° Calculer, en fonction de l'abscisse x de M, les coordonnées de M'. En déduire que la parabole (P) est globalement invariante dans la transformation T.

2° Montrer que la droite MM' passe par le point fixe J de coordonnées $(0, -a)$. En déduire le lieu géométrique du point I.

3° La parabole (P) passe par deux des points doubles de la transformation T. Monter que les tangentes en ces deux points à la parabole passent par J.

4° Montrer que les droites JP et OM' sont parallèles, ainsi que JP' et OM. En déduire l'enveloppe des droites PQ et P'Q'.

1199. Dans un triangle ABC, la médiatrice de BC coupe BC en M, AC en D et la droite AB en E. Dans toutes les parties du problème, les triangles ABC sont tels que $AC > AB$ et que $\frac{DA}{DC} = k$ nombre positif donné.

1° Évaluer en fonction de k les rapports $\frac{\overline{EA}}{\overline{BE}}$ et $\frac{\overline{ME}}{\overline{MD}}$. Montrer que les côtés du triangle sont liés par la relation : $b^2 - c^2 = ka^2$.

Deux des sommets du triangle étant donnés, trouver les lieux du troisième sommet et des points D et E.

a) On donne B et C. *b*) On donne C et A. *c*) On donne A et B.

2° Montrer que les angles du triangle vérifient la relation : $\sin(B - C) = k \sin(B + C)$. En déduire que les quantités :

$$\frac{\sin B \cos C}{\sin A}, \quad \frac{\sin C \cos B}{\sin A}, \quad \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}, \quad \frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A}$$

s'expriment en fonction de k et donner leurs expressions.

3° Connaissant l'angle A, calculer les angles B et C. Discuter.

4° Construire géométriquement le triangle ABC, connaissant l'angle A et le côté $BC = a$. Discuter.

1200. 1° Soit la courbe (C) d'équation : $y = \frac{mx - 5}{x^2 - 1}$, m étant un paramètre différent de ± 5. Construire cette courbe dans un repère orthonormé pour $m = 1$ et $m = 6$.

2° Préciser les différentes formes de courbes suivant les valeurs de m.

3° Montrer que les courbes (C) passent par un point fixe. Deux courbes (C) peuvent-elles avoir un autre point commun ? Peuvent-elles être tangentes ?

4° Déterminer m pour que la fonction y passe par un maximum ou un minimum pour $x = 2$. Tracer la courbe correspondante.

5° On coupe cette dernière courbe par la parallèle à Ox d'ordonnée $y = a$. On obtient, en général deux points d'intersection, M et M' qui se projettent sur Ox en P et P'. Montrer que les cercles de diamètre PP' forment un faisceau ayant pour axe radical la parallèle à Oy menée par le point de rencontre de la courbe avec son asymptote horizontale. Ce faisceau a-t-il des points limites ? Si oui, déterminer ces points.

1201. A. — 1° Montrer que la quantité $\sqrt{x^2 - 1} + x$ est positive si $1 < x$ et négative si $x < -1$.

2° Trouver les limites des expressions suivantes :

$$\sqrt{x^2 - 1} + x, \qquad \text{quand } x \to +\infty ;$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}, \qquad \text{quand } x \to +\infty .$$

$$[\sqrt{x^2 - 1} + x] - 2x, \qquad \text{quand } x \to +\infty .$$

Montrer que $\sqrt{x^2 - 1} + x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

Trouver les limites de $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

B. — On considère la fonction :

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

1° Préciser les intervalles de variation et les valeurs de y aux bornes de ces intervalles.

2° Calculer la dérivée de y et étudier son signe. En déduire le sens de variation de y.

3° Tracer la courbe représentative (γ). Pour cela, on montrera qu'elle admet deux asymptotes, d'équations $y = 0$ et $y = 2x$.

4° On associe à tout point M de (γ) de coordonnées (a, b) son symétrique M_1 par rapport à l'origine des coordonnées. Trouver une relation entre les coordonnées de M_1. Tracer la courbe (γ_1) lieu de M_1. Montrer que la courbe (Γ) formée de (γ) et de (γ_1) représente le lieu des points dont les coordonnées vérifient la relation $(y - x)^2 - x^2 + 1 = 0$.

C. — On considère l'équation du second degré :

$$(a - 1)\,t^2 + 2\,(b - a)\,t + (a + 1) = 0,$$

où t est l'inconnue, a et b étant les coordonnées d'un point M d'un plan. (E)

1° Quelle relation doivent vérifier les paramètres a et b pour que (E) ait une racine double ? Trouver le lieu des points M du plan dont les coordonnées vérifient cette relation.

2° Quelle condition doivent vérifier a et b pour que (E) ait deux racines distinctes ? Dans quelle région du plan doit-on choisir M pour qu'il en soit ainsi ?

1202. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{3x^2}{3x^2 + 2x - 1}$.

Construire la courbe représentative (C) par rapport à un repère orthonormé (asymptotes; point d'intersection, A, de la courbe avec son asymptote parallèle à $x'x$; tangente en ce point).

2° Soit D la droite d'équation $y = k$, où k désigne un nombre relatif donné. Étudier, suivant la valeur de k, le nombre de points communs à D et (C), d'abord d'après le graphique, ensuite par le calcul.

k étant choisi de telle façon que D et (C) aient deux points communs, M et M', et H et H' étant leurs projections sur l'axe des x, démontrer que le cercle (Γ) de diamètre HH' appartient, quel que soit k, à un même faisceau (F), à points limites, ces derniers étant les projections sur l'axe des x des points de (C) où la tangente a une pente nulle. Que devient le cercle (Γ) quand k tend vers l'infini ?

Vérifier que l'axe radical du faisceau (F) passe par le point A. Ce fait pouvait-il être prévu ?

3° Soit Δ la droite d'équation $y = mx$, où m désigne un nombre relatif donné. Montrer que Δ et (C) ont, en général, en dehors du point O, deux points communs, P et P'. Démontrer que, N et N' étant les projections de ces points sur l'axe des x, la puissance du point O par rapport au cercle (γ) de diamètre NN' a une valeur indépendante de m. En conclure que le cercle (γ) appartient, quel que soit m,

à un même faisceau (Φ), à points de base. Que devient le cercle (γ) quand m tend vers l'infini ? En déduire l'existence d'un cercle commun aux faisceaux (F) et (Φ). Peuvent-ils en avoir d'autres ?

4° Calculer, en fonction de m, les coordonnées du point φ où la polaire du point O par rapport à (γ) coupe Δ. En déduire l'équation du lieu de ce point. Ce lieu est une courbe (L) ayant deux asymptotes, que l'on déterminera. Construire celle des branches de cette courbe qui passe par le point O.

1203. 1° Déterminer b, c et d pour que la courbe représentative de la fonction : $y = \dfrac{x^2 + bx + c}{x^2 + dx - 2}$ passe par l'origine O des coordonnées, soit tangente en O à Ox et admette pour asymptote la droite d'équation $x = 1$.

Étudier les variations de la fonction y ainsi déterminée et construire la courbe représentative (C), de cette fonction dans un repère orthonormé.

2° On coupe la courbe (C) par une droite (D), passant par O, d'équation $y = mx$, où m est un paramètre donné différent de 0. Montrer que cette droite coupe (C) en deux points, P et Q autres que O. Calculer les coordonnées du conjugué harmonique I de O par rapport à P et Q, quand il existe; pour quelles valeurs de m en est-il ainsi ? Chercher l'équation du lieu L de I quand m varie. Construire L (on déterminera avec précision les asymptotes de L et son centre de symétrie).

3° On considère les projections R et S des points P et Q sur Ox et le cercle T de diamètre RS. Monrrer que le cercle T passe, quand m varie, par deux points fixes, A et B, situés sur Oy.

On appelle F le point de coordonnées $x = 4$, $y = 8$; on considère la conique U de foyer F et de cercle principal T, quand elle existe. Pour quels cercles U en est-il ainsi ? Montrer que la directrice de U associée à F passe par un point fixe, quand m varie. Construire avec précision ce point fixe. Parmi les coniques U, y a-t-il des hyperboles équilatères ?

1204. 1° Construire la courbe C représentant les variations, dans un repère orthonormé, de la fonction : $y = \dfrac{1}{10}[x^4 - 10x^2 + 9]$.

2° Cette courbe rencontre l'axe Ox en quatre points a, b, c, d dont les abscisses sont rangées par ordre de grandeur croissante. Calculer les aires limitées par les arcs ab, bc, cd de la courbe C et l'axe Ox.

3° Une parallèle Δ à Ox d'ordonnée y peut rencontrer la courbe C en un certain nombre de points. Discuter suivant les valeurs de y le nombre de points obtenus.

4° On suppose y choisi de telle manière que la parallèle Δ à Ox rencontre la courbe C en quatre points A, B, C, D. Calculer en fonction de y les abscisses X des milieux des segments ayant pour origines et pour extrémités deux points distincts choisis parmi les quatre points A, B, C, D.

5° Négligeant ceux des points obtenus qui sont situés sur l'axe Oy, montrer que l'ordonnée des autres points s'exprime rationnellement en fonction de x par une fonction $y = f(x)$ analogue à celle qui définit la courbe C. Sans limiter la variation de y, construire la courbe C_1 représentant les variations de la fonction $y = f(x)$ sur le même graphique que la courbe C. Quels sont les points communs aux deux courbes C et C_1.

1205. 1° On donne un rectangle ABCD, de côtés AB $= 2\,l$, AD $= 5\,l$ (l longueur donnée). On prend un point M sur le prolongement de AB au-delà de B et l'on pose :

$$\widehat{AMC} = \alpha, \quad \widehat{AMD} = \beta, \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

a) Évaluer la tangente de l'angle β en fonction de la tangente de l'angle α.

b) On pose $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = y$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$; calculer y en fonction de x. Étudier les variations de la fonction y de x quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$; montrer l'existence d'un centre de symétrie, puis tracer la courbe représentative; marquer en trait renforcé l'arc correspondant aux conditions de l'énoncé (c'est-à-dire M sur le prolongement de AB au-delà de B).

c) Déterminer les angles α et β lorsque $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$ (on pourra utiliser la règle à calcul).

2° On considère maintenant la courbe (C) d'équation : $y = \dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{10x}$,

a) Quelle est l'équation générale des droites passant par le point A d'abscisse -1, d'ordonnée $+3$? Discuter l'existence de leurs points communs avec la courbe (C) suivant la valeur de leur coefficient directeur p. En déduire l'équation des tangentes menées de A à la courbe.

b) On considère le point B de la courbe, d'abscisse -1, et la droite (D) d'équation :

$$y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + \frac{2}{5}.$$

La perpendiculaire de B à la droite (D) rencontrant la droite (D) en H et la courbe (C) en C, calculer les abscisses des points H et C. De la comparaison de ces abscisses déduire la position respective des points B et C par rapport à la droite (D).

1206. 1° On considère la fonction de la variable x suivante : $y = \dfrac{x^2 + 2x + a}{x^2 - 2x + 2}$,
où a est un nombre donné.

Déterminer a pour que la fonction passe par un maximum pour $x = \sqrt{2}$; a ayant la valeur trouvée, étudier les variations de y. Construire la représentation graphique.

2° On considère deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, et, sur Ox, les points A et B d'abscisses respectives -1 et $+1$. Soit (D) la droite d'équation $y = 1$; Dans tout ce qui suit, on appelle M′ et M″ les points de la droite (D) tels que : $\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{M''A}{M''B} = k$, k étant un nombre supérieur à 1. Indiquer la construction géométrique de M′ et M″ et discuter suivant les valeurs de k.

M étant un point quelconque de (D), calculer en fonction de l'abscisse x de M le rapport $\left(\dfrac{MA}{MB}\right)^2$ et retrouver à l'aide du graphique du 1° le résultat de la discussion précédente.

3° Former l'équation du second degré en x qui a pour racines les abscisses, x' et x'', des points M′ et M″. Calculer k de sorte que l'angle M′BM″ soit droit.

4° Prouver que le cercle de diamètre M′M″ reste, quand k varie, orthogonal à un cercle fixe En déduire une construction géométrique des points M′ et M″ tels que l'angle M′BM″ soit droit.

1207. 1° Soit un triangle isocèle ABC, dans lequel AB = AC. On désigne par x la mesure d'un angle à la base du triangle ($\widehat{B} = \widehat{C} = x$), par a la mesure du côté BC, par p le demi-périmètre du triangle. Calculer l'aire, S, du triangle ABC, d'abord en fonction de a et x, puis en fonction de p et x.

2° Soit la fonction : $y = \dfrac{\cos x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$.

a) Calculer la dérivée de y par rapport à x. On exprimera cette dérivée en fonction de $\cos x$.

b) Montrer que le signe de cette dérivée est celui de l'expression $2\cos x - 1$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction y quand x varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

d) Représenter graphiquement cette variation par une courbe (C) rapportée au repère xOy.

3° On considère tous les triangles isocèles variables ABC de périmètre constant $2p$. Caractériser un triangle d'aire maximale.

1208. Soit la fonction : $y = \dfrac{x^2(x-a)}{1-x}$.

1° Trouver les points de la courbe représentative (C) sur les axes et à l'infini. Calculer la dérivée et trouver les points maxima et minima de cette courbe. Tangentes aux points remarquables. Discuter en fonction du paramètre a.

2° Du point A de la courbe situé sur l'axe Ox et autre que l'origine on mène une droite variable, Δ, qui coupe (C) aux points M_1 et M_2. Lieu du milieu, μ, de M_1M_2. Soit (Γ) ce lieu.

3° Tracer avec soin les courbes (C) et (Γ) pour $a = 10$.

4° Du point A on mène les tangentes à la courbe (C). Trouver les points de contact. Lieu géométrique de ces points si a varie.

1209. 1° Étudier les variations de la fonction : $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ et construire la courbe représentative dans un système d'axes orthonormés.

2° Soit M le point d'abscisse a sur la courbe (C) d'équation : $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$.
Écrire l'équation de la tangente en M à la courbe (C), puis calculer l'ordonnée b du point T où cette tangente coupe l'axe Oy.

3° D'un point T de l'axe Oy, d'ordonnée b donnée, on se propose de mener les tangentes à la courbe (C). En utilisant la question précédente, discuter le nombre des solutions.

4° Lorsqu'il existe deux tangentes à (C) issues de T, exprimer en fonction de b la pente p de la droite M'M'' qui joint les points de contact M' et M'' de ces tangentes, ainsi que les coordonnées, x_1 et y_1, du milieu K du segment M'M''.

5° Déduire de la question précédente l'équation de la droite M'M''.

6° Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les droites d'abscisses $x = 1$ et $x = e$ (e = base des logarithmes népériens). (Log $e = 1$; $e = 2{,}718\,28$...).

1210. Dans un plan rapporté à un repère cartésien orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le cercle (a), de centre A (+ 3, 0) et de rayon 2, et le cercle (b), de centre B (0, + 4) et de rayon 4. Soit M un point variable de l'axe $x'Ox$. On désigne par x l'abscisse de M, par p_a la puissance de M par rapport au cercle (a), par p_b la puissance de M par rapport au cercle (b).

1° Écrire les équations des cercles (a) et (b).

2° Calculer en fonction de x la valeur du rapport $u = \dfrac{p_a}{p_b}$; étudier les variations de la fonction $u(x)$ ainsi définie et en construire la courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé.

3° k étant un nombre réel donné, existe-t-il sur l'axe $x'Ox$ des points M tels que $\dfrac{p_a}{p_b} = k$? Discuter, suivant la valeur de k, le nombre de ces points M. Quand il en existe deux, M' et M'', montrer que leurs abscisses, x' et x'', sont liées par une relation indépendante de k. Écrire cette relation.

4° Montrer qu'il existe un cercle (c) centré sur $x'Ox$ et orthogonal à (a) et (b). En préciser le centre et le rayon. Construire un cercle (d) centré sur $y'Oy$ et orthogonal à (a) et (b). Calculer les coordonnées du centre et le rayon R de (d). On donnera de R la valeur exacte, puis la valeur décimale approchée par défaut à $\dfrac{1}{10^3}$ près.

5° On considère la courbe (Γ) construite au 2°. Calculer l'aire arithmétique S limitée par l'axe des abscisses et l'arc de (Γ) dont les extrémités sont sur l'axe des abscisses. Donner de S l'expression exacte la plus simple, puis la valeur décimale approchée par défaut à $\dfrac{1}{10^3}$ près.

1211. On trace deux axes orthonormés $x'Oy$, $y'Oy$ et le cercle de centre O et de rayon R. On considère, sur ce cercle, le point fixe A défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{3}$, le symétrique B de A par rapport à $x'Ox$ et le point variable M défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, avec $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, l'unité d'angle étant le radian.

1° Écrire les équations des droites AM et BM. On pose $z = \overline{DC}$, C et D étant les points d'intersection des droites AM et BM avec $x'Ox$, respectivement. Montrer que :

$$z = 2R\sqrt{3}\,\frac{\sin\theta}{1 + 2\cos\theta}.$$

2° Rendre z calculable par logarithmes et calculer sa valeur numérique lorsque la mesure de l'angle θ est 28°39' et R = 5 cm, avec la précision des tables de logarithmes.

3° Étudier les variations de z en fonction de θ exprimé en radians.

Construire le graphe par rapport à deux axes $\omega\theta$ et ωz perpendiculaires, avec $R = 5$ cm, en prenant pour π la valeur approchée 3,14 et les échelles graphiques suivantes : 2 cm pour représenter 1 radian sur l'axe $\omega\theta$ et 0,5 cm pour 1 cm sur ωz.

4° Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe $\omega\theta$, le point ω et la droite d'équation $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(On utilisera le résultat suivant : si u est une fonction de x, non nulle pour la valeur considérée, dérivable, la dérivée de Log $|u|$ est $\frac{u'}{u}$.)

1212. Dans tout le problème, le plan est rapporté au repère orthonormé xOy.

1° Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les deux systèmes de relations :

$$(1) \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} |ad - bc| = 1 \\ a^2 = d^2 \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

Montrer soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe au moins un angle θ tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\quad = \sin\theta$), que (1) implique (2). La réciproque est-elle vraie ?

2° On considère la transformation ponctuelle $\mathcal{R}$ qui, à chaque point $m(x, y)$, fait correspondre le point $M'(X', Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \\ Y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont les points doubles de $\mathcal{R}$?

b) Montrer que $Om = OM'$ et que, si P' est l'image de p, on a toujours $pm = P'M'$.

c) Calculer, à $2k\pi$ près, l'angle de vecteurs (Om, OM') et reconnaître la nature de $\mathcal{R}$.

3° Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathcal{S}$ qui à chaque point $m(x, y)$ fait correspondre le point $M''(X'', Y'')$ tel que :

$$\begin{cases} X'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, \\ Y'' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y. \end{cases}$$

a) Quels sont ses points doubles ?

b) Montrer que $\mathcal{S}$ est une symétrie axiale.

4° Plus généralement, tout système de relations

$$X = ax + by,$$
$$Y = cx + dy,$$

où a, b, c, d sont des nombres reéls vérifiant l'inégalité $ad - bc \neq 0$, définit une transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ par laquelle tout point $m(x, y)$ a pour image $M(X, Y)$.

a) Rechercher un ensemble de conditions nécessaire et suffisant entre les nombres a, b, c, d pour que la transformation correspondante soit une isométrie, c'est-à-dire conserve les distances (M et P étant les images de m et p, on a $mp = MP$ quels que soient m et p).

A quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement ? A quelle condition est-elle une symétrie axiale ?

b) $\mathcal{T}$ peut-elle être une similitude ?

5° Étudier la transformation particulière $\mathcal{T}$ définie par :

$$X = x,$$
$$Y = 3x + 2y.$$

a) A-t-elle des points doubles ?

b) Quelle est la figure transformée d'une droite parallèle à Ox, d'une droite parallèle à Oy ?

c) Construction de l'image M d'un point quelconque m.

1213. 1° Étudier la variation de la fonction $y = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$ et construire sa courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé. Quel est l'axe de symétrie de cette courbe ?

2° Quelle est l'équation de la droite (D) passant par le point A ($x = -1, y = 0$) et de pente m ? La droite (D) coupe la courbe (C) en deux points, M_1 et M_2, en plus du point A. Discuter en fonction de m l'existence de ces points.

Quelles sont les coordonnées du milieu I, de M_1M_2 ?

Quelle courbe (H) décrit I quand m varie ?

3° Quelle est la dérivée de $y_1 = \dfrac{1}{x-2}$?

Déterminer a et b tels que $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = \dfrac{a}{(x-2)^2} + b.$

Quelle est l'aire limitée par la courbe (C), l'axe Ox et les parallèles à Oy d'équation, $x = 5$ et $x = 11$?

1214. Dans le plan rapporté au repère orthonormé x'Ox, y'Oy, on considère le point fixe A dont les coordonnées sont a et 0 (a étant un nombre strictement positif) ; on étudie la transformation ponctuelle T qui à un point M quelconque du plan associe le point M' défini de la manière suivante : les points A, M et M' sont alignés et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont perpendiculaires.

1° Déterminer l'ensemble des points M qui n'ont pas de transformé.

Déterminer l'ensemble des points M tels que le transformé de chacun d'eux soit le point A.

La transformation T admet-elle un point double (ou invariant) ?

Quelle est la transformée d'une droite passant par O ?

Existe-t-il une transformation réciproque (ou inverse) de T ?

2° On désigne par (X, Y) les coordonnées de M et par (X', Y') celles de M'. Établir entre ces coordonnées deux relations ayant la propriété suivante : le fait qu'elles soient simultanément vérifiées est une condition nécessaire et suffisante pour que M et M' soient homologues par T. Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M, puis les coordonnées de M en fonction de celles de M'.

3° On suppose que M décrit la droite D dont l'équation est $x = 2a$. Déterminer l'ensemble D' des points M' transformés des points M et D.

4° Les coordonnées du point M sont définies en fonction du temps par les relations $x = -at$, $y = at$ (t variant de $-\infty$ à $+\infty$). Déterminer la trajectoire, C, du point M, en précisant ses éléments. Exprimer en fonction de t les coordonnées du point M' et en déduire l'équation cartésienne de la transformée, C' de C. Comparer C' à D'.

Déterminer à l'instant t, les composantes du vecteur vitesse de M et celles du vecteur vitesse de M'.

Établir les équations cartésiennes de la tangente en M à C et de la tangente en M' à C'. Donner les équations de deux des tangentes communes à C et C'.

1215. Oxyz étant un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite (D) définie par $x = 0$, $z = R$ et la droite (D') définie par $y = 0$, $z = -R$. On prend, sur (D), le point M de coordonnées

$$x = 0, \qquad y = R\sqrt{2}\,\text{tg}\,\alpha, \qquad z = R$$

et, sur (D'), le point P de coordonnées :

$$x = R\sqrt{2}\,\text{cotg}\,\alpha, \qquad y = 0, \qquad z = -R.$$

Soit A l'intersection de (D) et Oz, B celle de (D') et Oz.

1° Vérifier que le produit $\overline{AM}\,.\,\overline{BP}$ est constant lorsque α varie et donner sa valeur en fonction de R.

2° Calculer les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{MP}$. Soit I le point de MP tel que $\frac{\overrightarrow{MI}}{\overrightarrow{MP}} = \rho$, ρ étant un nombre réel donné. Calculer les coordonnées, x, y, z, de I en fonction de R, ρ et α.

3° Soit (II) le plan mené de O perpendiculairement à MP. On suppose que I appartient à (II) : calculer ρ et vérifier que l'on a $\rho = \sin^2 \alpha$.

4° Montrer que l'on peut alors exprimer x, y, z en fonction de R et des fonctions circulaires de 2α. Trouver, entre x, y, z, deux relations indépendantes de α et en déduire que le lieu de I, lorsque α varie, est un cercle, que l'on déterminera.

1216. Soit la fonction $y = \frac{x(1-x)}{1+x}$ et (Γ) son graphe.

1° Déterminer les asymptotes de (Γ).

Montrer que y peut se mettre sous la forme $y = Ax + B + \frac{C}{x+1}$, A, B, C étant des constantes, qu'on déterminera.

2° Étudier les variations de y et tracer (Γ). On déterminera le centre de symétrie.

3° Déterminer tous les points de (Γ) à coordonnées entières.

4° Soit (Γ_1) le graphe de la fonction $y_1 = \frac{|x|(1-x)}{1+x}$.

Comment passe-t-on de (Γ) à (Γ_1) ?
Tracer (Γ_1) sur le même graphique que (Γ).
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la droite d'équation $x = m$ $(-1 < m < 0)$, (Γ), (Γ_1) et Ox. Cette aire a-t-elle une limite lorsque m tend vers -1 ?

1217. Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ on prend les points A (R, 0) et B (− R, 0) (R : longueur donnée). A tout point M du plan on associe le point M′ défini par les conditions

$$\begin{cases} \text{module de } \overrightarrow{BM'} = \text{module de AM,} \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi. \end{cases}$$

On désigne par P le milieu de MM′.

A) 1° Préciser la nature géométrique de l'application (T) transformant M en M′ et celle de l'application (T′) transformant M en P. Quel est le point double de (T) ?

2° Connaissant les coordonnées (x, y) de M, donner les coordonnées (x', y') de M′ et les coordonnées (X, Y) de P.

3° M décrivant la droite d'équation $x = 2R$, préciser le lieu de M′, le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM′.

B) *Dans tout ce qui suit*, on suppose que M décrive le cercle de centre A et de rayon R.

4° Préciser le lieu de M′, le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM′.

5° Écrire les équations dans le repère $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ du lieu de M, du lieu de M′, du lieu de P et de l'enveloppe de la droite MM′. Montrer que l'enveloppe de MM′ est bitangente au lieu de M, au lieu de M′ et au lieu de P.

6° On désigne par α l'angle polaire $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{AM})$ défini à $2k\pi$ près. Donner, en fonction de α et de R, les coordonnées de M, de M' et de P. R et α étant donnés, former l'équation cartésienne de la droite MM'. Calculer le carré, z, de la distance de l'origine O de la droite MM'.

Exprimer z en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$.

7° Étudier les variations et le graphe de la fonction $z = \frac{2R^2(1+t)^2}{(t^2+1)(t^2+4t+5)}$, R désignant une longueur donnée et t variant de $-\infty$ à $+\infty$.

A cet effet, on se bornera à effectuer le changement de variable défini par $\theta = t + 1$ et à étudier la fonction $z(\theta)$ ainsi obtenue.

1218. 1° Étudier la variation de la fonction $y = \frac{x^2 - 2ax}{a - x}$ (a : nombre positif fixe) et construire sa courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé. Vérifier que (C) possède un centre de symétrie.

Soit M le point de (C) d'abscisse $\overline{OH} = \frac{3a}{2}$; calculer, en fonction de a, l'aire du domaine limité par Ox, l'ordonnée HM et l'arc de (C) passant par M.

2° On pose $a = 3$ dans la fonction étudiée au 1°. Trouver les points de (C) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

1219. On considère l'application qui, à tout nombre complexe z différent de -1, associe le nombre Z défini par la formule :

$$Z = \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 1} \quad (z \neq -1).$$

1° Déterminer les constantes a et b telles que $Z = z + a + \frac{b}{z+1}$.

2° On suppose que z décrit le corps des réels (sauf la valeur -1).

a) Étudier les variations de la fonction qui, à z, fait correspondre Z. Représenter le graphe, (H), de cette fonction par rapport à un repère orthonormé, Oz, OZ.

b) Soit C le point de rencontre des asymptotes de (H), $\vec{i}$ le vecteur unitaire de Oz, $\vec{I}$ le vecteur unitaire de OZ, $\vec{j}$ le vecteur unitaire défini par $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ dans le plan orienté zOZ.

Exprimer le vecteur $\vec{i}$ en fonction de $\vec{j}$ et $\vec{I}$.

Si M est un point de (H), exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ sous la forme $\overrightarrow{CM} = u\vec{j} + v\vec{I}$, où u et v sont des fonctions de z, que l'on demande de déterminer. En déduire que (H) est une hyperbole, dont on demande la distance focale.

c) Calculer l'aire, S, du domaine compris entre OZ, la courbe (H), la droite d'équation $Z = z + 4$ et la droite d'équation $z = e - 1$, où e est la base des logarithmes népériens (on pourra effectuer la translation des axes de coordonnées amenant l'origine au point d'abscisse -1 de l'axe Oz).

3° On suppose que z décrit le corps des complexes (sauf la valeur -1) et l'on pose

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY.$$

a) Déterminer X et Y en fonction de x et y.

b) Au nombre complexe z on associe son image, P (x, y), dans le plan complexe. Quel est l'ensemble des points P tels que Z soit réel ? Donner alors, suivant les cas trouvés, l'expression de Z en fonction de la seule abscisse, x, du point P.

4° On suppose que z décrit le corps des rationnels (sauf la valeur -1).

a) Démontrer que, si Z est entier, z est nécessairement entier) on prendra z sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$).

b) Déterminer tous les entiers z tels que Z soit entier.

Il s'agit, dans ces deux dernières questions, d'entiers relatifs.

1220. On considère les nombres complexes

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$
$$z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$
$$z_3 = \rho_3 (\cos \theta_3 + i \sin \theta_3)$$

et l'on suppose que, dans cet ordre, ils forment une progression géométrique de raison q, entier au moins égal à 2.

Comparer les arguments, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, des nombres complexes z_1, z_2, z_3..

Déterminer ces trois nombres z_1, z_2, z_3, sachant, de plus, que :

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{21(5i - \sqrt{3})}{2 - i\sqrt{3}}$$

et que les modules, ρ_1, ρ_2, ρ_3, des nombres z_1, z_2 et z_3 sont des entiers.

1221. 1° Étudier les variations des fonctions :

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Construire leurs graphes, (C_1) et (C_2), dans un repère orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$, dont les vecteurs unitaires auront pour module 2 cm. On étudiera avec soin les branches infinies de (C_1) et (C_2).

2° On désigne par (H) la réunion de (C_1) et (C_2). Montrer que, pour qu'un point M (x, y) du plan appartienne à (H), il faut et il suffit que :

$$y^2 - \sqrt{3}\,xy + \frac{3}{4} = 0.$$

On rapporte le plan au nouveau repère normé X'OX, Y'OY défini par :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{X'X}) = 0 \pmod{2\pi}, \quad (\overrightarrow{X'X}, \overrightarrow{Y'Y}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Établir les relations liant les coordonnées (x, y) et (X, Y) d'un point du plan dans l'ancien et le nouveau repère.

Quelle est l'équation de (H) dans ce nouveau repère ? En déduire que (H) est une hyperbole, dont on déterminera les foyers, F et F', les sommets et l'excentricité.

1222. On considère la fonction

$$y = \cos^3 x - 3\cos x + 2.$$

1° Étudier ses variations dans l'intervalle $(0, \pi)$ (justifier ce choix).

2° Tracer la courbe représentative sur l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en prenant 2 cm comme unité de longueur sur chacun des axes (rectangulaires).

On déterminera en particulier les points d'inflexion et leurs tangentes, que l'on construira.

3° Montrer que la courbe complète admet une infinité d'axes de symétrie et de centres de symétrie, dont on précisera la position.

4° On considère la portion de courbe définie au 2°.

Compte tenu de la formule $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, déterminer l'aire limitée par la courbe, la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = \pi$ et les droites parallèles à Oy menées par les points d'inflexion.

On donnera de cette aire :

a) la valeur exacte;

b) la valeur, en centimètres carrés, approchée à moins de 1 mm^2, sachant que $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$ (on écrira les encadrements nécessaires pour justifier le calcul).

1223. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) on donne la parabole (P) d'équation

$$y^2 - 2px = 0 \quad (p > 0).$$

Par un point m quelconque du plan, on mène la parallèle à l'axe des abscisses, qui coupe (P) en A et l'on prend le symétrique, M, de m par rapport à la tangente en A à (P).

1° On suppose (P) définie par son foyer, F, et sa directrice (que l'on déterminera). Donner une construction géométrique de M, connaissant m.

2° Soit x, y les coordonnées de m; soit X, Y les coordonnées de M. Démontrer les formules :

$$X = \frac{y^2(x+p) - p^2x}{y^2 + p^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{py(2x+p)}{y^2+p^2}.$$

[Le point m de coordonnées x, y et la parabole (P) d'équation $y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$) étant supposés donnés, on pourra considérer M comme l'intersection de deux droites convenablement choisies, dont on cherchera les équations.]

3° Les formules ainsi établies au 2° définissent une transformation ponctuelle (T) qui, à un point m du plan, fait correspondre un point M.

Déterminer *analytiquement* :

a) les points invariants par (T);

b) les figures transformées par (T) :

α) de l'axe des abscisses,

β) de la directrice de (P),

γ) de la droite d'équation $y = y_0$ (y_0 étant une constante donnée),

δ) de la droite d'équation $x = x_0$ (x_0 étant une constante donnée).

4° Former l'équation de la courbe à laquelle doit appartenir m pour que le point M soit sur la droite d'équation $X = X_0$, où X_0 est une constante donnée.

Étudier la variation de la fonction $x = f(y)$ ainsi obtenue pour $X_0 = 2p$ et tracer la courbe représentative dans un système d'axes orthonormé.

5° Démontrer géométriquement les résultats demandés dans la question 3° de ce problème.

1224. On considère la fonction : $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + a}$, où a est un paramètre.

1° Pour quelles valeurs de a la fonction y présente-t-elle un maximum et un minimum ?

2° Montrer que, quel que soit le paramètre a, la courbe représentative (C_a), de la variation de la fonction y passe par deux points fixes, A et B, dont on déterminera les coordonnées. Pour quelle valeur de a les tangentes en A et B à la courbe (C_a) sont-elles parallèles ?

3° On suppose maintenant $a = 2$. Étudier, dans ce cas, la variation de la fonction y et tracer la courbe représentative (C) (échelle : 1 centimètre pour unité sur chaque axe). Montrer que le point I d'abscisse -2 et d'ordonnée -2 est un centre de symétrie de la courbe (C) et que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote.

4° On pose $x = X - 2$ et $y = Y - 2$. Calculer Y en fonction de X. Déterminer la primitive de la fonction Y de X qui s'annule pour $X = 2$. Calculer la valeur de cette primitive pour

$$X = \frac{1}{2}, \quad X = 4, \quad X = \sqrt[5]{2}.$$ On donne $\text{Log } 2 = 0{,}693\,15$.

1225. Le plan est rapporté à un repère orthonormé xOy.

1° Étudier la variation de la fonction $y = \text{Log}\, ax$, dans laquelle x désigne la variable indépendante et a une constante positive quelconque. Montrer que les courbes (C) et (L) représentant respectivement les variations des fonctions $y = \text{Log}\, ax$ et $y_1 = \text{Log}\, x$ sont égales.

2° Calculer l'abscisse du point d'intersection, M, de la courbe (C) et de l'axe $x'x$. Calculer l'abscisse du point N de la courbe (C) dont l'ordonnée est égale à 1.

3° Établir l'équation de la droite MN et montrer que cette droite passe par un point fixe, F, lorsque a varie. Calculer les coordonnées du point T de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite MN. On projette orthogonalement les points N et T en N′ et T′ sur l'axe $x'x$; montrer que les segments ON′ et MT′ ont le même milieu, I.

4° Construire soigneusement la courbe (C) représentant la variation de la fonction $y = \text{Log}\, ex$ ($e = 2{,}718\,28...$) et marquer les points M, N, N′, T, T′, F. Échelle : 10 centimètres représentent l'unité sur chacun des axes.

1226. On considère la suite des nombres $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ On donne les deux premiers, u_0 et u_1, réels; les suivants sont définis par la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

1° Construire cette suite de nombres; établir qu'elle est périodique; de combien de nombres se compose la période ?

2° Démontrer que u_n peut se mettre sous la forme

$$u_n = \lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta,$$

où θ ne dépend pas de u_0, u_1 et n et où λ et μ dépendent de u_0 et u_1 et non de n.
Calculer θ ($0 < \theta < \pi$), λ et μ.

3° $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère les vecteurs :

$$\overrightarrow{OP_n} = \vec{i}\lambda \cos n\theta + \vec{j}\mu \sin n\theta,$$

λ, μ et θ ayant les valeurs ci-dessus. Montrer que les points P_n sont sur une même conique, L, dont on précisera les éléments.
Montrer que les droites P_kP_{k+1} sont tangentes à une même conique, L′, homothétique et concentrique à L.

4° Démontrer que toute expression

$$v_n \doteq A \cos n\varphi + B \sin n\varphi,$$

où A, B, φ ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) sont trois réels donnés *quelconques*, indépendants de n, peut être considérée comme le terme de rang $n + 1$ d'une suite $v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ...$ satisfaisant à la relation de récurrence

$$v_n = av_{n-1} + bv_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

a et b étant deux constantes, qu'on calculera en fonction de φ.
Pour quelles valeurs de φ cette suite est-elle périodique, sa période comportant p termes ?

1227. Soit la fonction $y = \dfrac{10x}{(x^2 - 1)^2}$.

A) Étude de la fonction.

1° Pour quelles valeurs de x est-elle définie ?

2° Montrer que la courbe représentative admet l'origine pour centre de symétrie.

3° Calculer la dérivée et en déduire les variations de la fonction. Quelle est la valeur de la dérivée pour $x = 0$?

4° Étudier les limites de y lorsque x tend vers $\pm \infty$ et lorsque x tend vers ± 1.

5° Tracer la courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé.

B) 1° Montrer que y peut s'écrire $\frac{av'}{v^2}$, v' représentant la dérivée par rapport à x de la fonction v de la variable x et a une constante.

2° En déduire une primitive de la fonction y.

3° Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des x et les droites d'équations $x = 2$, $x = 3$.

C) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec la droite d'équation $y = \frac{10}{9}x$.

1228. Dans un plan rapporté au repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on donne le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

et la droite (D) d'équation $y = R$. Un point M variable sur le cercle (C) est repéré par l'angle orienté

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

La tangente en M au cercle (C) coupe en général Oy en A et la droite (D) en A'. Soit N le milieu de AA'.

1° Établir que les coordonnées de N sont :

$$x = -\frac{R}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + 1\right).$$

En déduire que l'ensemble (D) des points N a pour équation

$$y(R^2 - 4x^2) = R^3.$$

2° Étudier les variations de y en fonction de x et construire l'ensemble (E).

3° Former l'équation aux abscisses des intersections de l'ensemble (E) et du cercle (C). Montrer que les graphes sont tangents en trois points, que l'on déterminera. Montrer qu'on peut trouver par une étude purement géométrique les points de (E) situés sur (C).

4° Une droite quelconque passant par le point H (0, R) recoupe l'ensemble (E) en deux points, N_1 et N_2, distincts de H. Déterminer analytiquement l'ensemble des milieux de N_1N_2.

5° Former l'équation aux abscisses des points d'intersection de (E) et des droites d'équation $y = mx$, où m est un paramètre réel. Discuter graphiquement le nombre des solutions, suivant les valeurs de m.

1229. 1° En axes orthonormés, on considère la transformation ponctuelle (T) qui, à un point M de coordonnées x et y, fait correspondre le point M_1 de coordonnées x_1 et y_1 telles que

$$x_1 = x, \qquad yy_1 = 1.$$

a) Cette transformation est-elle involutive ?

Déterminer l'ensemble de ses points doubles.

Existe-t-il des droites invariantes globalement ?

b) En supposant x fixe, que peut-on dire des cercles de diamètre MM_1 ?

2° *a*) Déterminer la courbe (H) transformée de la droite (D) d'équation $y = ax$ ($a \neq 0$) et préciser ses éléments.

Quel est l'ensemble des points P communs à une droite (D) et à sa transformée ?

b) Écrire l'équation de la tangente au point M_1 (x_1, y_1) à la courbe (H) et préciser en particulier ses points d'intersection, R et S, avec les axes; en déduire une propriété des points M_1, R, S et une construction géométrique simple de cette tangente. Quelle est l'aire du triangle ORS ?

3° *a*) Déterminer la courbe (K) transformée de la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Par quelle transformation simple peut-on passer de (H) à (K) ?

b) On envisage maintenant les droites (D) d'équation $y = ax$, où $a > 0$, et les droites (D') d'équation $y = a'x$, où $a' > 0$.

(H) étant la transformée de (D) par (T), (H') étant la transformée de (D') par (T), par quelle transformation simple passe-t-on de (H) à (H') ?

1230. On considère le plan muni d'un repère orthonormé ($x'Ox$, $y'Oy$) et l'application $\mathcal{A}$ qui, à tout point M de coordonnées x et y ($y \neq 0$), fait correspondre le point $M_1 = \mathcal{A}(M)$ de coordonnées x_1 et y_1 définies par

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{x^2}{y}.$$

1° *a*) On considère un point M d'abscisse non nulle et M_1 son image par $\mathcal{A}$. Déterminer $\mathcal{A}(M_1)$.

b) Que devient le point $M_1 = \mathcal{A}(M)$ lorsque y tend vers 0, x étant donné non nul ?

c) On posera, par définition, que l'image du point M de coordonnées $x \neq 0$ et $y = 0$ est le point « à l'infini » de la parallèle à Oy d'abscisse x et que l'image de l'origine, O, des axes de coordonnées est le point O.

Trouver l'ensemble (D) des points doubles de $\mathcal{A}$ et une définition géométrique de $\mathcal{A}$ à partir de (D).

2° *a*) Quelle est l'équation de (d_1), image par $\mathcal{A}$ de la droite (d) d'équation $ux + vy + h = 0$? Examiner chacun des cas particuliers $v = 0$ ($h \neq 0$) et $h = 0$ ($v \neq 0$); donner, dans ce dernier cas, une construction géométrique de (d_1). Quelle est l'image par $\mathcal{A}$ de la droite $y'Oy$?

b) Étudier la nature de (d_1) dans la cas $vh \neq 0$ et préciser ses éléments remarquables.

3° Soit (C) la graphe d'une fonction $y = f(x)$, M un point de (C), de coordonnées (α, β). Soit (T) la tangente en M à (C) et m sa pente. Soit M_1, de coordonnées (α, β_1), l'image de M par $\mathcal{A}$ et (Δ) la tangente en M_1 à (C_1), transformée de (C). On note μ la pente de (Δ).

a) Calculer μ en fonction de α, β, m (on considérera y_1 comme une fonction composée de x par l'intermédiaire de y), puis les ordonnées à l'origine, b et p, des droites (T) et (Δ).

b) Vérifier l'égalité $\frac{b}{p} = -\frac{\beta}{\beta_1}$ et en déduire une construction simple de (Δ).

TABLES NUMÉRIQUES

TABLE DE LOGARITHMES A 4 DÉCIMALES
(de 100 à 549)

	43	42	41	40
0,1	4,3	4,2	4,1	4
0,2	8,6	8,4	8,2	8
0,3	12,9	12,6	12,3	12
0,4	17,2	16,8	16,4	16
0,5	21,5	21,0	20,5	20
0,6	25,8	25,2	24,6	24
0,7	30,1	29,4	28,7	28
0,8	34,4	33,6	32,8	32
0,9	38,7	37,8	36,9	36

	39	38	37	36
0,1	3,9	3,8	3,7	3,6
0,2	7,8	7,6	7,4	7,2
0,3	11,7	11,4	11,1	10,8
0,4	15,6	15,2	14,8	14,4
0,5	19,5	19,0	18,5	18,0
0,6	23,4	22,8	22,2	21,6
0,7	27,3	26,6	25,9	25,2
0,8	31,2	30,4	29,6	28,8
0,9	35,1	34,2	33,3	32,4

	35	34	33	32
0,1	3,5	3,4	3,3	3,2
0,2	7,0	6,8	6,6	6,4
0,3	10,5	10,2	9,9	9,6
0,4	14,0	13,6	13,2	12,8
0,5	17,5	17,0	16,5	16,0
0,6	21,0	20,4	19,8	19,2
0,7	24,5	23,8	23,1	22,4
0,8	28,0	27,2	26,4	25,6
0,9	31,5	30,6	29,7	28,8

	31	30	29	28
0,1	3,1	3	2,9	2,8
0,2	6,2	6	5,8	5,6
0,3	9,3	9	8,7	8,4
0,4	12,4	12	11,6	11,2
0,5	15,5	15	14,5	14,0
0,6	18,6	18	17,4	16,8
0,7	21,7	21	20,3	19,6
0,8	24,8	24	23,2	22,4
0,9	27,9	27	26,1	25,2

	27	26	25	24
0,1	2,7	2,6	2,5	2,4
0,2	5,4	5,2	5,0	4,8
0,3	8,1	7,8	7,5	7,2
0,4	10,8	10,4	10,0	9,6
0,5	13,5	13,0	12,5	12,0
0,6	16,2	15,6	15,0	14,4
0,7	18,9	18,2	17,5	16,8
0,8	21,6	20,8	20,0	19,2
0,9	24,3	23,4	22,5	21,6

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	2502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	8909	3927	3945	8962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	8785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

NOMBRES USUELS

Nombres	Logarithmes	Nombres	Logarithmes
π = 3,14159	0,49715	2	0,30103
$1/\pi$ = 0,31831	$\bar{1}$,50285	3	0,47712
e = 2,71828	0,43429	$\sqrt{2}$ = 1,41421	0,15051
$1/e$ = 0,36788	$\bar{1}$,56571	$\sqrt{3}$ = 1,73205	0,23856
g = 9,80943	0,99164	$\sqrt{5}$ = 2,23607	0,34949

TABLE DE LOGARITHMES A 4 DÉCIMALES
(de 550 à 1000)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	9069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	9209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

	23	22	21	20
0,1	2,3	2,2	2,1	2
0,2	4,6	4,4	4,2	4
0,3	6,9	6,6	6,3	6
0,4	9,2	8,8	8,4	8
0,5	11,5	11,0	10,5	10
0,6	13,8	13,2	12,6	12
0,7	16,1	15,4	14,7	14
0,8	18,4	17,6	16,8	16
0,9	20,7	19,8	18,9	18

	19	18	17	16
0,1	1,9	1,8	1,7	1,6
0,2	3,8	3,6	3,4	3,2
0,3	5,7	5,4	5,1	4,8
0,4	7,6	7,2	6,8	6,4
0,5	9,5	9,0	8,5	8,0
0,6	11,4	10,8	10,2	9,6
0,7	13,3	12,6	11,9	11,2
0,8	15,2	14,4	13,6	12,8
0,9	17,1	16,2	15,3	14,4

	15	14	13	12
0,1	1,5	1,4	1,3	1,2
0,2	3,0	2,8	2,6	2,4
0,3	4,5	4,2	3,9	3,6
0,4	6,0	5,6	5,2	4,8
0,5	7,5	7,0	6,5	6,0
0,6	9,0	8,4	7,8	7,2
0,7	10,5	9,8	9,1	8,4
0,8	12,0	11,2	10,4	9,6
0,9	13,5	12,6	11,7	10,8

	11	10	9	8
0,1	1,1	1	0,9	0,8
0,2	2,2	2	1,8	1,6
0,3	3,3	3	2,7	2,4
0,4	4,4	4	3,6	3,2
0,5	5,5	5	4,5	4,0
0,6	6,6	6	5,4	4,8
0,7	7,7	7	6,3	5,6
0,8	8,8	8	7,2	6,4
0,9	9,9	9	8,1	7,2

	7	6	5	4
0,1	0,7	0,6	0,5	0,4
0,2	1,4	1,2	1,0	0,8
0,3	2,1	1,8	1,5	1,2
0,4	2,8	2,4	2,0	1,6
0,5	3,5	3,0	2,5	2,0
0,6	4,2	3,6	3,0	2,4
0,7	4,9	4,2	3,5	2,8
0,8	5,6	4,8	4,0	3,2
0,9	6,3	5,4	4,5	3,6

LOGARITHMES DE $(1 + r)$ (calcul des intérêts composés)

Taux %	$1 + r$	$\log(1 + r)$	Taux %	$1 + r$	$\log(1 + r)$
2,50	1,025	0,010 7239	5	1,05	0,021 1893
3	1,03	0,012 8372	5,50	0,055	0,023 2525
3,50	1,035	0,014 9403	6	1,06	0,025 3059
4	1,04	0,017 0333	6,50	1,065	0,027 3496
4,50	1,045	0,019 1163	7	1,07	0,029 3838

Rapports trigonométriques naturels de DEGRÉ en DEGRÉ

Deg.	Radians	Sin.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Tang.	Cotg.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cos.		
0	0,0000	0,0000	infini	0,0000	infini	1,000	1,0000	1,5708*	90
1	0,0175*	0,0175*	57,30*	0,0175*	57,29*	1,000	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349*	28,65	0,0349	28,64*	1,001*	0,9994*	1,5359*	88
3	0,0524*	0,0523	19,11*	0,0524	19,08	1,001	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698*	14,34*	0,0699	14,30	1,002	0,9976*	1,5010*	86
5	0,0873*	0,0872*	11,47	0,0875*	11,43	1,004*	0,9962*	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	9,567*	0,1051	9,514	1,006*	0,9945	1,4661*	84
7	0,1222*	0,1219*	8,206*	0,1228*	8,144	1,008*	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392*	7,185	0,1405	7,115	1,010*	0,9903*	1,4312*	82
9	0,1571*	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	5,759*	0,1763	5,671	1,015	0,9848	1,3963*	80
11	0,1920*	0,1908	5,241*	0,1944*	5,145*	1,019*	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	4,810*	0,2126*	4,705*	1,022	0,9781	1,3614*	78
13	0,2269*	0,2250*	4,445	0,2309*	4,331	1,026	0,9744*	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	4,134*	0,2493	4,011*	1,031*	0,9703*	1,3265*	76
15	0,2618*	0,2588	3,864*	0,2679	3,732	1,035	0,9659	1,3090*	75
16	0,2793*	0,2756	3,628*	0,2867	3,487	1,040	0,9613*	1,2915	74
17	0,2967	0,2924*	3,420	0,3057	3,271*	1,046*	0,9563	1,2741*	73
18	0,3142*	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,2566	72
19	0,3316	0,3256*	3,072*	0,3443	2,904	1,058*	0,9455	1,2392*	71
20	0,3491*	0,3420	2,924*	0,3640*	2,747	1,064	0,9397*	1,2217	70
21	0,3665	0,3584*	2,790	0,3839*	2,605	1,071	0,9336*	1,2043*	69
22	0,3840*	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,079*	0,9272*	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	2,559	0,4245*	2,356*	1,086	0,9205	1,1694*	67
24	0,4189*	0,4067	2,459*	0,4452	2,246	1,095*	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	2,366	0,4663	2,145*	1,103	0,9063	1,1345*	65
26	0,4538*	0,4384*	2,281	0,4877	2,050	1,113*	0,8988*	1,1170	64
27	0,4712	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,0996*	63
28	0,4887*	0,4695*	2,130	0,5317	1,881*	1,133*	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	2,063*	0,5543	1,804	1,143	0,8746	1,0647*	61
30	0,5236*	0,5000	2,000	0,5774*	1,732	1,155*	0,8660	1,0472*	60
31	0,5411*	0,5150	1 942*	0,6009*	1,664	1,167*	0,8572*	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	1,887	0,6249*	1,600	1,179	0,8480	1,0123*	58
33	0,5760*	0,5446	1,836	0,6494	1,540*	1,192	0,8387*	0,9948	57
34	0,5934	0,5592*	1,788	0,6745	1,483*	1,206	0,8290	0,9774*	56
35	0,6109*	0,5736*	1,743	0,7002	1,428	1,221*	0,8192*	0,9599	55
36	0,6283	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,9425*	54
37	0,6458*	0,6018	1,662*	0,7536*	1,327	1,252	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157*	1,624	0,7813*	1,280*	1,269	0,7880	0,9076*	52
39	0,6807*	0,6293	1,589	0,8098*	1,235*	1,287*	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428*	1,556*	0,8391*	1,192*	1,305	0,7660	0,8727*	50
41	0,7156*	0,6561*	1,524	0,8693*	1,150	1,325	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	1,494	0,9004	1,111*	1,346*	0,7431	0,8378*	48
43	0,7505*	0,6820*	1,466	0,9325	1,072	1,367	0,7314*	0,8203	47
44	0,7679	0,6947*	1,440*	0,9657*	1,036*	1,390	0,7193	0,8029*	46
45	0,7854*	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,7854*	45
		Cos.	$\frac{1}{\text{Cos.}}$	Cotg.	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin.}}$	Sin.	Radians	Deg.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Rapports trigonométriques naturels de GRADE en GRADE

Grad.	Radians	Sin.	1/Sin.	Tang.	Cotg.	1/Cos.	Cos.		
0	0,000	0 0000	infini	0,0000	infini.	1,000	1,0000	1,571*	100
1	0,016*	0,0157	63,66	0,0157	63,66*	1,000	0,9999*	1,555	99
2	0,031	0,0314	31,84*	0,0314	31,82	1,000	0,9995	1,539	98
3	0,047	0,0471	21,23*	0,0472*	21,20	1,001	0,9989*	1,524*	97
4	0,063*	0,0628*	15,93*	0,0629	15,89	1,002*	0,9980	1,508*	96
5	0,079*	0,0785*	12,75*	0,0787	12,71*	1,003	0,9969*	1,492	95
6	0,094	0,0941	10,63*	0,0945	10,58*	1,004	0,9956*	1,477*	94
7	0,110*	0,1097	9,113*	0,1104	9,058*	1,006	0,9940*	1,461*	93
8	0,126*	0,1253	7,979*	0,1263	7,916*	1,008*	0,9921	1,445	92
9	0,141	0,1409	7,097	0,1423	7,026	1,010	0,9900	1,429	91
10	0,157	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,414*	90
11	0,173*	0,1719	5,816	0,1745	5,730*	1,015	0,9851	1,398	89
12	0,188	0,1874*	5,337*	0,1908*	5,242	1,018	0,9823*	1,382	88
13	0,204	0,2028*	4,931	0,2071*	4,829*	1,021	0,9792	1,367*	87
14	0,220*	0,2181	4,584	0,2235	4,474*	1,025*	0,9759	1,351*	86
15	0,236*	0,2334	4,284*	0,2401*	4,165	1,028	0,9724*	1,335	85
16	0,251	0,2487*	4,021	0,2568*	3,895*	1,032	0,9686*	1,319	84
17	0,267	0,2639*	3,790*	0,2736*	3,655	1,037*	0,9646*	1,304*	83
18	0,283*	0,2790*	3,584	0,2905	3,442	1,041	0,9603*	1,288	82
19	0,298	0,2940	3,401*	0,3076	3,251*	1,046	0,9558*	1,272	81
20	0,314	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,257*	80
21	0,330*	0,3239	3,087	0,3424*	2,921*	1,057*	0,9461*	1,241*	79
22	0,346*	0,3387	2,952	0,3600	2,778*	1,063*	0,9409*	1,225	78
23	0,361	0,3535*	2,829	0,3779*	2,646	1,069	0,9354	1,210*	77
24	0,377*	0,3681	2,716	0,3959	2,526*	1,076*	0,9298*	1,194*	76
25	0,393*	0,3827*	2,613	0,4142	2,414	1,082	0,9239*	1,178	75
26	0,408	0,3971	2,518*	0,4327	2,311*	1,090*	0,9178*	1,162	74
27	0,424	0,4115	2,430	0,4515	2,215*	1,097	0,9114	1,147*	73
28	0,440*	0,4258*	2,349*	0,4706*	2,125	1,105	0,9048	1,131*	72
29	0,456*	0,4399	2,273	0,4899*	2,041	1,114*	0,8980	1,115	71
30	0,471	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,100*	70
31	0,487*	0,4679	2,137	0,5295*	1,889*	1,132*	0,8838*	1,084*	69
32	0,503*	0,4818*	2,076*	0,5498*	1,819*	1,141	0,8763	1,068	68
33	0,518	0,4955*	2,018	0,5704*	1,753	1,151	0,8686	1,052	67
34	0,534	0,5090	1,964	0,5914*	1,691*	1,162*	0,8607	1,037*	66
35	0,550*	0,5225*	1,914*	0,6128	1,632*	1,173*	0,8526	1,021	65
36	0,565	0,5358	1,866	0,6346	1,576*	1,184	0,8443	1,005	64
37	0,581	0,5490	1,821	0,6569*	1,522	1,196	0,8358	0,990*	63
38	0,597*	0,5621*	1,779	0,6796*	1,471	1,209	0,8271*	0,974*	62
39	0,613*	0,5750	1,739	0,7028	1,423*	1,222	0,8181	0,958	61
40	0,628	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,942	60
41	0,644	0,6004	1,666*	0,7508	1,332*	1,250	0,7997*	0,927*	59
42	0,660*	0,6129	1,632*	0,7757*	1,289	1,266*	0,7902	0,911	58
43	0,675	0,6252	1,599	0,8012*	1,248	1,281	0,7804	0,895	57
44	0,691	0,6374	1,569*	0,8273*	1,209*	1,298*	0,7705	0,880*	56
45	0,707*	0,6494	1,540*	0,8541*	1,171*	1,315	0,7604	0,864*	55
46	0,723*	0,6613	1,512	0,8816	1,134	1,333	0,7501	0,848	54
47	0,738	0,6730	1,486*	0,9099	1,099*	1,352	0,7396	0,833*	53
48	0,754*	0,6845	1,461*	0,9391*	1,065*	1,372*	0,7290*	0,817*	52
49	0,770*	0,6959	1,437*	0,9691*	1,032*	1,393*	0,7181	0,801	51
50	0,785	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,785	50
		Cos.	1/Cos.	Cotg.	Tang.	1/Sin.	Sin.	Radians	Grad.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

Carrés, cubes, inverses, racines carrées et cubiques des cent premiers nombres.

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1	1	1	**51**	2 601	132 651	0,0196	7,141	3,708
2	4	8	0,5000	1,414	1,260*	**52**	2 704	140 608	0,0192	7,211	3,733*
3	9	27	0,3333	1,732	1,442	**53**	2 809	148 877	0,0189*	7,280	3,756
4	16	64	0,2500	2,000	1,587	**54**	2 916	157 464	0,0185	7,348	3,780*
5	25	125	0,2000	2,236	1,710*	**55**	3 025	166 375	0,0182*	7,416	3,803*
6	36	216	0,1667*	2,449	1,817	**56**	3 136	175 616	0,0179*	7,483	3,826*
7	49	343	0,1429*	2,646*	1,913*	**57**	3 249	185 193	0,0175	7,550*	3,849*
8	64	512	0,1250	2,828	2,000	**58**	3 364	195 112	0,0172	7,616*	3,871*
9	81	729	0,1111	3,000	2,080	**59**	3 481	205 379	0,0169	7,681	3,893
10	100	1 000	0,1000	3,162	2,154	**60**	3 600	216 000	0,0167*	7,746*	3,915*
11	121	1 331	0,0909	3,317*	2,224*	**61**	3 721	226 981	0,0164*	7,810	3,936
12	144	1 728	0,0833	3,464	2,289	**62**	3 844	238 328	0,0161	7,874	3,958*
13	169	2 197	0,0769	3,606*	2,351	**63**	3 969	250 047	0,0159*	7,937	3,979
14	196	2 744	0,0714	3,742*	2,410	**64**	4 096	262 044	0,0156	8,000	4,000
15	225	3 375	0,0667*	3,873*	2,466	**65**	4 225	274 425	0,0154*	8,062	4,021*
16	256	4 096	0,0625	4,000	2,520*	**66**	4 356	287 496	0,0152*	8,124	4,041
17	289	4 913	0,0588	4,123	2,571	**67**	4 489	300 763	0,0149	8,185	4,062*
18	324	5 832	0,0556*	4,243*	2,621*	**68**	4 624	314 432	0,0147	8,246	4,082*
19	361	6 859	0,0526	4,359*	2,668	**69**	4 761	328 509	0,0145*	8,307*	4,102*
20	400	8 000	0,0500	4,472	2,714	**70**	4 900	343 000	0,0143*	8,367*	4,121
21	441	9 261	0,0476	4,583*	2,759*	**71**	5 041	357 911	0,0141*	8,426	4,141*
22	484	10 648	0,0455*	4,690	2,802	**72**	5 184	373 248	0,0139*	8,485	4,160
23	529	12 167	0,0435*	4,796*	2,844*	**73**	5 329	389 017	0,0137*	8,544	4,179
24	576	13 824	0,0417*	4,899*	2,885*	**74**	5 476	405 224	0,0135	8,602	4,198
25	625	15 625	0,0400	5,000	2,924	**75**	5 625	421 875	0,0133	8,660	4,217
26	676	17 576	0,0385*	5,099	2,962	**76**	5 776	438 976	0,0132*	8,718*	4,236*
27	729	19 683	0,0370	5,196	3,000	**77**	5 929	456 533	0,0130*	8,775*	4,254
28	784	21 952	0,0357	5,292*	3,037*	**78**	6 084	474 552	0,0128	7,832*	4,273*
29	841	24 389	0,0345*	5,385	3,072	**79**	6 241	493 039	0,0127*	8,888	4,291*
30	900	27 000	0,0333	5,477	3,107	**80**	6 400	512 000	0,0125	8,944	4,309*
31	961	29 791	0,0323*	5,568*	3,141	**81**	6 561	531 441	0,0123	9,000	4,327*
32	1 024	32 768	0,0313*	5,657*	3,175*	**82**	6 724	551 368	0,0122*	9,055	4,344
33	1 089	35 937	0,0303	5,745*	3,208*	**83**	6 889	571 787	0,0120	9,110	4,362
34	1 156	39 304	0,0294	5,831*	3,240*	**84**	7 056	592 704	0,0119	9,165	4,380*
35	1 225	42 875	0,0286*	5,916	3,271	**85**	7 225	614 125	0,0118*	9,220*	4,397*
36	1 296	46 656	0,0278*	6,000	3,302*	**86**	7 396	636 056	0,0116	9,274*	4,414
37	1 369	50 653	0,0270	6,083*	3,332	**87**	7 569	658 503	0,0115*	9,327	4,431
38	1 444	54 872	0,0263	6,164	3,362*	**88**	7 744	681 472	0,0114*	9,381*	4,448*
39	1 521	59 319	0,0256	6,245*	3,391	**89**	7 921	704 969	0,0112	9,434*	4,465*
40	1 600	64 000	0,0250	6,325*	3,420*	**90**	8 100	729 000	0,0111	9,487*	4,481
41	1 681	68 921	0,0244*	6,403	3,448	**91**	8 281	753 571	0,0110*	9,539	4,498*
42	1 764	74 088	0,0238	6,481*	3,476	**92**	8 464	778 688	0,0109*	9,592*	4,514
43	1 849	79 507	0,0233*	6,557	3,503	**93**	8 649	804 357	0,0108*	9,644	4,531*
44	1 936	85 184	0,0227	6,633	3,530	**94**	8 836	830 584	0,0106	9,695	4,547*
45	2 025	91 125	0,0222	6,708	3,557*	**95**	9 025	857 375	0,0105	9,747*	4,563*
46	2 116	97 336	0,0217	6,782	3,583	**96**	9 216	884 736	0,0104	9,798*	4,579*
47	2 209	103 823	0,0213*	6,856*	3,609*	**97**	9 409	912 673	0,0103	9,849*	4,595*
48	2 304	110 592	0,0208	6,928	3,634	**98**	9 604	941 192	0,0102	8,899	4,610
49	2 401	117 649	0,0204	7,000	3,659	**99**	9 801	970 299	0,0101	9,950*	4,626
50	2 500	125 000	0,0200	7,071	3,684	**100**	10 000	1 000 000	0,0100	10,000	4,642*

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE I : ENSEMBLES FONDAMENTAUX.

LIVRE II : ARITHMÉTIQUE

LIVRE III : ÉTUDE DES FONCTIONS

LIVRE IV : APPLIOATIONS

IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT, PARIS - MESNIL - IVRY — N° 4900 — Dépôt légal : 3e trim. 1967
N° d'Éditeur C 11 028 - I (Al. a. SB. 4) Imprimé en France.

